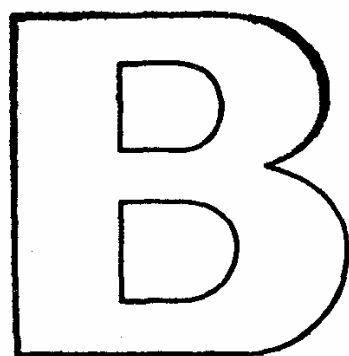


В

ДЛЯ ВУЗОВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ
МЕХАНИКА
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ
АППАРАТОВ

• МАШИНОСТРОЕНИЕ •



ДЛЯ ВУЗОВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Под редакцией
академика И. Ф. ОБРАЗЦОВА

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
авиационных специальностей вузов



МОСКВА
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1986

ББК 39.52
С83
УДК 629.7.015 + 624.04

И. Ф. Образцов, Л. А. Булычев, В. В. Васильев,
А. Н. Елпатьевский, К. А. Жеков, Ю. И. Иванов,
Б. А. Коновалов, Ю. С. Матюшев, Ф. Н. Шклярчук

Рецензенты д-р техн. наук А. С. Вольмир
и кафедра «Машиностроение» МВТУ

Строительная механика летательных аппаратов: Учеб-
С83 ник для авиационных специальностей вузов/И. Ф. Образцов,
Л. А. Булычев, В. В. Васильев и др.; Под ред. И. Ф. Образ-
цова. — М.: Машиностроение, 1986. — 536 с., ил.

(В пер.): 1 р. 50 к.

С 3606030000-124
038 (01)-86 124-86

ББК 39.52
6Т5.1

УЧЕБНИК

Иван Филиппович Образцов, Лев Алексеевич Булычев,
Валерий Витальевич Васильев, Андрей Николаевич Елпатьевский,
Константин Алексеевич Жеков, Юрий Иванович Иванов,
Борис Александрович Коновалов, Юрий Степанович Матюшев,
Федор Николаевич Шклярчук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Редактор А. А. Хрусталева
Художественный редактор В. В. Лебедев. Технический редактор О. В. Куперман.
Корректоры Т. В. Багдасарян и Н. Г. Богомолова

ИБ № 4611

Сдано в набор 12.12.85. Подписано в печать 28.05.86. Т-04982. Формат 60×90^{1/16}.
Бумага офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 33,5.
Усл. кр.-отт. 33,5. Уч.-изд. л. 35,15. Тираж 6400 экз. Заказ 4. Цена 1 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Машиностроение» 107076, Москва,
Стромынский, пер., 4

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского
объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при
Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной тор-
говли.
193144, г. Ленинград, ул. Монсеенко, 10.

© Издательство «Машиностроение», 1986 г.

Летательный аппарат — самолет, вертолет, дирижабль, ракета или космический корабль — должен воспринимать действующие на него в процессе эксплуатации нагрузки без повреждений и недопустимых изменений формы, т. е. быть достаточно прочным и жестким. Этому требованию, являющемуся необходимым условием безопасной эксплуатации, должно удовлетворять любое инженерное сооружение, а конструкция летательного аппарата должна отличаться еще и минимальной массой. Естественно, что требования минимальной массы находятся в противоречии с требованиями достаточной прочности и жесткости. Разрешение этого противоречия является одной из основных проблем, возникающих при создании летательного аппарата; оно осуществляется в процессе расчета, проектирования и экспериментальной отработки как конструкции в целом, так и отдельных ее элементов и в значительной степени обуславливает эффективность летательного аппарата. Успешное решение проблемы определяется прежде всего степенью полноты и достоверности информации, которой располагает конструктор относительно взаимосвязи между геометрическими параметрами конструкции, свойствами материала и допустимым уровнем ее нагружения. Эта взаимосвязь формируется в процессе расчета на прочность летательного аппарата и его элементов, который предусматривает определение расчетных нагрузок; выбор расчетных схем и моделей, адекватно описывающих реальные элементы конструкции; анализ напряженно-деформированного состояния, устойчивости и динамического поведения отдельных моделей и их совокупности; переход от расчетных моделей к реальным объектам и оценку их работоспособности. Наличие широкого класса расчетных схем, моделирующих элементы конструкций самого разнообразного назначения, а также специальных, требующих достаточно сложного математического аппарата, методов, необходимых для решения вопросов о напряженном и деформированном состоянии, устойчивости и динамическом поведении моделей, определило появление специальной научной дисциплины — строительной механики.

Строительная механика — это наука о принципах и методах определения напряженно-деформированного состояния типовых расчетных моделей, анализа их устойчивости и динамического поведения. Формирование строительной механики связано с именами выдающихся ученых и инженеров И. Г. Бубнова, Б. Г. Галеркина, А. Н. Крылова, С. П. Тимошенко. Развитие ряда направлений строительной механики по расчету летательных аппаратов, судов, наземных транспортных средств и сооруже-

ний связано с работами советских ученых В. В. Болотина, В. З. Власова, А. А. Гвоздева, А. Н. Динника, А. А. Ильюшина, А. Ю. Ишлинского, А. И. Лурье, В. В. Новожилова, П. Ф. Папковича, Ю. Н. Работнова, А. Р. Ржаницына, И. М. Рабиновича, А. Ф. Смирнова, Н. С. Стрелецкого, В. И. Феодосьева, Ю. А. Шиманского и др.

Строительная механика летательных аппаратов отличается от других направлений этой науки преимущественным анализом тонкостенных конструкций, а также повышенными требованиями к точности расчетных методов, которые с учетом ограничений массы конструкции должны гарантировать ее безопасную работу на пределе возможностей материала. Успехи в развитии строительной механики в нашей стране связаны с работами Л. И. Балабуха, А. С. Вольмира, Э. И. Григолюка, С. Н. Кана, В. И. Климова, К. С. Колесникова, Ю. Г. Одинокова, А. Ю. Ромашевского, И. А. Свердлова, В. М. Стригунова и др.

Строительная механика летательных аппаратов, как и любая другая отрасль науки, непрерывно развивается и совершенствуется, что связано прежде всего с развитием авиационной и космической техники — разработкой новых классов летательных аппаратов, интенсификацией и расширением спектра внешних воздействий, повышением требований к весовому совершенству конструкций, внедрением новых анизотропных и слоистых материалов. Вместе с не теряющими актуальности аналитическими методами исследования традиционных расчетных моделей интенсивно развиваются численные методы расчета сложных систем с помощью ЭВМ. Современные концепции и методы анализа механического поведения конструкций наряду с традиционными, естественно, должны находить отражение в учебной литературе. Именно эту цель и преследовали авторы настоящего учебника.

Как учебная дисциплина строительная механика базируется на курсах теоретической механики, сопротивления материалов, теории упругости и требует практически всего объема знаний в области высшей математики, предусмотренного программами для авиационных институтов. Положения и методы, изучаемые строительной механикой, служат непосредственно основой для курса прочности летательных аппаратов и используются в дальнейшем в курсах проектирования летательных аппаратов различного назначения.

Глава 1 учебника написана А. Н. Елпатьевским (за исключением разд. 1.6.5—1.6.8) и К. А. Жековым, гл. 2 — Ю. С. Матюшевым, гл. 3 и 9 — Л. А. Булычевым (разд. 3.1, 3.2, 9.4, 9.5, 9.6) и К. А. Жековым (разд. 3.3, 3.4, 9.1, 9.2, 9.3), гл. 4 — В. В. Васильевым (разд. 4.1, 4.2, 4.3, 4.6) и Ф. Н. Шклярчуком (разд. 4.4, 4.5, 4.7), гл. 5 — Б. А. Коноваловым, гл. 6 и 8 — И. Ф. Образцовым, гл. 7 — Ю. И. Ивановым, гл. 10 — Ф. Н. Шклярчуком, гл. 11 и 12 — В. В. Васильевым.

ГЛАВА 1

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

1.1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Задача теории упругости заключается в определении напряженного и деформированного состояний, возникающих в сплошном упругом теле, находящемся при внешнем силовом и температурном воздействиях. Принципиально полное построение решения такой задачи дается в курсах теории упругости, подлежащих предварительному изучению.

В настоящем разделе приводятся основные соотношения, необходимые для построения и обоснования энергетических и других прикладных методов решения задач строительной механики, которые будут широко использоваться в дальнейшем. Более подробный вывод основных соотношений теории упругости представлен в работе [16].

1.1.1. Теория деформаций

Обозначим компоненты смещения произвольной точки тела с декартовыми координатами x, y, z через u, v, w . Тогда перемещение R по произвольному направлению ρ , определенному направляющими косинусами l, m, n ($l = \cos \widehat{x, \rho}$, $m = \cos \widehat{y, \rho}$, $n = \cos \widehat{z, \rho}$), будет

$$R = ul + vm + wn, \quad (1.1)$$

а малые относительные деформации такие, что их величину допустимо считать пренебрежимой по сравнению с единицей. Линейная деформация ϵ_ρ и угловая $\gamma_{\rho_1 \rho_2}$ между двумя взаимно ортогональными направлениями ρ_1 и ρ_2 (см. рис. 1.1) определяются формулами

$$\epsilon_\rho = \frac{\partial R}{\partial \rho}, \quad \gamma_{\rho_1 \rho_2} = \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1}. \quad (1.2)$$

При совмещении направлений ρ, ρ_1, ρ_2 с координатами x, y, z из формул (1.2) следует геометрические соотношения Коши

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Рассматривая (1.2) как производные сложных функций

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho}$$

и используя формулы Коши (1.3), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{xz} ln + \gamma_{yz} mn, \\ \gamma_{\rho_1 \rho_2} &= 2(\varepsilon_x l_1 l_2 + \varepsilon_y m_1 m_2 + \varepsilon_z n_1 n_2) + \\ &+ \gamma_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \gamma_{xz}(l_1 n_2 + l_2 n_1) + \gamma_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Формулы (1.4), с одной стороны, преобразуют компоненты деформаций к деформациям в новых осях, а, с другой, показывают, что шесть компонент деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ полностью определяют деформацию тела в точке в любой ортогональной системе координат ρ, ρ_1, ρ_2 .

Соотношение Коши (1.3) определяют шесть компонент деформаций через частные производные от трех функций u, v, w . Отсюда следует, что сами деформации как функции координат не являются независимыми и должны быть связаны между собой некоторыми соотношениями, которые называются уравнениями совместности деформаций.

Эти уравнения могут быть получены из (1.3) в результате исключения перемещений u, v, w , они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Их справедливость может быть проверена подстановкой выражений для деформаций из (1.3), в результате которой они обращаются в тождества.

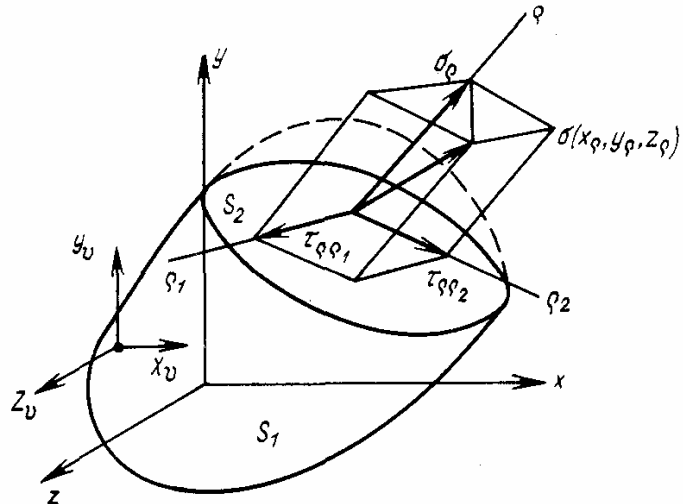
1.1.2. Теория напряжений

Интенсивность усилий, возникающих на выделенной внутри тела произвольной площадке, представляется в виде трех компонент напряжений — нормального σ_ρ и двух касательных $\tau_{\rho\rho_1}, \tau_{\rho\rho_2}$, действующих во взаимоортогональных направлениях (рис. 1.1). Определяя направление ρ_i направляющими косинусами $l_i = \cos(\widehat{\rho_i, x}), m_i = \cos(\widehat{\rho_i, y}), n_i = \cos(\widehat{\rho_i, z})$, можно выра-

Рис. 1.1. Напряжения на произвольной площадке

зять компоненты напряжений σ_p , τ_{pp_1} , τ_{pp_2} через проекции суммарного напряжения σ на оси x , y , z , т. е.

$$\begin{aligned}\sigma_p &= X_p l + Y_p m + Z_p n, \\ \tau_{pp_1} &= X_p l_1 + Y_p m_1 + Z_p n_1, \\ \tau_{pp_2} &= X_p l_2 + Y_p m_2 + Z_p n_2.\end{aligned}\quad (1.6)$$



Основными законами, связывающими компоненты напряжений, являются уравнения равновесия. Для получения их выделим из тела элементарный тетраэдр (рис. 1.2) и рассмотрим его равновесие. Составляя суммы проекции всех сил, действующих по граням тетраэдра на три оси, получим

$$\begin{aligned}X_p &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ Y_p &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ Z_p &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n.\end{aligned}\quad (1.7)$$

Здесь l , m , n — направляющие косинусы нормали к наклонной площадке.

Суммы моментов всех сил относительно трех осей дают закон парности касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, в силу которого порядок индексов у касательных напряжений становится безразличным. Располагая элементарный тетраэдр у поверхности тела, чтобы косая грань совместилась с элементом поверхности тела, и в силу этого считая, что компоненты X_p , Y_p , Z_p определяют поверхностную нагрузку ($X_p = X_v$, $Y_p = Y_v$, $Z_p = Z_v$, v — нормаль к поверхности), из (1.7) получим три алгебраических соотношения

$$\begin{aligned}X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ Y_v &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ Z_v &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n,\end{aligned}\quad (1.8)$$

которые называются условиями на поверхности и являются статическими граничными условиями.

Рассмотрим равновесие некоторой произвольной части тела

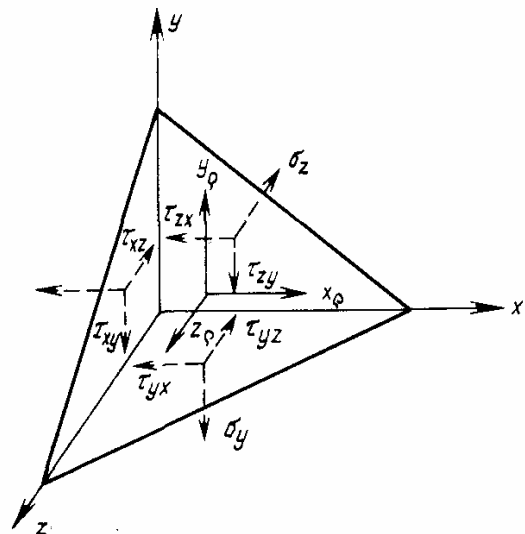


Рис. 1.2. Напряженное состояние элементарного тетраэдра

(см. рис. 1.1). Пусть объем этой части v и силы, действующие на каждую единицу объема, заданы компонентами X, Y, Z , внешняя поверхность этой части S_1 и поверхностные силы на ней — X_v, Y_v, Z_v . Поверхность, которой отсекается произвольная часть тела, обозначим через S_2 и силы, действующие на нее, через X_p, Y_p, Z_p . Составляя суммы проекций всех сил, действующих на рассматриваемую произвольную часть тела, получим

$$\int_{S_2} X_p ds + \int_{S_1} X_v ds + \int_v X dv = 0,$$

$$\int_{S_2} Y_p ds + \int_{S_1} Y_v ds + \int_v Y dv = 0,$$

$$\int_{S_2} Z_p ds + \int_{S_1} Z_v ds + \int_v Z dv = 0.$$

Перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$\int_{S_2+S_1} X_p ds + \int_{S_1} (X_v - X_p) ds + \int_v X dv = 0,$$

$$\int_{S_2+S_1} Y_p ds + \int_{S_1} (Y_v - Y_p) ds + \int_v Y dv = 0,$$

$$\int_{S_2+S_1} Z_p ds + \int_{S_1} (Z_v - Z_p) ds + \int_v Z dv = 0.$$

Первые интегралы в этих равенствах берутся по полной поверхности рассматриваемой части тела и на основании формулы Грина могут быть преобразованы в объемные. Внося в эти равенства X_p, Y_p, Z_p из (1.7) и используя формулу Грина, получим

$$\int_{S_1} (X_v - \sigma_x l - \tau_{xy} m - \tau_{xz} n) ds + \int_v \left(\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) dv = 0,$$

$$\int_{S_1} (Y_v - \tau_{xy} l - \sigma_y m - \tau_{yz} n) ds + \int_v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) dv = 0,$$

$$\int_{S_1} (Z_v - \tau_{xz} l - \tau_{yz} m - \sigma_z n) ds + \int_v \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) dv = 0.$$

Полученные равенства должны тождественно выполняться для любого объема v , выделенного из тела и при любой внешней поверхности S_1 , а это возможно лишь при тождественном равенстве

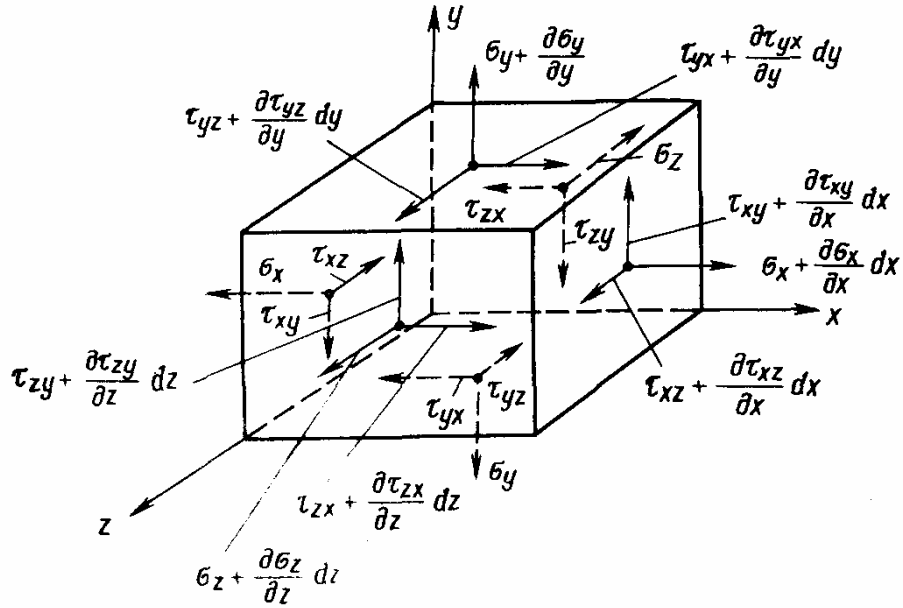


Рис. 1.3. Напряжения, действующие по граням элементарного параллелепипеда

нулю подынтегральных выражений, что дает три условия на поверхности (1.8) и три дифференциальных уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравнения равновесия (1.9) могут быть получены и непосредственно как условия равновесия бесконечно малого элемента, выделенного из тела и показанного на рис. 1.3.

В заключение запишем формулы, определяющие напряжения в произвольной ортогональной системе координат. Подставляя x_p, y_p, z_p из равенств (1.7) в (1.6), получим

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{yz} mn, \\ \tau_{pp_1} &= \sigma_x ll_1 + \sigma_y mm_1 + \sigma_z nn_1 + \tau_{xy} (l_1 m + lm_1) + \\ &\quad + \tau_{xz} (l_1 n + ln_1) + \tau_{yz} (m_1 n + mn_1), \\ \tau_{pp_2} &= \sigma_x ll_2 + \sigma_y mm_2 + \sigma_z nn_2 + \tau_{xy} (l_2 m + lm_2) + \\ &\quad + \tau_{xz} (l_2 n + ln_2) + \tau_{yz} (m_2 n + mn_2). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Формулы (1.10) показывают, что напряженное состояние в произвольной точке тела полностью определяется шестью компонентами напряжений (с учетом парности касательных напряжений), действующих на трех взаимно перпендикулярных площадках.

1.1.3. Физические соотношения

Физические зависимости в линейной теории упругости для изотропного тела вводятся уравнениями обобщенного закона Гука, имеющими вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)],\end{aligned}\tag{1.11}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

или в обратной форме

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\theta, \quad \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta, \quad \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta, \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Здесь $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ — объемная деформация.

В формулах (1.11), (1.12) E и G — модуль упругости и модуль сдвига; μ , λ — коэффициенты Пуассона и Ламе, между которыми имеются следующие зависимости:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad \lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}.$$

При температурном воздействии уравнения закона Гука преобразуются на основании гипотез Франца Неймана, постулирующих, что полные линейные деформации ε_x , ε_y , ε_z связаны с перемещениями формулами Коши (1.3), а упругие деформации связаны с напряжениями уравнениями обобщенного закона Гука (1.11). Под полными деформациями понимаются сумма упругих ε_x^y , ε_y^y , ε_z^y и чисто температурных деформаций αt , т. е.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^y + \alpha t, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^y + \alpha t, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^y + \alpha t.$$

Тогда, внося значения упругих деформаций в соответствии с (1.11) получим уравнения закона Гука при температурном воздействии

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha t, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha t, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha t,\end{aligned}\tag{1.13}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

или в форме, разрешенной относительно напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\epsilon_x + \lambda\theta - (2G + 3\lambda)\alpha t, \\ \sigma_y &= 2G\epsilon_y + \lambda\theta - (2G + 3\lambda)\alpha t, \\ \sigma_z &= 2G\epsilon_z + \lambda\theta - (2G + 3\lambda)\alpha t, \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Физический закон для анизотропных материалов и, в частности, для композиционных материалов излагается в гл. 12.

Таким образом, полная система уравнений теории упругости включает 15 уравнений: три уравнения равновесия (1.9), шесть геометрических соотношений Коши (1.3) или вытекающих из них уравнений совместимости деформаций (1.5) и шесть соотношений закона Гука в форме (1.13) или (1.14). Эта система включает 15 неизвестных: шесть напряжений, шесть относительных деформаций и три перемещения, т. е. является полной. Решение основной системы должно удовлетворять граничным условиям на поверхности тела — статическим в форме (1.8) или геометрическим, которые формулируются через перемещения.

1.1.4. Методы решения задач в перемещениях и в напряжениях

В теории упругости используются две классические формы записи разрешающих уравнений, к которым сводится полученная выше полная система 15 уравнений.

Решение задачи в перемещениях предусматривает введение в качестве неизвестных, определяемых, в первую очередь, трех функций перемещений $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$. Выражая в законе Гука (1.14) деформации через перемещения с помощью геометрических соотношений (1.3) и подставляя полученные выражения для напряжений в уравнение равновесия (1.9), получим три уравнения равновесия в перемещениях (уравнения Ламе)

$$\begin{aligned}G \nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} - (2G + 3\lambda) \alpha \frac{\partial t}{\partial x} + X &= 0, \\ G \nabla^2 v + (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} - (2G + 3\lambda) \alpha \frac{\partial t}{\partial y} + Y &= 0, \\ G \nabla^2 w + (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} - (2G + 3\lambda) \alpha \frac{\partial t}{\partial z} + Z &= 0,\end{aligned}\tag{1.15}$$

$$\text{где } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Решение уравнений (1.15) должно удовлетворять граничным условиям. Геометрические граничные условия накладываются непосредственно на перемещения, а статические условия (1.8) записываются через перемещения с помощью равенств (1.14) и (1.3). По найденным перемещениям могут быть далее определены

деформации (1.3) и напряжения (1.14), т. е. получено полное решение задачи.

Второй метод решения задачи в напряжениях предусматривает введение в качестве основных неизвестных шести компонент напряжений, которые должны удовлетворять трем уравнениям равновесия (1.9). Поскольку три уравнения с шестью неизвестными могут иметь множество решений, существует множество систем напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия. Такие системы напряжений называются равновесными. Для того чтобы выделить из статически возможных систем истинную систему напряжений, будем рассуждать следующим образом. Пусть имеется некоторая равновесная система напряжений. Тогда деформация однозначно определяется из закона Гука (1.13) и для завершения решения необходимо найти перемещения. Однако при этом надо проинтегрировать шесть геометрических уравнений (1.3), включающих три неизвестных перемещения, т. е. систему в общем случае несовместную. Для того чтобы система (1.3) была совместной, необходимо, чтобы деформации были связаны некоторыми соотношениями, которые и были получены выше в форме (1.15). Таким образом, истинные напряжения отличаются от всех равновесных тем, что вызываемые ими деформации удовлетворяют уравнениям совместности деформаций (1.5). Эти уравнения с помощью закона Гука (1.13) могут быть записаны через напряжения. В результате преобразования с помощью уравнений равновесия (1.9), в которых отсутствуют объемные силы, они могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \alpha E \left(\frac{1}{1-\mu} \nabla^2 t + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right) &= 0, \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \alpha E \left(\frac{1}{1-\mu} \nabla^2 t + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) &= 0, \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \alpha E \left(\frac{1}{1-\mu} \nabla^2 t + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} + \frac{\alpha E}{1+\mu} \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} + \frac{\alpha E}{1+\mu} \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial z} &= 0, \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} + \frac{\alpha E}{1+\mu} \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

Таким образом, основная система уравнений для решения задачи в напряжениях включает уравнения равновесия (1.9) (при $X = Y = Z = 0$) и уравнения совместности деформаций (1.16). Отметим, что полученная система включает девять уравнений, содержащих шесть неизвестных функций напряжений. Из вывода уравнений совместности (1.5) или (1.16) следует, что всегда существует три дополнительные функции, которые позволяют

тождественно удовлетворять эти уравнения. Такими функциями являются, например, перемещения u , v и w . Действительно, подставляя в (1.5) функции деформации, выраженные с помощью (1.3) через три произвольные функции u , v , w , можно убедиться в том, что уравнения (1.5), а следовательно, и (1.16) тождественно удовлетворяются при любых функциях u , v и w .

По найденным в результате решения системы (1.9), (1.16) напряжениям с помощью закона Гука (1.13) определяются деформации, а затем из системы (1.3) (которая в силу того, что условия ее интегрируемости удовлетворены, является совместной) находятся перемещения. Построенное решение подчиняется граничным условиям — статическим в форме (1.8) или геометрическим, которые накладываются на найденные перемещения.

1.2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается непрерывное упругое тело, находящееся под внешним силовым и температурным воздействием. В силу того, что в теле при этом возникают напряжения и деформации, в нем накапливается потенциальная энергия деформации, измеряемая работой упругих сил P .

Для определения работы упругих сил рассмотрим ее приращение в функции от приращения перемещений δu , δv , δw . Тогда, рассматривая тело как совокупность бесконечно малых параллелепипедов, заполняющих внутренний объем, и бесконечно малых тетраэдров, определяющих пограничную зону, прилегающую к поверхности, подсчитываем работу, совершаемую в каждой элементарной его части.

Выделяя из тела бесконечно малый параллелепипед со сторонами dx , dy , dz и заменяя влияние отброшенных частей напряжениями, получим на его внешних гранях интенсивность сил, представленную на рис. 1.3. Кроме того, будем считать, что на каждую единицу объема действуют объемные силы, заданные компонентами X , Y , Z . Зададим приращения перемещений δu , δv , δw , непрерывно меняющиеся от точки к точке. Подсчитаем сначала работу сил, действующих в направлении оси x . Ограничиваясь лишь малыми третьего порядка, получим результаты, представленные в табл. 1.1.

Суммируя работу всех сил, представленных в таблице, найдем

$$\delta P'_x = \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) \delta u + \right. \\ \left. + \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial \delta u}{\partial z} \right] dx dy dz.$$

Таблица 1.1

Составляющие работы сил, параллельных оси x

Величина усилия	Перемещение	Работа
$X dx dy dz$	δu	$X \delta u dx dy dz$
$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz$	$\delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx$	$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \times$ $\times \left(\delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx \right) dy dz$
$-\sigma_x dy dz$	δu	$-\sigma_x \delta u dy dz$
$\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz$	$\delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial y} dy$	$\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \times$ $\times \left(\delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial y} dy \right) dx dz$
$-\tau_{yx} dx dz$	δu	$-\tau_{yx} \delta u dx dz$
$\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy$	$\delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial z} dz$	$\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) \times$ $\times \left(\delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial z} dz \right) dx dy$
$-\tau_{zx} dx dy$	δu	$-\tau_{zx} \delta u dx dy$

Аналогичным образом подсчитывая работу всех сил, действующих вдоль осей y и z , получим

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi'_y &= \left[\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y \right) \delta v + \right. \\
 &\quad \left. + \tau_{xy} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial \delta v}{\partial z} \right] dx dy dz, \\
 \delta \Pi'_z &= \left[\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta w + \right. \\
 &\quad \left. + \tau_{xz} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial \delta w}{\partial z} \right] dx dy dz.
 \end{aligned}$$

Таким же образом подсчитываем работу сил, действующих на тетраэдр (см. рис. 1.2), в котором наклонная грань предполагается совпадающей с внешней поверхностью, и в силу этого

действующая на ней нагрузка определяется поверхностными силами $X_p = X_v$, $Y_p = Y_v$, $Z_p = Z_v$. В результате найдем

$$\begin{aligned}\delta\Pi'_x &= (X_v - \sigma_x l - \tau_{yx}m - \tau_{zx}n) \delta u \, ds, \\ \delta\Pi'_y &= (Y_v - \tau_{xy}l - \sigma_y m - \tau_{zy}n) \delta v \, ds, \\ \delta\Pi'_z &= (Z_v - \tau_{xz}l - \tau_{yz}m - \sigma_z n) \delta w \, ds.\end{aligned}$$

Приращение работы упругих сил, собранное со всей совокупности параллелепипедов и тетраэдров, выразится теперь так:

$$\delta\Pi = \iiint (\delta\Pi'_x + \delta\Pi'_y + \delta\Pi'_z) \, dx \, dy \, dz + \iint (\delta\Pi'_x + \delta\Pi'_y + \delta\Pi'_z) \, ds.$$

Подставляя сюда найденные выше приращения элементарных работ, получим

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \iiint \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \delta u + \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \delta v + \\ &\quad + \left. \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta w \right] \, dx \, dy \, dz + \\ &+ \iint [(X_v - \sigma_x l - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n) \delta u + (Y_v - \tau_{xy}l - \sigma_y m - \tau_{yz}n) \delta v + \\ &\quad + (Z_v - \tau_{xz}l - \tau_{yz}m - \sigma_z n) \delta w] \, ds + \\ &+ \iiint \left[\sigma_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \delta \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \delta \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xz} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad + \tau_{xy} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left. \right] \, dx \, dy \, dz.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Для тела, находящегося в состоянии равновесия, два первых интеграла в (1.17) в силу уравнений равновесия (1.9) и (1.8) обращаются в нуль. Заменяя далее производные от приращений перемещений через приращения деформаций с помощью соотношений Коши (1.3), окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \iiint (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \\ &\quad + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) \, dx \, dy \, dz.\end{aligned}\tag{1.18}$$

В задачах строительной механики вводится гипотеза о существовании потенциала упругих сил, заключающаяся в том, что работа упругих сил Π полностью переходит в потенциальную энергию U , накапливаемую телом при деформации, т. е. $\delta\Pi = \delta U$. Если ввести понятие удельной потенциальной энергии W , как энергии, отнесенной к единице объема, то

$$U = \iiint W \, dx \, dy \, dz\tag{1.19}$$

и в соответствии с (1.19) и (1.18)

$$\delta W = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \dots + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}. \quad (1.20)$$

С другой стороны, в силу существования потенциала упругих сил потенциальная энергия есть функция только деформаций и, следовательно, ее приращение равно

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \dots + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz}. \quad (1.21)$$

Сравнение (1.21) с (1.20) приводит к формулам Грина

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}; & \sigma_y &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}; & \sigma_z &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z}; \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}; & \tau_{xz} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xz}}; & \tau_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}, \end{aligned}$$

являющимся аналитическим выражением гипотезы о существовании потенциала упругих сил.

Следует сделать оговорку о том, что введенное понятие упругого потенциала в рамках термоупругой задачи закономерно лишь при определенном ограниченном уровне температуры, при котором в потенциальной энергии можно пренебречь чисто температурными членами в силу их малости. Кроме того, в дальнейших выкладках рассматриваются лишь такие температурные задачи, когда температура не зависит от деформации, а модули упругости — от температуры. При сделанном замечании удельная потенциальная энергия будет определяться интегрированием выражения (1.20), т. е.

$$W = \int_{\alpha t}^{\varepsilon, \gamma} \delta W.$$

Внося сюда (1.20), подставляя напряжения из (1.14) и производя интегрирование, получим выражение для удельной потенциальной энергии, записанное через деформации

$$\begin{aligned} W &= G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{\lambda}{2} \theta^2 + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) - \\ &- (2G + 3\lambda) \alpha t \theta + \frac{3}{2} (2G + 3\lambda) (\alpha t)^2. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Используя закон Гука (1.13), из (1.22) можно получить удельную потенциальную энергию, записанную в смешанной форме

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) - \\ &- \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \alpha t. \end{aligned} \quad (1.23)$$

1.3. ВАРИАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Согласно изложенному выше в разд. 1.1 истинные напряжения, деформации и перемещения, реализующиеся в упругой системе, удовлетворяют полной системе уравнений теории упругости, содержащей статические, геометрические и физические соотношения. Введенное в разд. 1.2 понятие потенциальной энергии упругой системы позволяет дополнительно сформулировать некоторые энергетические свойства истинного напряженно-деформированного состояния, реализация которых эквивалентна удовлетворению отдельных групп основной системы уравнений. Эти энергетические свойства устанавливаются вариационными принципами, которые широко используются в строительной механике.

1.3.1. Полная энергия упругой системы

Для построения вариационных принципов потребуется понятие полной энергии $\mathcal{E}$, которую формально введем как разность между потенциальной энергией и работой внешних сил

$$\mathcal{E} = U - A. \quad (1.24)$$

В (1.24) U — потенциальная энергия деформации и A — работа внешних сил, определяемая формулой

$$A = \iint (X_v u + Y_v v + Z_v w) ds + \iiint (Xu + Yv + Zw) dx dy dz. \quad (1.25)$$

Здесь X_v , Y_v , Z_v — компоненты поверхностной нагрузки, а X , Y , Z — компоненты объемной нагрузки, интегрирование осуществляется соответственно по поверхности тела S и объему v .

Преобразуем выражение (1.25). Для этого введем некоторую произвольную систему напряжений $\bar{\sigma}_x, \dots, \bar{\tau}_{yz}$ и систему перемещений $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ (не обязательно соответствующую напряжениям $\bar{\sigma}_x, \dots, \bar{\tau}_{yz}$) и рассмотрим следующий поверхностный интеграл:

$$J = \iint [(\bar{\sigma}_x l + \bar{\tau}_{xy} m + \bar{\tau}_{xz} n) \bar{u} + (\bar{\tau}_{xy} l + \bar{\sigma}_y m + \bar{\tau}_{yz} n) \bar{v} + (\bar{\tau}_{xz} l + \bar{\tau}_{yz} m + \bar{\sigma}_z n) \bar{w}] ds.$$

Преобразуем поверхностный интеграл J в объемный J_1 на основании формулы Остроградского

$$\begin{aligned} J = J_1 = & \iiint \left[\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} \right) \bar{u} + \right. \\ & + \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial z} \right) \bar{v} + \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \right) \bar{w} \Big] dx dy dz + \\ & + \iiint \left[\bar{\sigma}_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\sigma}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{\sigma}_z \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \bar{\tau}_{xy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \right. \\ & + \bar{\tau}_{xz} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \bar{\tau}_{yz} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \Big] dx dy dz \end{aligned}$$

и, кроме того, введем в рассмотрение объемный интеграл J_2 , включающий произвольную систему малых деформаций $\bar{e}_x \dots \bar{v}_{yz}$, не связанную ни с компонентами перемещений, ни с компонентами напряжений

$$J_2 = \iiint (\bar{\sigma}_x \bar{e}_x + \bar{\sigma}_y \bar{e}_y + \bar{\sigma}_z \bar{e}_z + \bar{\tau}_{xy} \bar{v}_{xy} + \bar{\tau}_{xz} \bar{v}_{xz} + \bar{\tau}_{yz} \bar{v}_{yz}) dx dy dz.$$

Очевидно, выражение работы внешних сил (1.25) не изменится, если к нему прибавить и вычесть одни и те же величины. Пользуясь этим, напомним

$$A = A - J + J_1 - J_2 + J_2.$$

Внося сюда выражения для соответствующих интегралов, получим

$$\begin{aligned} A = & \iiint \left[\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} + X \right) \bar{u} + \right. \\ & + \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial z} + Y \right) \bar{v} + \\ & + \left. \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + Z \right) \bar{w} \right] dx dy dz + \\ & + \iint [(X_v - \bar{\sigma}_x l - \bar{\tau}_{xy} m - \bar{\tau}_{xz} n) \bar{u} + (Y_v - \bar{\tau}_{xy} l - \bar{\sigma}_y m - \bar{\tau}_{yz} n) \bar{v} + \\ & + (Z_v - \bar{\tau}_{xz} l - \bar{\tau}_{yz} m - \bar{\sigma}_z n) \bar{w}] ds + \\ & + \iiint \left[\bar{\sigma}_x \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{e}_x \right) + \bar{\sigma}_y \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \bar{e}_y \right) + \bar{\sigma}_z \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \bar{e}_z \right) + \right. \\ & + \bar{\tau}_{xy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \bar{v}_{xy} \right) + \bar{\tau}_{xz} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \bar{v}_{xz} \right) + \\ & + \bar{\tau}_{yz} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \bar{v}_{yz} \right) \left. \right] dx dy dz + \\ & + \iiint (\bar{\sigma}_x \bar{e}_x + \bar{\sigma}_y \bar{e}_y + \bar{\sigma}_z \bar{e}_z + \bar{\tau}_{xy} \bar{v}_{xy} + \bar{\tau}_{xz} \bar{v}_{xz} + \bar{\tau}_{yz} \bar{v}_{yz}) dx dy dz. \quad (1.26) \end{aligned}$$

Отметим, еще раз, что входящие в выражение (1.26) компоненты перемещений, деформаций и напряжений совершенно произвольны и не соответствуют действительно возникающим в теле деформированному и напряженному состоянию при нагружении.

1.3.2. Вариационный принцип Лагранжа

Рассматриваемый далее вариационный принцип Лагранжа позволяет сформулировать энергетический признак, выделяющий истинную систему перемещений, возникающую в теле. Вариационный принцип Лагранжа сформулирован так: *из всех кинематически возможных систем перемещений в действительности в упругой системе реализуются лишь те, которые сообщают*

минимум полной энергии. Под кинематически возможными здесь понимаются перемещения, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям на поверхности тела и связанные с относительными деформациями соотношениями Коши (1.3).

Таким образом, согласно принципу Лагранжа полная энергия тела, в котором имеет место действительное поле перемещений, должна быть минимальной. При этом деформируемая система должна быть консервативной, т. е. приращение потенциальной энергии должно являться полным дифференциалом от приращения деформаций, а внешние силы не зависеть от перемещений. Поскольку полная энергия $\mathcal{E} = U - A$ выражается через интегралы (1.19) и (1.25), она является функционалом и согласно вариационному исчислению реализация принципа Лагранжа сводится к задаче минимизации функционала. Сначала докажем правомочность сформулированной вариационной задачи.

Экстремальное значение функционала реализуется обращением в нуль главной линейной части приращения функционала — первой вариации

$$\delta \mathcal{E} = 0, \quad (1.27)$$

причем, если вторая вариация меньше нуля, то имеет место минимум. Можно показать, что в рассматриваемых задачах реализуется именно минимум.

Записывая уравнение (1.27) с помощью (1.24), получим

$$\delta \mathcal{E} = \delta U - \delta A = 0. \quad (1.28)$$

Входящая сюда вариация потенциальной энергии деформации δU определяется равенствами (1.19), (1.20). Для записи вариации работы внешних сил δA воспользуемся соотношением (1.26). При этом в силу того, что перемещения должны быть кинематически возможными, удовлетворяются соотношения Коши (1.3) и третий интеграл в (1.26) исчезает. Кроме того, положим $\bar{u} = \delta u$, $\bar{v} = \delta v$, $\bar{w} = \delta w$ и соответственно $\bar{\epsilon}_x = \delta \epsilon_x \dots \bar{\gamma}_{yz} = \delta \gamma_{yz}$. Тогда равенство (1.28) примет вид

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = & \iiint [\sigma_x \delta \epsilon_x + \dots \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}] dx dy dz - \\ & - \iiint \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \delta u + \right. \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \delta v + \\ & + \left. \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta w \right] dx dy dz - \\ & - \iiint [(X_v - \sigma_x l - \tau_{xy} m - \tau_{xz} n) \delta u + \\ & + (Y_v - \tau_{xy} l - \sigma_y m - \tau_{yz} n) \delta v + (Z_v - \tau_{xz} l - \tau_{yz} m - \sigma_z n) \delta w] ds - \\ & - \iiint [\sigma_x \delta \epsilon_x + \dots \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}] dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

Сокращая первый и последний интегралы, окончательно получим

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = & \iiint \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \delta u + \right. \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \delta v + \\ & + \left. \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta w \right] dx dy dz + \\ & + \iint [(X_v - \sigma_x l - \tau_{xy} m - \tau_{xz} n) \delta u + (Y_v - \tau_{xy} l - \sigma_y m - \tau_{yz} n) \delta v + \\ & + (Z_v - \tau_{xz} l - \tau_{yz} m - \sigma_z n) \delta w] ds = 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Поскольку вариации δu , δv , δw произвольны и взаимно независимы, из (1.29) вытекают уравнения равновесия (1.9) и статические граничные условия (1.8). Таким образом, если выполнены соотношения Коши и геометрические граничные условия, то из принципа Лагранжа следуют недостающие уравнения равновесия и статические граничные условия, что и доказывает справедливость принципа.

Для реализации вариационного принципа Лагранжа необходимо записать условия минимума полной энергии $\mathcal{E}$, выраженной через перемещения. Подставляя в равенство (1.24) U согласно (1.19), где W имеет форму (1.22), в которой функции деформации выражены через перемещения с помощью соотношений Коши (1.3) и работу внешних сил A согласно (1.25), окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \iiint_V \left\{ G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{G}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \\ & - (2G + 3\lambda) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \alpha t + \frac{3}{2} (2G + 3\lambda) (\alpha t)^2 \Big\} dx dy dz - \\ & - \iint_S (X_v u + Y_v v + Z_v w) ds - \iiint_V (Xu + Yv + Zw) dx dy dz. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Минимизируя функционал (1.30) методами вариационного исчисления, можно получить три уравнения относительно функций u , v , w и естественные граничные условия, которые совпадают соответственно с уравнениями равновесия в перемещениях (1.15) и статическими граничными условиями (1.8), записанными через перемещения. Таким образом, принцип Лагранжа является вариационным аналогом метода решения в перемещениях, который был описан в разд. 1.1.

Равенству (1.29) можно придать и другую трактовку, если считать δu , δv и δw малыми возможными перемещениями тела в состо-

янии равновесия. В этом случае (1.29) описывает принцип возможных перемещений, согласно которому в состоянии равновесия сумма работ всех внешних и внутренних сил должна быть равна нулю. При этом требование консервативности системы отпадает.

1.3.3. Пример — задача об изгибе балки

Для иллюстрации принципа Лагранжа рассмотрим задачу об изгибе балки, показанной на рис. 1.4. В этом случае отличны от нуля перемещения $u(x, y)$, $v(x, y)$, а интегралы в (1.30) берутся по длине балки и сечению с площадью F . Полагая $t = 0$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int_0^l dx \int_F \left\{ G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{G}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dF - \int_0^l q u dx. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Введем закон плоских сечений, согласно которому сечение $x = \text{const}$ не деформируется вдоль оси y и остается плоским и нормальным к нейтральной оси $y = 0$. Отсюда следует, что

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$v = v(x), \quad u = -v'y + u_0(x). \quad (1.32)$$

Пренебрегая эффектом Пуассона, который не учитывается в энергии изгиба балок ($\mu = 0$), и подставляя перемещение (1.32) в функционал (1.31), будем иметь

$$\mathcal{E} = \int_0^l \left[\frac{EI}{2} (v'')^2 + \frac{EF}{2} (u_0')^2 - qv \right] dx, \quad (1.33)$$

где, например, $v' = dv/dx$, I — центральный момент инерции сечения. Выражение (1.33) представляет собой функционал, который символически записывается в следующем виде:

$$\mathcal{E} = \int_0^l \Phi(x, v, v'', u_0') dx.$$

Здесь Φ подынтегральное выражение в (1.33).

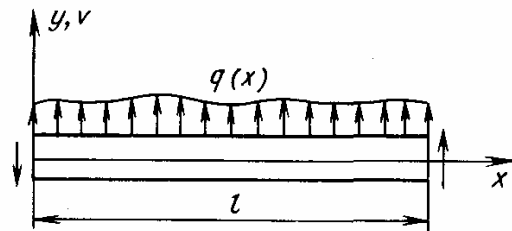


Рис. 1.4. Балка в условиях поперечного изгиба

Согласно принципу Лагранжа и вариационного исчисления имеем

$$\delta \mathcal{E} = \int_0^l \left[\frac{\partial \Phi}{\partial v} \delta v + \frac{\partial \Phi}{\partial v''} \delta v'' + \frac{\partial \Phi}{\partial u'_0} \delta u'_0 \right] dx = 0. \quad (1.34)$$

Интегрируя по частям дважды второе слагаемое под знаком интеграла и один раз третье, получим

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = & \int_0^l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \Phi}{\partial v''} \right) \delta v dx + \frac{\partial \Phi}{\partial v''} \delta v' \bigg|_0^l - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial v''} \delta v \bigg|_0^l - \\ & - \int_0^l \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial u'_0} \delta u dx + \frac{\partial \Phi}{\partial u'_0} \delta u_0 \bigg|_0^l = 0. \end{aligned}$$

Полученное выражение будет тождественно равно нулю при произвольных вариациях перемещений δv и δu_0 лишь тогда, когда подынтегральные выражения и внеинтегральные члены будут равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \Phi}{\partial v''} &= 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v''} \delta v' \bigg|_0^l = 0; \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial v''} \delta v \bigg|_0^l &= 0; \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial u'_0} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u'_0} \delta u_0 \bigg|_0^l = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Полученные уравнения являются уравнениями Эйлера — Лагранжа для рассматриваемого функционала, а внеинтегральные члены — естественными граничными условиями. Для ряда задач уравнения Эйлера — Лагранжа и естественные граничные условия могут быть взяты в готовом виде из курсов вариационного исчисления.

Вычислим входящие в (1.35) производные

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = -q; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v''} = Elv'', \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u'_0} = EFu'_0. \quad (1.36)$$

Внося (1.36) в (1.35), получим

$$\begin{aligned} (Elv'')'' &= q, \quad Elv'' \delta v' \bigg|_0^l = 0, \quad Elv'' \delta v \bigg|_0^l = 0, \\ (EFu'_0)' &= 0, \quad EFu'_0 \delta u_0 \bigg|_0^l = 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Для истолкования соотношений (1.37) напомним, что согласно сопротивлению материалов в сечении балки действуют изгибающий момент M , перерезывающая сила Q и осевая сила N , которые определяются формулами

$$M = -Elv'', \quad Q = -Elv''', \quad N = EFu'_0. \quad (1.38)$$

С учетом (1.38) соотношения (1.37) принимают вид

$$M'' + q = 0, \quad N' = 0, \quad (1.39)$$

$$M \delta v' \bigg|_0^l = 0, \quad Q \delta v \bigg|_0^l = 0, \quad N \delta u_0 \bigg|_0^l = 0. \quad (1.40)$$

Уравнения (1.39) являются уравнениями равновесия: первое — уравнением упругой линии балки, а второе — уравнением растяжения оси. Равенства (1.40) определяют граничные условия. Если перемещения u_0 , v и угол поворота v' на крае балки заданы, то вариации $\delta v' = \delta v = \delta u_0 = 0$ и условия (1.40) удовлетворяются автоматически. На свободном крае кинематические факторы не заданы, их вариации отличны от нуля и согласно (1.40) получим $M = Q = N = 0$, т. е. статические граничные условия. Таким образом, соотношения (1.37) включают уравнения равновесия и статические граничные условия, записанные через перемещения.

1.4. ВАРИАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

В соответствии с изложенным в разд. 1.1 истинное поле напряжений выделяется из статически возможных путем удовлетворения уравнений неразрывности деформаций. Аналогами этих уравнений при энергетической постановке являются вариационные принципы, вводимые на основании понятия дополнительной энергии.

1.4.1. Дополнительная потенциальная энергия

Введем по аналогии с (1.19) понятие дополнительной потенциальной энергии деформации

$$\bar{U} = \iiint_V \bar{W} dx dy dz, \quad (1.41)$$

причем приращение удельной дополнительной энергии $\delta \bar{W}$ будем связывать с приращениями напряжений аналогично (1.20)

$$\begin{aligned} \delta \bar{W} = & \varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} + \\ & + \delta \tau_{xy} + \gamma_{xz} \delta \tau_{xz} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Подставляя функции деформации согласно закону Гука (1.13) и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \bar{W} = & \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z)] + \\ & + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) + \alpha t (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \dots \end{aligned} \quad (1.43)$$

Дифференцирование (1.43) по компонентам напряжений дает формулы Кастильяно

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x \quad \dots \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz}, \quad \dots, \quad (1.44)$$

свидетельствующие о том, что дополнительная удельная потенциальная энергия является потенциалом упругих деформаций.

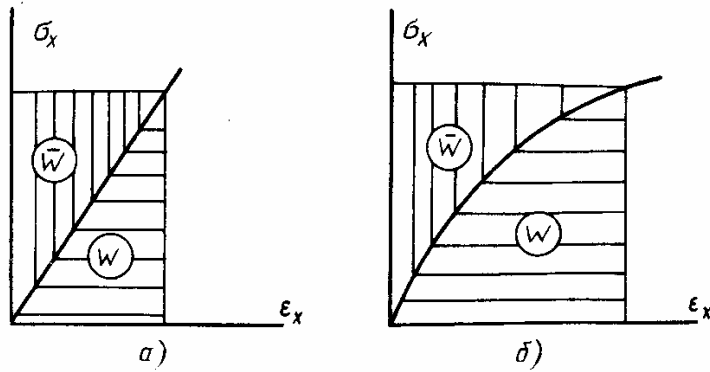


Рис. 1.5. Удельная потенциальная энергия деформации линейно-упругого (а) и нелинейно-упругого (б) тела при одноосном растяжении

Для того чтобы выявить соотношение между удельной потенциальной энергией W , введенной в разд. 1.2, и дополнительной энергией $\bar{W}$,

рассмотрим одноосное растяжение стержня вдоль его оси x при отсутствии температурного воздействия. В этом случае все компоненты напряжений, за исключением σ_x , обращаются в нуль и согласно равенствам (1.20), (1.42) имеем $\delta W = \sigma_x \delta \epsilon_x$, $\delta \bar{W} = \epsilon_x \delta \sigma_x$. Из закона Гука (1.13) имеем $\sigma_x = E \epsilon_x$, т. е.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x \delta \epsilon_x = E \int_0^{\epsilon_x} \epsilon_x \delta \epsilon_x = \frac{E \epsilon_x^2}{2} = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2}, \\ \bar{W} &= \int_0^{\sigma_x} \epsilon_x \delta \sigma_x = \frac{1}{E} \int_0^{\sigma_x} \sigma_x \delta \sigma_x = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Таким образом, при отсутствии температурного воздействия для линейно-упругого тела $W = \bar{W}$. Из геометрического смысла интегралов (1.45) следует, что W и $\bar{W}$ в рассматриваемом случае представляют собой площади треугольников, показанных на рис. 1.5, а. Для нелинейно упругого материала W и $\bar{W}$ не совпадают (рис. 1.5, б).

1.4.2. Вариационный принцип Кастильяно

Введем теперь по аналогии с (1.24) выражение для полной энергии

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{U} - A, \quad (1.46)$$

где $\bar{U}$ определяется равенством (1.41). Основной закон, позволяющий строить решение задачи в напряжениях, сформулирован Кастильяно в виде следующего принципа: *из всех статически возможных систем напряжений в действительности в упругой системе возникают лишь те, которые сообщают стационарное (минимальное) значение полной энергии, записанной через дополнительную потенциальную энергию (1.46)*. Поскольку полная

энергия (1.46) есть функционал, то условием стационарности его является обращение в нуль первой вариации

$$\delta \bar{\mathcal{E}} = 0. \quad (1.47)$$

Напомним, что статически возможными называются системы напряжений, удовлетворяющие уравнениям равновесия (1.9) и условиям на поверхности (1.8). Будем считать также, что напряжения связаны с деформациями законом Гука. Тогда для решения задачи в напряжениях необходимо удовлетворить уравнения совместности деформаций (1.5). Покажем, что эти уравнения вытекают из принципа Кастильяно. Из равенств (1.46) и (1.47) имеем

$$\delta \bar{\mathcal{E}} = \delta \bar{U} - \delta A. \quad (1.48)$$

Внося сюда $\delta \bar{U}$ согласно (1.41), (1.42) и определяя δA , варьируя напряжения в (1.26), получим

$$\begin{aligned} & \iiint \left[u \delta \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) + v \delta \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) + \right. \\ & \quad \left. + w \delta \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \right] dx dy dz + \\ & + \iint [u \delta (X_v - \sigma_x l - \tau_{xy} m - \tau_{xz} n) + v \delta (Y_v - \tau_{xy} l - \sigma_y m - \tau_{yz} n) + \\ & \quad + w \delta (Z_v - \tau_{xz} l - \tau_{yz} m - \sigma_z n)] ds + \iiint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_x \right) \delta \sigma_x + \right. \\ & \quad + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_y \right) \delta \sigma_y + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_z \right) \delta \sigma_z + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma_{xy} \right) \delta \tau_{xy} + \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz} \right) \delta \tau_{xz} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz} \right) \delta \tau_{yz} \right] dx dy dz = 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Отметим, что объемные силы X , Y , Z , входящие в уравнения равновесия (1.9) и в первый интеграл (1.49), являются заданными и, следовательно, их вариации равны нулю. Что касается поверхностных сил X_v , Y_v , Z_v , то статические возможные системы напряжений не обязательно должны сводиться на поверхности тела к заданным нагрузкам и можно ввести их вариации, например $\delta X_v = \delta \sigma_x l + \delta \tau_{xy} m + \delta \tau_{xz} n$. Тогда поверхностный интеграл в (1.49) исчезает. Для того чтобы входящие в (1.49) компоненты напряжений были статически возможными, введем в рассмотре-

ние шесть функций напряжений φ_i , связанных с компонентами напряжений следующими зависимостями:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial y \partial z} - \int X dx, \\
 \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x \partial z} - \int Y dy, \\
 \sigma_z &= \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial x \partial y} - \int Z dz, \\
 \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial z^2}, \\
 \tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial y \partial z}, \\
 \tau_{yz} &= -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial x \partial z}.
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Непосредственной подстановкой (1.50) в первый интеграл (1.49) можно убедиться, что он обращается в нуль благодаря тому, что введенное выражение для напряжений тождественно удовлетворяет уравнения равновесия (1.9).

Таким образом, в (1.49) остается только последний интеграл, который принимает вид

$$\begin{aligned}
 &\iiint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_x \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial y \partial z} \right) + \right. \\
 &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_y \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x \partial z} \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_z \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial x \partial y} \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma_{xy} \right) \delta \left(-\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial z^2} \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz} \right) \delta \left(-\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial y \partial z} \right) + \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz} \right) \delta \left(-\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial x \partial z} \right) \right] dx dy dz = 0.
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Отметим, что при варьировании функций напряжений, заданных формулами (1.50), интегралы, содержащие объемные силы, исчезают, так как последние не варьировются.

Преобразуем (1.51) интегрированием по частям. Например, для первого члена будем иметь

$$\begin{aligned}
 &\iiint \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_x \right) \delta \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} dx dy dz = \\
 &= \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_x \right) \delta \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \delta \varphi_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_x \right) \right]_{y=b}^{y=a} dx dz + \\
 &\quad + \iiint \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_x \right) \delta \varphi_1 dx dy dz.
 \end{aligned}$$

Отметим, что согласно (1.50) функции напряжений выражаются через вторые производные от функций напряжений. Значения их первых производных и самих функций φ_i на границе тела несущественны и могут быть приняты равными нулю. Таким образом, поверхностный интеграл может быть отброшен и равенство (1.51) принимает вид

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \delta \varphi_1 + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \right) \delta \varphi_2 + \right. \\ & + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \right) \delta \varphi_3 + \left(\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \right) \delta \varphi_4 + \\ & + \left(\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \right) \delta \varphi_5 + \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \right) \delta \varphi_6 \right] dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

В силу произвольности вариации функций напряжений отсюда вытекают уравнения совместимости деформаций (1.5). Таким образом доказано, что уравнение (1.48) при удовлетворении уравнений равновесия эквивалентно уравнениям совместимости деформаций, т. е. принцип Кастильяно является энергетическим аналогом метода решения задачи теории упругости в напряжениях.

Для аналитической записи принципа Кастильяно воспользуемся соотношением (1.49). Применяя к первому интегралу формулу Остроградского и учитывая, что $\delta X = \delta Y = \delta Z = 0$, окончательно получим

$$\begin{aligned} & \iiint (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{xz} \delta \tau_{xz} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz}) dx dy dz - \\ & - \iint (u \delta X_n + v \delta Y_n + w \delta Z_n) ds = 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Согласно равенствам (1.41) и (1.42) первый интеграл представляет собой вариацию $\delta \bar{U}$, а второй — работу вариаций поверхностных нагрузок.

1.4.3. Принцип наименьшей работы

На практике обычно используется частная форма записи принципа Кастильяно, называемая принципом наименьшей работы или принципом минимума дополнительной потенциальной энергии. Предположим, что сравниваются не все статически возможные системы напряжений, а те из них, которые сводятся на поверхности тела к заданным нагрузкам X_n, Y_n, Z_n . Тогда $\delta X_n = \delta Y_n = \delta Z_n = 0$ и из (1.52) с учетом (1.41) и (1.42) получим

$$\delta \bar{U} = 0. \quad (1.53)$$

Полученный результат и является принципом наименьшей работы и формулируется следующим образом: *из всех статически воз-*

можных систем напряжений, сводящихся на поверхности тела к заданным нагрузкам, в действительности в упругой системе возникают лишь те, которые сообщают экстремальное (минимальное) значение дополнительной потенциальной энергии.

Для реализации принципа наименьшей работы необходимо записать условие минимума дополнительной потенциальной энергии, выраженной через напряжения. Согласно равенствам (1.41) и (1.43) получим

$$\bar{U} = \iiint \left\{ \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\delta_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) + \alpha t(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right\} dx dy dz. \quad (1.54)$$

Здесь входящие функции напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия и статическим граничным условиям. Минимизация функционала (1.54) методами вариационного исчисления приводит к системе уравнений, которые являются уравнениями совместимости деформаций, записанными через напряжения.

1.4.4. Теорема Кастильяно

Будем рассматривать произвольную деформируемую систему, находящуюся под внешним воздействием, напряженное состояние которой определено и требуется найти смещение некоторой точки k по направлению, заданному направляющими косинусами l_k, m_k, n_k . Для решения задачи приложим в точке k неизвестную силу P_k по направлению искомого перемещения. Тогда, относя рассматриваемую систему к декартовой системе координат x, y, z , запишем составляющие силы P_k , действующие по осям

$$P_x = P_k l_k, \quad P_y = P_k m_k, \quad P_z = P_k n_k. \quad (1.55)$$

Вычисляя работу сил (1.55) на перемещениях u_k, v_k, w_k , имеющих место в точке k , получим

$$A = P_k l_k u_k + P_k m_k v_k + P_k n_k w_k = P_k (u_k l_k + v_k m_k + n_k w_k).$$

Записанное в скобках выражение представляет собой интересное нас перемещение f_k , т. е.

$$A = P_k f_k.$$

Выражение для вариации работы сил будет равно

$$\delta A = f_k \delta P_k. \quad (1.56)$$

Дополнительная потенциальная энергия в рассматриваемом случае будет функцией приложенной силы P_k и, следовательно, ее вариация примет вид:

$$\delta \bar{U} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial P_k} \delta P_k. \quad (1.57)$$

Используя принцип Кастильяно в форме (1.48) при $\delta \bar{U}$ и δA , определенными формулами (1.57), (1.56), получим равенство

$$\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial P_k} - f_k \right) \delta P_k = 0,$$

которое в силу произвольности вариации δP_k дает

$$f_k = \frac{\partial \bar{U}}{\partial P_k}. \quad (1.58)$$

Полученное равенство формулируется в виде теоремы Кастильяно: *частная производная от дополнительной потенциальной энергии по обобщенной силе равна перемещению по направлению этой силы (проекция полного перемещения на направление силы)*. Под обобщенной силой здесь понимается сила или момент. В последнем случае f_k будет представлять собой соответствующий угол поворота.

1.4.5. Примеры

Проиллюстрируем изложенный выше принцип наименьшей работы и теорему Кастильяно на двух примерах.

Рассмотрим стержневую систему, показанную на рис. 1.6, а. Методы расчета стержневых систем будут изложены в гл. 2, однако рассматриваемая простая задача может быть решена и без их привлечения. При действии силы P в стержнях возникают нормальные напряжения, которые распределены равномерно по сечению и длине стержней и обычно заменяются усилиями в стержнях $N_i = \sigma_i F$ (F — площадь сечения, которая считается одинаковой для всех стержней так же, как и модуль упругости материала E). В силу симметрии усилия в стержнях 1 ... 4 и 3 ... 4 будут одинаковыми, т. е. для решения задачи необходимо найти усилия N_1 и N_2 (рис. 1.6, б).

Вырежем узел 4 и составим сумму проекций всех сил на вертикальную ось:

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 - P = 0.$$

Определяя отсюда усилие N_1 , получим $N_2 = P - 2N_1 \cos \alpha$.

(1.59)

Рассматриваемая система является один раз статически неопределимой. Для определения усилий

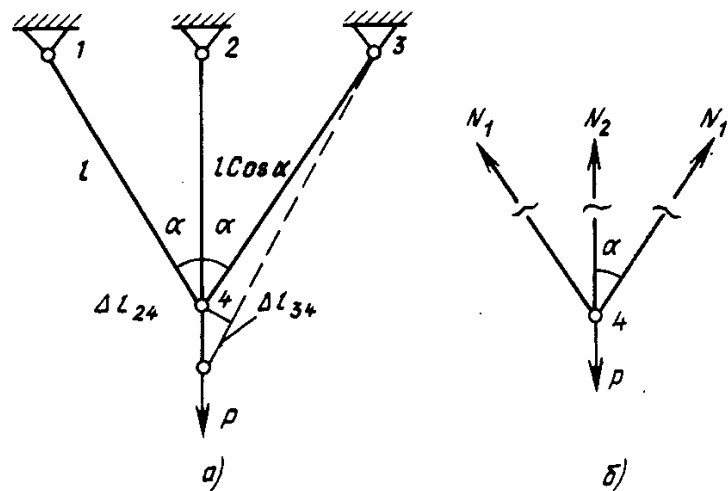


Рис. 1.6. Статически неопределимая стержневая система

необходимо записать условие совместности деформации стержней, которое следует непосредственно из рис. 1.6, a и имеют вид $\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha$. Согласно закону Гука $N_1 = EF \varepsilon_1$, $N_2 = EF \varepsilon_2$, где $\varepsilon_1 = \Delta l_1 / l$, $\varepsilon_2 = \Delta l_2 / l \cos \alpha$, т. е. окончательно получим уравнение совместности деформаций в виде

$$\frac{N_1}{EF} = \frac{N_2}{EF} \cos^2 \alpha. \quad (1.60)$$

Решение уравнений (1.59) и (1.60) дает

$$N_1 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \quad N_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}. \quad (1.61)$$

Смещение точки 4 по вертикали, очевидно, равно удлинению стержня 2 ... 4, т. е.

$$f_4 = \frac{Pl \cos \alpha}{EF (1 + 2 \cos^3 \alpha)}. \quad (1.62)$$

Применим теперь для решения этой задачи принцип наименьшей работы. В соответствии с изложенным выше дополнительная потенциальная энергия стержня (1.54) имеет вид

$$\bar{U}_i = \iiint \frac{\sigma_i^2}{2E} dv = \frac{N_i^2}{2EF} l_i \quad (1.63)$$

и для рассматриваемой системы

$$\bar{U} = 2 \frac{N_1^2}{2EF} l + \frac{N_2^2}{2EF} l \cos \alpha. \quad (1.64)$$

Согласно принципу наименьшей работы из всех статически возможных систем усилий, сводящихся в узле 4 к силе P , т. е. удовлетворяющих уравнению (1.59), действительные усилия сообщают $\bar{U}$ минимальное значение. Исключая из (1.64) усилие N_2 с помощью (1.59)

$$\bar{U} = 2 \frac{N_1^2 l}{2EF} + \frac{(P - 2N_1 \cos \alpha)^2}{2EF} l \cos \alpha,$$

записывая условие минимума функции

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial N_1} = \frac{2N_1 l}{EF} - (P - 2N_1 \cos \alpha) \frac{2l \cos^2 \alpha}{EF} = 0 \quad (1.65)$$

и преобразуя (1.65) с учетом (1.59), получим

$$\frac{N_1}{EF} - \frac{N_2}{EF} \cos^2 \alpha = 0,$$

т. е. условие совместности деформаций (1.60).

Последняя операция понадобилась только для истолкования равенства (1.65), из которого сразу можно найти величину усилия N_1 , совпадающее с решением (1.61).

Рис. 1.7. Изгиб консольной балки

Найдем перемещение узла 4 с помощью теоремы Кастильяно. С этой целью

запишем $\bar{U}$ как функцию силы P , действующей в этом узле. Подставляя значение усилия (1.61) в выражение (1.64), получим

$$\bar{U} = \frac{P^2 l \cos \alpha}{2EF (1 + 2 \cos^3 \alpha)}.$$

Отсюда согласно теореме Кастильяно

$$f_4 = \frac{\partial \bar{U}}{\partial P} = \frac{Pl \cos \alpha}{EF (1 + 2 \cos^3 \alpha)},$$

что совпадает с (1.62).

Рассмотрим пример определения прогиба на конце консольной балки постоянной жесткости EI , нагруженной равномерной поперечной нагрузкой (рис. 1.7). Поскольку в месте искомого прогиба внешней силы P нет, приложим ее дополнительно. Тогда изгибающий момент в произвольном сечении x от заданной нагрузки q и введенной силы P будет

$$M = \frac{q}{2} (l - x)^2 + P (l - x) \quad (1.66)$$

и нормальные напряжения выразятся в соответствии с теорией изгиба балок формулой

$$\sigma_x = -\frac{M}{I} y. \quad (1.67)$$

Здесь I — момент инерции сечения: y — центральная главная ось инерции сечения.

Согласно (1.54) дополнительная потенциальная энергия имеет вид

$$\bar{U} = \int_0^l dx \int_F \frac{\sigma_x^2}{2E} dF. \quad (1.68)$$

Тогда напряжения и изгибающий момент в соответствии с (1.67), (1.66)

$$\bar{U} = \int_0^l \frac{1}{2E} \left[\frac{q}{2} (l - x)^2 + P (l - x) \right]^2 \frac{dx}{I^2} \int_F y^2 dF.$$

Производя интегрирование, найдем

$$\bar{U} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{q^2 l^5}{20} + \frac{qPl^4}{4} + \frac{P^2 l^3}{3} \right).$$

И, наконец, используя теорему Кастильяно, получим

$$f = \frac{\partial \bar{U}}{\partial P} = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{Pl^3}{3EI}.$$

Полученное значение прогиба соответствует задаче, когда балка кроме распределенной нагрузки на свободном конце нагружена силой P_1 , а поскольку в исходной задаче ее нет, то следует положить P равным нулю. В результате прогиб будет равен

$$f_k = \frac{ql^4}{8EI}.$$

1.5. СМЕШАННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

Выше были рассмотрены принципы возможных изменений деформированного состояния (принцип Лагранжа) и возможных изменений напряженного состояния (принципы Кастильяно и наименьшей работы), позволяющие построить энергетическим методом соответственно статические соотношения и уравнения совместности деформаций. Можно построить также функционал, из которого будут вытекать физические соотношения для упругого тела.

Для этого используем принцип наименьшей работы (1.53). Ввиду того, что этот принцип требует, чтобы варьируемые напряжения удовлетворяли уравнениям равновесия (1.9) и статическим граничным условиям (1.8), воспользуемся известным из вариационного исчисления методом множителей Лагранжа и запишем расширенный функционал

$$\begin{aligned} F = & \bar{U} + \iiint \left[u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) + \right. \\ & + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) + \\ & \left. + w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \right] dx dy dz + \\ & + \iint [u(x_v - \sigma_x l - \tau_{xy} m - \tau_{xz} n) + v(y_v - \tau_{xy} l - \sigma_y m - \tau_{yz} n) + \\ & + w(z_v - \tau_{xz} l - \tau_{yz} m - \sigma_z n)] ds. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Здесь $\bar{U}$ определяется равенством (1.54), а u , v и w — множители Лагранжа. Из дальнейшего будет видно, что эти множители являются перемещениями, что и учтено в обозначениях. Согласно принципу наименьшей работы $\delta F = 0$. Отметим, что при этом можно варьировать как множители Лагранжа (т. е. перемещения), так и напряжения, в связи с чем излагаемый вариационный принцип и назван смешанным. При варьировании u , v и w из функционала (1.69) вытекают уравнения связей, т. е. уравнения равновесия и статические граничные условия.

Осуществим варьирование по функциям напряжений, причем следует иметь в виду, что внешние нагрузки являются заданными, т. е. их вариации равны нулю, а вариации функций напряжений можно считать взаимно независимыми, т. е. соотношения, связывающие функции напряжений, уже учтены в функционале

(1.69). Проводя операцию варьирования функций напряжений и преобразуя объемный интеграл в (1.69) с помощью формулы Остроградского, окончательно получим

$$\begin{aligned} \delta F = \iiint \left\{ \frac{1}{E} [\sigma_x \delta \sigma_x + \sigma_y \delta \sigma_y + \sigma_z \delta \sigma_z - \mu (\sigma_x \delta \sigma_y + \sigma_y \delta \sigma_x + \right. \\ \left. + \sigma_x \delta \sigma_z + \sigma_z \delta \sigma_x + \sigma_y \delta \sigma_z + \sigma_z \delta \sigma_y)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{G} (\tau_{xy} \delta \tau_{xy} + \tau_{xz} \delta \tau_{xz} + \tau_{yz} \delta \tau_{yz}) + \alpha t (\delta \sigma_x + \delta \sigma_y + \delta \sigma_z) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \delta \sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta \tau_{yz} + \frac{\partial u}{\partial z} \delta \tau_{xz} + \frac{\partial v}{\partial x} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} \delta \sigma_y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta \tau_{yz} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \delta \tau_{xz} + \frac{\partial w}{\partial y} \delta \tau_{yz} + \frac{\partial w}{\partial z} \delta \sigma_z \right) \right\} dx dy dz. \end{aligned}$$

Ввиду того, что вариации напряжений произвольны и независимы, следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z) + \alpha t, & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x - \mu \sigma_z) + \alpha t, & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu \sigma_x - \mu \sigma_y) + \alpha t, & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\tau_{yz}}{G}. \end{aligned}$$

Сопоставляя эти равенства с (1.3) и (1.13), можно заключить, что они являются обобщенным законом Гука (1.13), в котором функции деформаций выражены через перемещения с помощью соотношений Коши (1.3). Очевиден также физический смысл множителей Лагранжа u , v , w — они являются перемещениями по осям x , y , z .

Таким образом, можно заключить, что равенство $\delta F = 0$ является аналитической интерпретацией смешанного вариационного принципа, являющегося вариантом принципа Рейсснера, из которого вытекают соотношения упругости.

В заключение сделаем некоторые общие замечания относительно рассмотренных выше вариационных принципов. Из изложенного следует, что эти принципы позволяют по существу построить функционалы, из которых методами вариационного исчисления могут быть получены те или иные группы уравнений теории упругости. Поскольку эти уравнения были выведены в разд. 1.1, непосредственно может сложиться впечатление о том, что роль вариационных принципов не столь велика. Однако это далеко не так. Отметим прежде всего, что при расчете сложных, состоящих из большого числа взаимодействующих элементов конструкций непосредственный вывод основных уравнений является часто задачей далеко не элементарной — при проектировании силовых факторов и записи геометрических связей он часто требует достаточно сложных пространственных построений, что может

явиться причиной ошибок. В то же время потенциальная энергия, являющаяся суммой энергий отдельных элементов, как правило, записывается достаточно просто, а последующие формальные операции минимизации функционала практически гарантируют от ошибок.

Кроме того, введение в функционал системы гипотез, которые всегда принимают при расчете конструкций, позволяет получить корректную систему уравнений и, что не менее важно, естественные граничные условия, число и точность которых соответствуют порядку и степени точности вариационных уравнений. Отметим, что неудачные или физически необусловленные гипотезы аппарат минимизации функционала перерабатывает, естественно, так же, как удачные, поэтому, осуществляя формальные операции, не следует упускать из виду их физическое содержание.

И, наконец, одна из основных возможностей, которую открывает использование вариационных принципов, связана с построением так называемых прямых методов получения приближенных решений, когда интегрирование основной системы уравнений заменяется приближенной минимизацией функционала. Эти методы будут изложены в следующем разделе.

1.6. ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Полученная в разд. 1.1 основная система уравнений теории упругости более высокого порядка и содержания уравнения в частных производных, как правило, не позволяет получить точное решение даже для сравнительно простых и идеализированных расчетных моделей реальных конструкций. В связи с этим на практике широкое распространение получили приближенные методы решения, изложению которых посвящен настоящий раздел. Эти методы можно условно разделить на три класса — континуальные, дискретные и дискретно-континуальные. К континуальным будем относить методы, согласно которым рассматриваемая система рассматривается как сплошная среда (континуум), причем описывающие ее поведение функции, например перемещения, аппроксимируются гладкими функциями координат. Дискретные методы, интенсивное развитие которых в последние годы связано с совершенствованием вычислительной техники, основаны на замене задачи об определении непрерывных искомых функций задачей о приближенном отыскании значений этих функций в конечном числе точек рассматриваемой конструкции. И, наконец, дискретно-континуальные методы совмещают дискретное описание искомых функций по одной координате с построением непрерывного решения по другой.

Рассмотрим далее некоторые наиболее распространенные методы приближенного решения задач строительной механики.

1.6.1. Метод Ритца—Тимошенко

Метод, предложенный В. Ритцем и распространенный С. П. Тимошенко на задачи строительной механики, позволяет получить приближенное (а в отдельных случаях и точное) решение в перемещениях на основе вариационного принципа Лагранжа, изложенного в разд. 1.3. Идею метода, который относится к классу континуальных, поясним на примере решения пространственной задачи теории упругости.

Для построения приближенного решения три перемещения u , v , w представим в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} u &= \sum_i A_i U_i(x, y, z), \\ v &= \sum_i B_i V_i(x, y, z), \\ w &= \sum_i C_i W_i(x, y, z). \end{aligned} \quad (1.70)$$

В (1.70) функции U_i , V_i , W_i называются аппроксимирующими и выбираются заранее. Внося (1.70) в выражение полной энергии (1.30) и выполняя интегрирование, получим

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(A_1, A_2 \dots A_i B_1 B_2 \dots B_i, C_1, C_2 \dots C_i).$$

Поскольку полная энергия превратилась таким образом в функцию от коэффициентов, то условие минимума ее, следующее из принципа Лагранжа, будет реализоваться обращением в нуль всех производных от полной энергии по коэффициентам рядов (1.70), т. е. разрешающая система уравнений будет иметь вид:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial B_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial C_i} = 0. \quad (1.71)$$

Поскольку полная энергия есть квадратичная функция от перемещений, то уравнения (1.71) будут представлять собой систему линейных алгебраических уравнений, причем количество этих уравнений всегда будет равно количеству членов (коэффициентов), вводимых в рядах (1.70) и, следовательно, система (1.71) будет полной относительно определяемых коэффициентов. Найдя в результате решения этой системы коэффициенты A_i , B_i , C_i , можно далее по формуле (1.70) определить перемещения, а затем деформации и напряжения, т. е. получить полное решение задачи.

Таким образом, основная идея метода, кардинально упрощающая решение и, естественно, определяющая его приближенный характер, связана с тем, что искомые перемещения отыскиваются в классе заранее заданных функций, которые выбираются на основе опыта, интуитивно или на основе решений более простых задач. В результате минимизации полной энергии отыскивается распределение перемещений, наиболее близкое к истинному в энергетическом смысле, а в некоторых случаях может быть найдено

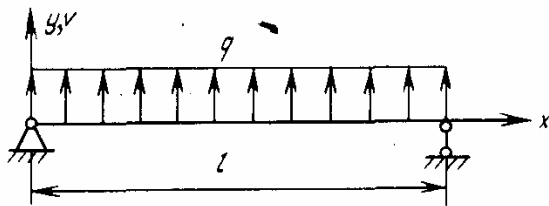


Рис. 1.8. Изгиб шарнирно опертой балки

и истинное поле перемещений, если оно содержится в заданном классе функций. Отметим, что на аппроксимирующие функции должны быть наложены определенные ограничения. Как следует из (1.30), они должны быть дифференцируемыми и поскольку принцип Лагранжа

предусматривает сравнение кинематически возможных систем перемещений — удовлетворять геометрическим граничным условиям. При этом возникает и чисто математический вопрос о правомочности представления искомых функций в виде рядов, связанных с полной системы аппроксимирующих функций и сходимостью процесса при увеличении числа членов в рядах к точному решению. При практических расчетах эти вопросы поднимаются редко и в лучшем случае подменяются сравнением результатов при увеличении числа аппроксимирующих функций.

В качестве примера рассмотрим изгиб шарнирно опертой балки постоянной жесткости EI под действием равномерно распределенной нагрузки q (рис. 1.8). Геометрические граничные условия в этой задаче имеют следующий вид: при $x = 0$ и $x = l$ $v = 0$. Чтобы удовлетворить им, выберем аппроксимирующие функции в виде синусоид с целым числом полуволн n :

$$v = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (1.72)$$

Полная энергия изгибаемой балки определяется равенством (1.33) при $u_0 = 0$, т. е.

$$\mathcal{E} = \int_0^l \left[\frac{EI}{2} (v'')^2 - qv \right] dx.$$

Внося выражение (1.72) и интегрируя, получим

$$\mathcal{E} = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \sum_n A_n^2 n^4 - \frac{2ql}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5} \frac{A_n}{n}.$$

Система уравнений (1.71) принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_n} = \frac{EI\pi^4}{2l^3} A_n n^4 - \frac{2ql}{\pi n} = 0 \quad (n = 1, 3, 5 \dots).$$

Отсюда $A_n = (4ql^4)/(EI\pi^5 n^5)$ для нечетных n (для четных $A_n = 0$).

Таким образом, прогиб определяется равенством

$$v = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1, 3, 5 \dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (1.73)$$

Для анализа сходимости ряда (1.73) рассмотрим прогиб балки в среднем сечении. Внося в (1.73) значение $x = l/2$, получим

$$v = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \dots \right).$$

Отсюда видно, что ряд быстро сходится, его второй член составляет лишь 0,41 % от первого. Здесь полезно отметить, что сходимость построенного ряда падает при его дифференцировании. Так, например, нормальное напряжение будет определяться через вторую производную от прогиба, для которой ряд будет иметь следующий вид:

$$v'' = -\frac{4ql^2}{EI\pi^3} \sum_{n=1, 3, 5} \left(\frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{e} \right),$$

что для среднего сечения дает

$$v'' = -\frac{4ql^2}{EI\pi^3} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots \right).$$

Здесь второй член составляет уже 3,7 % от первого.

1.6.2. Метод Бубнова—Галеркина

Приближенный метод решения задачи путем сведения ее к системе линейных алгебраических уравнений, основанный на принципе возможных перемещений, был построен И. Г. Бубновым и весьма широко использовался при решении различных задач строительной механики Б. Г. Галеркиным. В рамках этого метода перемещения по-прежнему задаются в форме (1.70), и поскольку аппроксимирующие функции должны удовлетворять геометрическим граничным условиям и быть непрерывны внутри области, занятой материалом конструкции, они являются возможными формами перемещений и могут быть использованы для записи возможной работы всех сил. В рамках трехмерной задачи, используя уравнения (1.29), применяя в них $\delta u = U_i$, $\delta v = V_i$, $\delta w = W_i$ и в силу произвольности функций перемещений U_i , V_i , W_i приравнивая нулю возможную работу на каждом из этих перемещений, получим

$$\begin{aligned} & \iiint \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) U_i dx dy dz + \\ & + \iint (X_v - \sigma_x l - \tau_{xy} m - \tau_{xz} n) U_i ds = 0, \\ & \iiint \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\sigma_y}{\partial y} + \frac{\tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) V_i dx dy dz + \\ & + \iint (Y_v - \tau_{xy} l - \sigma_y m - \tau_{yz} n) V_i ds = 0, \\ & \iiint \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) W_i dx dy dz + \\ & + \iint (Z_v - \tau_{xz} l - \tau_{yz} m - \sigma_z n) W_i ds = 0. \end{aligned} \tag{1.74}$$

В уравнениях (1.74), естественно, понимается, что функции напряжений в соответствии с законом Гука и формулами Коши заменяются функциями перемещений, которые и представляются рядами (1.70). Представленный уравнениями (1.74) метод решения обычно называют обобщенным методом Бубнова—Галеркина, в рамках которого на аппроксимирующие функции накладывается требование удовлетворения геометрическим граничным условиям.

Если же при выборе аппроксимирующих функций потребовать, чтобы они удовлетворяли кроме геометрических также и статическим граничным условиям, то интегралы по поверхности обратятся в нуль и уравнения (1.74) превратятся в следующие:

$$\begin{aligned} \iiint \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) U_i dx dy dz &= 0, \\ \iiint \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) V_i dx dy dz &= 0, \\ \iiint \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) W_i dx dy dz &= 0. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Метод решения задач, основанный на уравнении (1.75), называют методом Бубнова—Галеркина. Поясним все изложенное выше примером расчета балки, представленной на рис. 1.8. Геометрические и статические граничные условия в этой задаче следующие: при $x=0$ и $x=l$ $v=0$, $M=-EIv''=0$. При задании прогиба v в форме (1.72) каждая из аппроксимирующих функций будет удовлетворять геометрическим и статическим граничным условиям при целочисленных значениях параметра n .

Записывая «возможную» работу сил, когда уравнение равновесия представляется уравнением изогнутой оси балки (1.37) $EIv^{IV} - q$, получим

$$\int_0^l (EIv^{IV} - q) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0.$$

Внося сюда v согласно (1.72) и выполняя интегрирование, напишем

$$A_n EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \frac{l}{2} - q \frac{2l}{n\pi} = 0.$$

Откуда $A_n = (4ql^4)/(EI\pi^5 n^5)$ и функция v определяется так же, как и при расчете методом Ритца—Тимошенко, рядом (1.72).

Сделаем одно замечание, общее для обоих рассмотренных методов. Процедура выбора аппроксимирующих функций в рядах (1.70) можно упростить, если учесть, что между функциями U_i , V_i и W_i для каждого конкретного номера i имеется определенное статическое соответствие, следующее из уравнений равновесия, записанных в функциях перемещений. Указанного статического соответствия, очевидно, можно всегда достичь, если выразить

компоненты перемещений через одну функцию путем удовлетворения части уравнений равновесия. Рассмотрим, например, уравнения Ламе (1.15), предполагая, что температурное воздействие и объемные силы отсутствуют, т. е. $t = 0$ и $X = Y = Z = 0$. Введем разрешающую функцию φ по формулам

$$u = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x}, \quad v = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \quad w = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2(1 - \mu) \nabla^2 \varphi. \quad (1.76)$$

Подставляя (1.76) в (1.15), можно убедиться в том, что первые два уравнения удовлетворяются тождественно, а третье принимает вид $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$. Если теперь задать функцию φ в виде ряда

$$\varphi = \sum_i A_i \varphi_i,$$

то согласно (1.70) и (1.76), получим

$$u = \sum_i A_i U_i, \quad v = \sum_i A_i V_i, \quad w = \sum_i A_i W_i,$$

где $U_i = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial x}, \quad V_i = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y \partial z}, \quad W_i = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} - 2(1 - \mu) \nabla^2 \varphi_i.$

При этом функции должны быть выбраны так, чтобы компоненты U_i, V_i, W_i обязательно удовлетворяли заданным в задаче геометрическим граничным условиям, что же касается коэффициентов A_i , то они могут определяться и в соответствии с методом Ритца—Тимошенко или в соответствии с методом Бубнова—Галеркина.

1.6.3. Метод Власова—Канторовича

Этот метод был сформулирован в одни и те же годы В. З. Власовым применительно к построению приближенного расчета тонкостенных пространственных систем и Л. В. Канторовичем применительно к расчету изгибаемой пластинки. В отличие от изложенных выше двух методов, согласно которым задача сводится к системе алгебраических уравнений, рассматриваемый метод позволяет свести ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Трудоемкость расчета при этом возрастает, однако, как правило, увеличивается и точность. Согласно методу Власова—Канторовича, который применяется обычно для решения двумерных задач, неизвестные перемещения (одно или два) задаются в виде суммы произведений двух функций, одно из семейств которых зависит только от одной координаты и выбирается, а второе, зависящее от второй координаты, определяется в результате расчета:

$$f_n = \sum_i f_{in}(x) \varphi_{in}(y). \quad (1.77)$$

Пусть каждая из компонент перемещений f_n (в конкретных задачах это будет u , v , w) представляется рядом (1.77), в котором функции φ_{in} выбираются. Тогда полная энергия $\mathcal{E}$ (1.30) превратится в следующий функционал:

$$\mathcal{E} = \int F(x, f_{in}, f'_{in}, f''_{in}) dx.$$

Минимум этого функционала в соответствии с принципом Лагранжа будет реализовываться уравнениями Эйлера—Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial f_{in}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'_{in}} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial f''_{in}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.78)$$

а естественные граничные условия определяют обобщенные статические граничные условия.

Уравнения (1.78) будут представлять собой систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (второго или четвертого порядка). Таким образом, представление перемещений в форме (1.77) сводит задачу, описываемую уравнениями в частных производных, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В связи с этим метод Власова—Канторовича часто называют методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Следует заметить, что аппроксимирующие функции φ_{in} при расчете косоугольных и скошенных систем оказываются функциями от двух координат. Рассматриваемую процедуру расчета можно распространить и на трехмерную задачу, которую можно свести к системе двумерных уравнений, если аппроксимирующие функции будут выбираться одномерными, или к системе обыкновенных уравнений, если аппроксимирующие функции будут выбираться двумерными.

1.6.4. Метод Папковича—Треффца

Выше были рассмотрены приближенные методы решения задачи в перемещениях. Аналогичным образом может быть построен континуальный метод решения задачи в напряжениях. Компоненты напряжений при этом представляются в виде рядов с неизвестными постоянными коэффициентами, которые определяются на основании принципа наименьшей работы. Поскольку при этом необходимо, чтобы компоненты напряжений были статически возможными, аппроксимирующие функции выбираются в виде частных интегралов уравнений равновесия, удовлетворяющих условиям на поверхности. Уравнения равновесия можно удовлетворить путем введения функций напряжений, причем для удовлетворения трех уравнений равновесия (в общем слу-

чае трехмерной задачи) достаточно ввести три функции напряжений по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} - \int X dx, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \int Y dy, \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial z}, \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \int Z dz, \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial z}.\end{aligned}\tag{1.79}$$

Непосредственной подстановкой напряжений (1.79) в уравнения равновесия (1.9) можно убедиться в том, что эти уравнения удовлетворяются тождественно при произвольных функциях φ_i ($i = 1, 2, 3$).

Для удовлетворения статических граничных условий введем напряжения $\sigma_x^0, \dots, \tau_{xz}^0$ так, чтобы на поверхности тела выполнялись равенства

$$\begin{aligned}X_v &= \sigma_x^0 l + \tau_{xy}^0 m + \tau_{xz}^0 n, \\ Y_v &= \tau_{xy}^0 l + \sigma_y^0 m + \tau_{yz}^0 n, \\ Z_v &= \tau_{xz}^0 l + \tau_{yz}^0 m + \sigma_z^0 n,\end{aligned}$$

где X_v, Y_v, Z_v — заданные поверхностные нагрузки. Ввиду того, что напряжения $\sigma_x^0 \dots \tau_{xz}^0$ могут не удовлетворять уравнениям равновесия (1.9) внутри тела, компенсируем их введение приведенными объемными силами, т. е.

$$\begin{aligned}X_{пр} &= -\frac{\partial \sigma_x^0}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}^0}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}^0}{\partial z}, \\ Y_{пр} &= -\frac{\partial \tau_{xy}^0}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y^0}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}^0}{\partial z}, \\ Z_{пр} &= -\frac{\partial \tau_{xz}^0}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}^0}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z}.\end{aligned}$$

В формулах (1.79) при этом следует считать, что объемные силы состоят из заданных внешних нагрузок $X_{вн}, Y_{вн}, Z_{вн}$ и приведенных, т. е.

$$X = X_{вн} + X_{пр}, \quad Y = Y_{вн} + Y_{пр}, \quad Z = Z_{вн} + Z_{пр}.$$

Представим теперь функции напряжений в виде следующих рядов:

$$\varphi_i = \sum A_{ij} \varphi_{ij}(x, y, z).$$

бираемых гладких функций. Эти методы, как правило, позволяют получить приближенное аналитическое решение, однако, пользуясь ими, не всегда удастся получить практически приемлемое решение многих важных задач. В последние годы в связи с развитием вычислительной техники получили широкое распространение численные методы, основанные на дискретном представлении рассчитываемой конструкции и соответствующих математических зависимостей.

Поскольку основой ряда таких методов является конечно-разностное представление операции дифференцирования, получим некоторые основные конечно-разностные формулы для двумерных задач.

Пусть имеем некоторую дифференцируемую функцию $f(x, y)$, которая описывает геометрические или силовые факторы упругой системы. Разложим функцию $f(x, y)$ в направлении x в ряд Тейлора в окрестности заданной точки k , т. е.

$$f_{k-1} = f_k - \frac{\Delta x}{1!} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_k + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_k - \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_k + \dots,$$

$$f_{k+1} = f_k + \frac{\Delta x}{1!} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_k + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_k + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_k + \dots,$$

где Δx — шаг сетки вдоль оси x (расстояние между точками $k-1$, k , $k+1$), который будем считать постоянным. Оставив в этих разложениях члены до второй производной включительно, сложением и вычитанием получим формулы для вычисления первой и второй производных в центральных разностях с погрешностью порядка Δx^2

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_k &= \frac{1}{2\Delta x} (f_{k+1} - f_{k-1}), \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_k &= \frac{1}{\Delta x^2} (f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}). \end{aligned} \quad (1.82)$$

Очевидно, такой же вид будут иметь формулы для вычисления производных в точке k в направлении оси y . Пользуясь формулами (1.82) и правилом умножения конечно-разностных операторов, можно построить соотношения для вычисления производных в центральных разностях любого порядка в обыкновенных или в частных производных. В частности, для производных, наиболее часто встречающихся в задачах строительной механики, эти формулы имеют следующий вид (рис. 1.9):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_k &= \frac{1}{2\Delta x} (f_b - f_a); \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_k &= \frac{1}{2\Delta y} (f_d - f_c); \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_k &= \frac{1}{\Delta x^2} (f_a + f_b - 2f_k); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_k &= \frac{1}{\Delta y^2} (f_c + f_d - 2f_k); \\
\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_k &= \frac{1}{4 \Delta x \Delta y} (f_h + f_l - f_e - f_g); \\
\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_k &= \frac{1}{2 \Delta x^3} (2f_a - 2f_b - f_m + f_n); \\
\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_k &= \frac{1}{2 \Delta y^3} (2f_c - 2f_d - f_p + f_q); \\
\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_k &= \frac{1}{2 \Delta x \Delta y^2} (2f_a - 2f_b - f_h + f_l - f_e + f_g); \\
\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_k &= \frac{1}{2 \Delta x^2 \Delta y} (2f_c - 2f_d + f_h - f_l - f_e + f_g); \\
\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_k &= \frac{1}{\Delta x^4} (6f_k - 4f_a - 4f_b + f_m + f_n); \\
\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_k &= \frac{1}{\Delta y^4} (6f_k - 4f_c - 4f_d + f_p + f_q); \\
\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_k &= \frac{1}{\Delta x^2 \Delta y^2} (4f_k - 2f_a - 2f_b - 2f_c - 2f_d + \\
&\quad + f_e + f_g + f_h + f_l).
\end{aligned} \tag{1.83}$$

Иногда бывает удобным выражать производные через несимметричные конечные разности, т. е. через разности вперед или назад, следующие, например, из приведенных выше разложений функции в ряд Тейлора. Соответствующие формулы для первой производной имеют вид

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_k &= \frac{1}{\Delta x} (f_{k+1} - f_k), \\
\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_k &= \frac{1}{\Delta x} (f_k - f_{k-1}).
\end{aligned} \tag{1.84}$$

Как видно, эти формулы имеют точность ниже на порядок шага, чем формулы в центральных разностях при использовании такого же количества точек. Пользуясь формулами (1.84) и правилом умножения конечно-разностных операторов, можно вычислить и старшие производные (прямые или смешанные) через разности вперед или назад.

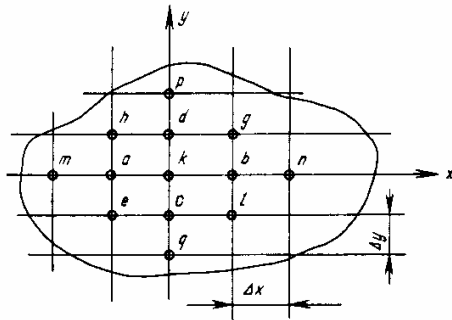
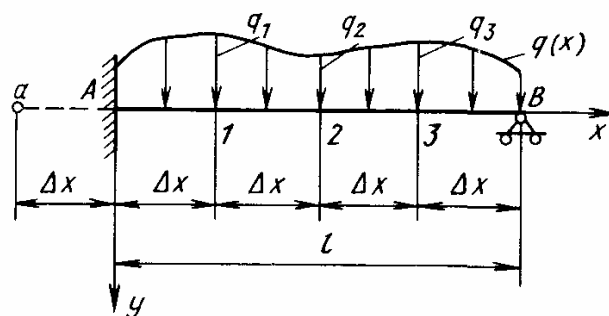


Рис. 1.9. Прямоугольная сетка на плоскости (x, y)

Таким образом, на основании (1.83), (1.84) можно записать в конечных разностях любые производные функций, входящих в различные соотношения строительной механики, в частности, в дифференциальное уравнение, дифференциальные выражения для граничных условий или в подынтегральное выражение функ-

Рис. 1.10. К решению задачи об изгибе балки конечно-разностным методом

ционала потенциальной энергии. Характер использования приведенных формул зависит от принятого метода решения конкретной задачи.



Рассмотрим дискретный метод, основанный на численном решении дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных) в задачах о напряженно-деформированном состоянии или устойчивости упругой системы. Решение состоит в сведении дифференциальных уравнений вместе с соответствующими граничными условиями к системе алгебраических уравнений. При этом, если система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, соответствующий метод носит название метода конечных разностей, а если решаются уравнения в частных производных, он называется также методом сеток. В первом случае интервал интегрирования делится на участки длиной Δx , а во втором — область, занимаемая телом, делится ортогональной сеткой на прямоугольники со сторонами Δx , Δy (см. рис. 1.9).

Покажем применение метода конечных разностей на примере определения прогиба балки переменного сечения, закрепленной на одном конце и свободно опертой на другом при произвольно распределенной нагрузке q (рис. 1.10). Разрешающее уравнение в такой задаче имеет вид (1.39), т. е.

$$M'' = -q, \quad (1.85)$$

где согласно (1.38)

$$M = -EI(x) U''. \quad (1.86)$$

Разобьем балку на четыре участка $\Delta x = l/4$ и запишем уравнение (1.85) в точках 1, 2, 3 в конечных разностях, т. е.

$$M_A - 2M_1 + M_2 = -q_1 \Delta x^2, \quad (1.87)$$

$$M_1 - 2M_2 + M_3 = -q_2 \Delta x^2,$$

$$M_2 - 2M_3 + M_B = -q_3 \Delta x^2.$$

Статическому условию на свободно опертом конце балки соответствует условие $M_B = 0$. Учитывая, что согласно (1.86) $M_k = EI_k (d^2v/dx^2)_k$, где $k = A, 1, 2, 3$, запишем уравнения (1.87) в конечных разностях через прогибы

$$\begin{aligned} EI_A (v_A - 2v_1 + v_2) - 2EI_1 (v_A - 2v_1 + v_2) + \\ + EI_2 (v_1 - 2v_2 + v_3) = q_1 \Delta x^4, \\ EI_1 (v_A - 2v_1 + v_2) - 2EI_2 (v_1 - 2v_2 + v_3) + \\ + EI_3 (v_2 - 2v_3 + v_B) = q_2 \Delta x^4, \\ EI_2 (v_1 - 2v_2 + v_3) - 2EI_3 (v_2 - 2v_3 + v_B) = q_3 \Delta x^4. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Из геометрических условий при жестком защемлении имеем

$$v_A = 0, (\partial v / \partial x)_A = 0.$$

Запишем второе условие в форме конечных разностей

$$\frac{1}{2\Delta x} (v_1 - v_a) = 0,$$

откуда перемещение в точке, называемой «законтурной» точкой, будет $v_a = v_1$. Если учесть и геометрическое условие $v_B = 0$, то система (1.88) примет вид

$$(2I_A + 4I_1 + I_2) v_1 - 2(I_1 + I_2) v_2 + I_2 v_3 = q_1 \frac{\Delta x^4}{E},$$

$$-2(I_1 + I_2) v_1 + (I_1 + 4I_2 + I_3) v_2 - 2(I_2 + I_3) v_3 = q_2 \frac{\Delta x^4}{E},$$

$$I_2 v_1 - 2(I_2 + I_3) v_2 + (I_2 + 4I_3) v_3 = q_3 \frac{\Delta x^4}{E}.$$

Полученные три уравнения включают три неизвестные величины v_1 , v_2 и v_3 . В частности, при $I = I_0 = \text{const}$, $q = q_0 = \text{const}$ имеем

$$7v_1 - 4v_2 + v_3 = \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0},$$

$$-4v_1 + 6v_2 - 4v_3 = \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0},$$

$$v_1 - 4v_2 + 5v_3 = \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0};$$

отсюда

$$v_1 = 0,909 \frac{q \Delta x^4}{EI_0}; \quad v_2 = 1,682 \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0}; \quad v_3 = 1,364 \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0}.$$

По найденному прогибу можно определить в каждом сечении изгибающий момент, а следовательно, и напряжения. Например, в сечении A имеем

$$M_A = EI_A \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_A$$

или в форме конечных разностей

$$M_A = EI_A \frac{1}{\Delta x^2} (v_a + v_1 - 2v_A).$$

В частности, при $I = I_0$, $q = q_0$

$$M_A = 1,818 q_0 \Delta x^2 = 0,114 q_0 l^2 \quad (\text{точное значение } M_A = 0,125 q_0 l^2).$$

1.6.6. Вариационно-разностный метод

Метод представляет собой сочетание вариационного и конечно-разностного методов и применяется для решения как одномерных, так и двумерных задач. Согласно этому методу

производные искомой функции, входящие в подынтегральное выражение функционала полной энергии, записываются в форме конечных разностей, а соответствующий интеграл заменяется суммой. Далее на основании соответствующего вариационного принципа определяются значения искомой функции в узлах сетки, соответствующие экстремуму дискретного аналога функционала. Алгебраические уравнения, из которых определяются эти значения, получаются из условий минимума, т. е.

$$\frac{\partial I}{\partial f_i} = 0, \quad (1.89)$$

где i — номер узла сетки; f_i — значение искомой функции в i -м узле; I — дискретный аналог функционала полной энергии. Так как I зависит квадратично от f_i , то условия (1.89) обеспечивают линейность алгебраических уравнений.

Приведем пример построения этих уравнений для балки, показанной на рис. 1.10. Запишем полную энергию изгибаемой балки (1.33) ($u_0 = 0$)

$$\mathcal{E} = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EI (v'')^2 - qv \right] dx. \quad (1.90)$$

Разделим балку, как и ранее в разд. 1.6.5, на четыре части и выражение (1.90) представим в виде суммы

$$I = \sum_i \left[\frac{1}{2} EI_i (v_i'')^2 - q_i v_i \right] \Delta x, \quad i = A, 1, 2, 3, B,$$

где q_i , I_i , v_i — значения нагрузки, момента инерции и перемещения в узловых точках. Используем формулы (1.83) и запишем производные v_i'' в конечных разностях. При этом учтем сразу, что равенство нулю изгибающего момента на шарнирной опоре дает $v_B'' = 0$. В результате будем иметь

$$I = \left[\frac{EI_A}{2} \frac{1}{\Delta x^4} (v_a - 2v_A + v_1)^2 + \frac{EI_1}{2} \frac{1}{\Delta x^4} (v_A - 2v_1 + v_2)^2 + \right. \\ \left. + \frac{EI_2}{2} \frac{1}{\Delta x^4} (v_1 - 2v_2 + v_3)^2 + \frac{EI_3}{2} \frac{1}{\Delta x^4} (v_2 - 2v_3 + v_B)^2 - \right. \\ \left. - q_1 v_1 - q_2 v_2 - q_3 v_3 \right] \Delta x.$$

Теперь используем условия минимума J (1.89) и получим уравнения

$$EI_A (v_a - 2v_A + v_1) - 2EI_1 (v_A - 2v_1 + v_2) + \\ + EI_2 (v_1 - 2v_2 + v_3) = q_1 \Delta x^4; \\ EI_1 (v_A - 2v_1 + v_2) - 2EI_2 (v_1 - 2v_2 + v_3) + \\ + EI_3 (v_2 - 2v_3 + v_B) = q_2 \Delta x^4; \\ EI_2 (v_1 - 2v_2 + v_3) - 2EI_3 (v_2 - 2v_3 + v_B) = q_3 \Delta x^4,$$

в которых нужно учесть граничные условия $v_A = v_B = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_A = 0$. Последнее из этих условий, записанное в форме конечных разностей, как было показано выше, дает $v_a = v_1$.

В результате, положив для простоты $I_i = I_0 = \text{const}$, $q_i = q_0 = \text{const}$, будем иметь разрешающую систему уравнений

$$\begin{aligned} 7v_1 - 4v_2 + v_3 &= \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0}; \\ -4v_1 + 6v_2 - 4v_3 &= \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0}; \\ v_1 - 4v_2 + 5v_3 &= \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0}. \end{aligned}$$

Как видно, эти уравнения совпадают с аналогичными уравнениями метода конечных разностей.

1.6.7. Дифференциально-разностный метод (метод прямых)

Метод применяется для решения неодномерных задач, описываемых уравнениями с частными производными. Решение при этом сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого рассматриваемое тело (пластина или оболочка) вдоль одного из направлений разбивается на полосы выбранной ширины (шаг разбиения). Границы этих полос представляют собой линии (в частности, прямые), параллельные другому направлению. Если производные исходного уравнения записать по порядку разбиения в форме конечных разностей, то для другого порядка разбиения получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (т. е. уравнений вдоль линий). Граничные условия задачи в одном направлении учитываются при записи производных в форме конечных разностей, а в другом — при решении соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве примера рассмотрим уравнение Пуассона, с которым связано решение ряда задач теории упругости и строительной механики. В частности, для задачи о перемещениях мембраны это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{N}, \quad (1.91)$$

где q , N — внешнее поперечное давление и внутренние нормальные усилия; $w(x, y)$ — искомая функция прогибов. Будем считать, что прямоугольная мембрана по краям жестко закреплена (рис. 1.11). Приведем прямые $y_0 = 0$, $y_1 = -b/4$, $y_2 = b/4$, разделив мембрану на четыре полосы шириной $\Delta y = b/4$, и запишем

уравнение (1.91) в форме конечных разностей в направлении оси y , т. е.

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} (w_1 + w_2 - 2w_0) = -\frac{q}{N};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} (w_{y=-b/2} + w_0 - 2w_1) = \\ = -\frac{q}{N}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} (w_1 + w_{y=b/2} - 2w_2) = \\ = -\frac{q}{N}. \end{aligned}$$

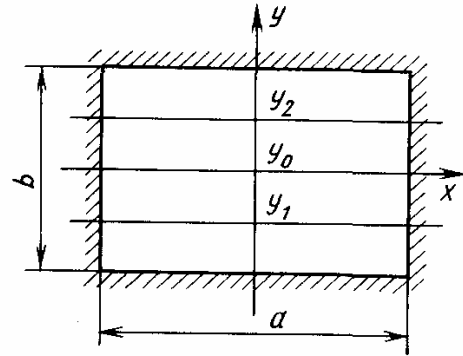


Рис. 1.11. К решению задачи о равновесии мембраны дифференциально-разностным методом

Учитывая, что $w_{y=\pm b/2} = 0$, в результате получим три уравнения с тремя неизвестными функциями $w_0(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$. Решение этих уравнений должно удовлетворять граничным условиям $w_{x=\pm a/2} = 0$. Для быстрого получения результата упростим решение, проведя только одну линию $y = 0$, т. е. разделив мембрану только на две части. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} (w_{y=-b/2} + w_{y=b/2} - 2w_0) = -\frac{q}{N}$$

или с учетом $w_{y=\pm b/2} = 0$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{8}{b^2} w_0 = -\frac{q}{N},$$

из которого получим решение вида

$$w_0 = c_1 \operatorname{sh} \frac{2\sqrt{2}}{b} x + c_2 \operatorname{ch} \frac{2\sqrt{2}}{b} x + \frac{qb^2}{8N}.$$

Из симметрии перемещений относительно оси y следует $c_1 = 0$, а из условия $w_{x=\pm a/2} = 0$ $c_2 = -qb^2/8N \operatorname{ch} \frac{a\sqrt{2}}{b}$. Окончательно получим

$$w_0 = \frac{qb^2}{8N} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{2\sqrt{2}}{b} x}{\operatorname{ch} \frac{a\sqrt{2}}{b}} \right).$$

1.6.8. Метод локальных вариаций

Метод локальных вариаций представляет собой численную реализацию вариационного подхода к решению различных задач механики.

Существо решения покажем на схеме численного определения функции $f(x)$, сообщающей минимальное значение одномерному функционалу вида

$$J = \int_a F(x, f, f', f'') dx \quad (1.92)$$

и удовлетворяющей на границах условиям $f_{x=a} = A$, $f_{x=b} = B$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на N равных частей точками

$$x_k = a + k \Delta x,$$

где $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ — шаг разбиения; $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Тогда приближенное решение функционала (1.92) можно представить в виде

$$J = \sum_{k=1}^N F(x_k, f_k, f'_k, f''_k) \Delta x, \quad (1.93)$$

где f_k, f'_k, f''_k — значения функции $f(x)$ и ее производных в точке $x = x_k$.

Если воспользоваться конечно-разностными формулами (1.83), то производные f'_k, f''_k можно записать через значения функции в точках разбиения следующим образом:

$$f'_k = \frac{1}{2\Delta x} (f_{k+1} - f_{k-1}), \quad f''_k = \frac{1}{\Delta x^2} (f_{k-1} + f_{k+1} - 2f_k).$$

Тогда дискретный аналог функционала (1.92) примет вид

$$I = \sum_{k=1}^N F\left(x_k, f_k, \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2\Delta x}, \frac{f_{k-1} + f_{k+1} - 2f_k}{\Delta x^2}\right) \Delta x \quad (1.94)$$

или $I = I(x_k, f_k)$ при $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Таким образом, задача определения функции $f(x)$, минимизирующей функционал (1.92), сводится к определению чисел f_k , минимизирующих выражение (1.94). Это решение находится методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимается некоторый ряд чисел $f_k^{(0)}$, где $k = 0, 1, 2, \dots, N$, который в соответствии с граничными условиями должен удовлетворять требованиям $f_1^{(0)} = A, f_N^{(0)} = B$. Процесс последовательных приближений осуществляется следующим образом. Пусть имеется $n = e$ приближение, т. е. последовательность $f_k^{(n)}$ при $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N$. Тогда $(n+1) = e$ приближение определяется путем сравнения в каждой точке x_k трех величин

$$\begin{aligned} J &= I(x_k, f_k^{(n)}), \\ J^- &= I(x_k, f_{k-h}^{(n)}), \\ J^+ &= I(x_k, f_{k+h}^{(n)}), \end{aligned} \quad (1.95)$$

где $0 < h < \Delta x$ — шаг варьирования (шаг пробы). В каждой точке из трех значений $f_k^{(n)}, f_{k-h}^{(n)}, f_{k+h}^{(n)}$ для $(n+1)$ -го приближения берется то значение, которое дает меньшую из трех величин (1.95). При фиксированном h приближения проводятся до тех пор, пока J, J^-, J^+ становятся (с заданной точностью) равными. После этого шаг уменьшают и проводится очередная серия

приближений. Весь процесс приближений заканчивается при совпадении (с заданной точностью) значений всех f_k или J , J^- , J^+ в двух последующих приближениях при достаточно малых h и Δx .

1.6.9. Метод коллокаций

Этот метод также относится к численным, так как его применение связано с сеточной аппроксимацией упругого тела. Решение задачи этим методом дает, однако, результат не в виде дискретных значений искомой функции в узловых точках сетки, а в виде некоторой функции, удовлетворяющей заданному уравнению в узловых точках сетки (точках коллокации) и граничным условиям. Таким образом, метод коллокации является методом приближенного решения дифференциального (или интегрального) уравнения и заключается в сведении этого решения к решению системы алгебраических уравнений.

Покажем применение метода на примере изгиба балки, показанной на рис. 1.10.

Для $I = I_0 = \text{const}$ требуется решить уравнение

$$EI_0 v^{IV}(x) = q(x) \quad (1.96)$$

с граничными условиями

$$v_{x=0} = v'_{x=0} = 0, \quad v_{x=l} = v'_{x=l} = 0. \quad (1.97)$$

Разделим балку, как и прежде, на четыре части и представим решение уравнения (1.96) в виде

$$v(x) = \sum_k a_k \left(\frac{x}{l}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (1.98)$$

Число членов ряда (1.98) определяется числом узловых точек, в которых должны быть удовлетворены уравнения (1.96), и числом удовлетворяемых граничных условий (1.97). В данном случае при трех точках коллокации и четырех граничных условиях в (1.98) будет семь членов, т. е.

$$v(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{l} + a_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + a_3 \left(\frac{x}{l}\right)^3 + a_4 \left(\frac{x}{l}\right)^4 + a_5 \left(\frac{x}{l}\right)^5 + a_6 \left(\frac{x}{l}\right)^6. \quad (1.99)$$

Подставим (1.99) в (1.96) и получим уравнение

$$24a_4 + 120a_5 \frac{x}{l} + 360a_6 \frac{x^2}{l^2} = \frac{ql^4}{EI_0}, \quad (1.100)$$

которое при $x_1 = l/4$, $x_2 = l/2$, $x_3 = 3l/4$ дает алгебраические уравнения

$$\begin{aligned} 24a_4 + 30a_5 + 22,5a_6 &= q_1 l / EI_0, \\ 24a_4 + 60a_5 + 90a_6 &= q_2 l / EI_0, \\ 24a_4 + 90a_5 + 202,5a_6 &= q_3 l / EI_0. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Граничные условия (1.97) с учетом (1.99) дают

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_1 = 0, \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 &= 0, \\ a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 + 15a_6 &= 0. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Из совместного решения (1.101) и (1.102) для случая равномерной нагрузки q_0 имеет коэффициенты

$$a_0 = a_1 = a_5 = a_6 = 0, \quad a_2 = \frac{q_0 l^4}{16EI_0}, \quad a_3 = -\frac{5q_0 l^4}{48EI_0}, \quad a_4 = \frac{q_0 l^4}{24EI_0},$$

которые после подстановки в (1.99) дают точное решение

$$v(x) = \frac{q_0 l^4}{EI_0} \left[\frac{1}{16} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{5}{48} \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right].$$

В заключение отметим, что приведенные выше методы, в особенности методы конечных разностей и локальных вариаций, универсальны, но связаны с трудоемкими вычислениями. Однако возможности их для решения сложных, в том числе нелинейных задач строительной механики, а также применение вычислительных машин привело к распространению их на практике.

Из других дискретных методов особенно широко применяется так называемый метод конечных элементов (МКЭ), согласно которому упругая система разбивается на отдельные конструктивные элементы или фрагменты различной структуры. Решение строится на основе вариационных принципов с использованием локальной аппроксимации, заданной для каждого конечного элемента в отдельности. Подробно этот метод изложен в гл. 7.

ГЛАВА 2

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

2.1. ФЕРМЕННЫЕ, РАМНЫЕ И КОМБИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

2.1.1. Определения. Расчетные схемы

Конструктивные элементы летательного аппарата можно свести к некоторым типовым расчетным моделям, одной из которых является стержневая система.

Приведем некоторые определения. *Стержень* — это тело, у которого один размер (длина) значительно превосходит два других (поперечных) размера.

Геометрическое место центров тяжести поперечных сечений стержня называют его осью. Ось стержня может быть прямолинейной и криволинейной, а поперечное сечение постоянным или переменным. Примерами прямолинейных и криволинейных стержней, работающих на изгиб, являются балки и рамы.

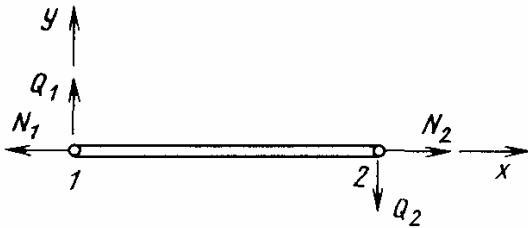
Будем рассматривать три основные группы стержневых систем: фермы, рамы и комбинированные системы, состоящие из рамно-балочных и ферменных элементов. Стержни, входящие в состав стержневых систем, соединяются друг с другом в узлах. Для реальных конструкций это соединение является упругоподатливым. Однако в расчетных схемах в одних случаях соединение стержней в узле принимается шарнирным, в других — жестким.

Стержневая система называется фермой, если можно принять, что все стержни соединены между собой по концам с помощью идеальных шарниров, а нагрузки приложены только к узлам.

В плоской ферме в узлах предполагаются цилиндрические шарниры, причем ось шарнира перпендикулярна плоскости фермы, в пространственной — шаровые шарниры. В связи с тем, что моменты в узлах при такой расчетной схеме отсутствуют, можно показать, что прямолинейные стержни фермы работают только на растяжение—сжатие. Записывая уравнения равновесия для стержня, показанного на рис. 2.1, получим $\Sigma M_1 = \Sigma M_2 = 0$, откуда $Q_1 = Q_2 = 0$ и $\Sigma x = 0$, откуда $N_1 = N_2 = N$. Нормальные напряжения σ равномерно распределены по сечению стержня и заменяются усилием $N = \sigma F$, где F — площадь поперечного сечения стержня.

Заметим, что в реальной ферменной конструкции стержни работают также на изгиб, однако изгибные напряжения незначительны и ими можно пренебречь.

Рис. 2.1. К доказательству работы стержней на растяжение—сжатие



Модель называется рамой, если места соединений прямолинейных или криволинейных стержней следует считать жесткими. В

рамах стержни работают, главным образом, на изгиб, а также на растяжение—сжатие. Стержни пространственной рамы могут работать и на кручение.

В комбинированных системах предполагается, что узлы рамно-балочных элементов — жесткие, а ферменных — шарнирные, при этом на рамы и балки действует произвольная нагрузка, а на фермы — лишь сосредоточенные узловые силы.

При расчете стержневых систем будем предполагать, что они обладают линейностью (в силу малости перемещений уравнения равновесия составляются для недеформированной системы, а для материала стержней справедлив закон Гука), т. е. можно применять принцип независимости действия сил, который будет широко использоваться в дальнейшем.

2.1.2. Геометрическая неизменяемость системы

Система, состоящая из элементов, может воспринимать нагрузку только тогда, когда при внешнем воздействии она является геометрически неизменяемой.

Изготовленная из абсолютно жесткого материала геометрически неизменяемая система вообще не изменяет своей формы. Стержни реальной системы обладают конечной жесткостью, поэтому будем называть геометрически неизменяемой систему, в которой при нагружении изменение конфигурации происходит только за счет деформации материала стержней.

Для того чтобы судить о геометрической неизменяемости или геометрической изменяемости системы, обычно проводят ее кинематический анализ. Этот анализ может быть осуществлен непосредственно или с помощью формул, определяющих число степеней свободы системы. Под числом степеней свободы W будем понимать число взаимно независимых движений, которое может совершать система. Для вывода формул, определяющих W , мысленно отделим узлы от стержней и получившееся таким образом число свободных точек (узлов) обозначим через Y . Поскольку каждый свободный узел как точка обладает на плоскости двумя, а в пространстве — тремя степенями свободы, система из Y -узлов имеет соответственно $2Y$ - и $3Y$ -степеней свободы.

Наложим далее на узлы связи в виде стержней. Поскольку стержень на плоскости и в пространстве устраняет одну степень свободы (препятствует смещению вдоль своей оси), оконча-

но для плоской и пространственной ферм соответственно получим

$$W_{пл} = 2U - C,$$

$$W_{пр} = 3U - C, \quad (2.1)$$

где C — число стержней. Для фермы, показанной на рис. 2.2, $U = 7$, $C = 14$, т. е. $W_{пл} = 2 \cdot 7 - 14 = 0$. Из формул (2.1) следует, что возможны три варианта:

1) если $W > 0$, система подвижна, не имеет достаточного количества связей, т. е. является геометрически изменяемой (механизмом);

2) если $W = 0$, система имеет достаточное количество связей, чтобы быть геометрически неизменяемой;

3) при $W < 0$ в системе есть лишние связи.

В дальнейшем будем рассматривать фермы, у которых $W < 0$, так как геометрически изменяемая система в общем случае не воспринимает нагрузки. Отметим, что проведенный анализ справедлив для ферм с опорными узлами. Фермы, нагруженные самоуравновешенной системой сил и не присоединенные к опорам, внутренне геометрически неизменяемые, всегда имеют на плоскости три, а в пространстве шесть степеней свободы, как соответствующее свободное тело. Действительно, фермы, показанные на рис. 2.3, очевидно, воспринимают приложенные к узлам силы, причем из формул (2.1) следует, что $W_{пл} = 2 \cdot 3 - 3 = 3$, $W_{пр} = 3 \cdot 5 - 9 = 6$. При определении числа степеней свободы рамных и комбинированных систем удобно вначале найти количество степеней свободы всех отдельных элементов, от которого затем следует отнять количество накладываемых связей. Отдельные геометрически неизменяемые плоские элементы (рамы, балки, стержни) будем называть дисками и обозначать D , а пространственные элементы — телами (T). Очевидно, что диск на плоскости обладает тремя степенями свободы, а тело в пространстве — шестью, поэтому в общем случае для комбинированных систем,

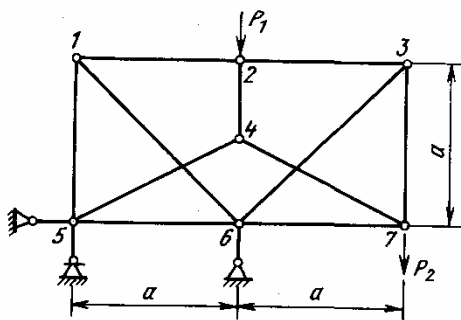


Рис. 2.2. Плоская прикрепленная ферма

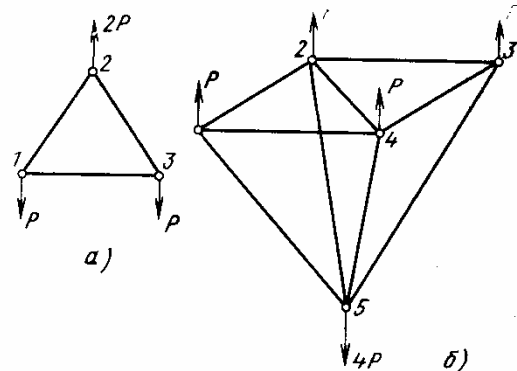


Рис. 2.3. Плоская (а) и пространственная (б) фермы, не прикрепленные к опорам

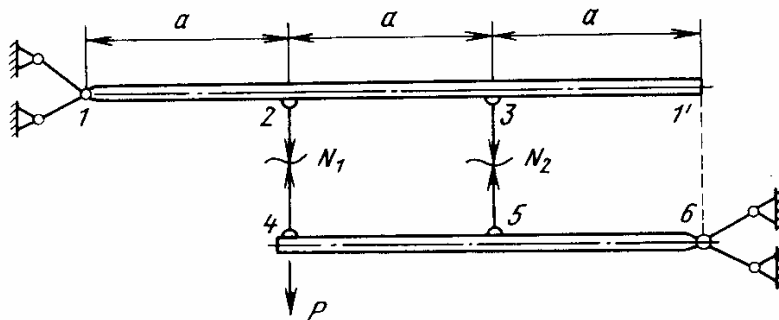


Рис. 2.4. Комбинированная стержневая система

состоящих из рамно-балочных и ферменных элементов, вместо (2.1) можно записать

$$W_{пл} = 3D + 2U - C, \quad (2.2)$$

$$W_{пр} = 6T + 3U - C,$$

где D (T) — число дисков (тел); U — число узлов ферменной части системы; C — суммарное число стержней (образующих ферменные части), соединяющих их с дисками или телами, и опорных. Отметим, что в U не входят опорные узлы и узлы, связанные с дисками и телами. В частности, для системы, показанной на рис. 2.4, имеем $W_{пл} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 6 = 0$.

Анализ формул (2.2) аналогичен проведенному выше анализу равенств (2.1). На основании изложенного можно заключить, что для геометрической неизменяемости плоских и пространственных стержневых систем, прикрепленных к опорам, необходимо выполнение условия

$$W \leq 0, \quad (2.3)$$

а для свободных плоских и пространственных систем соответственно необходимо, чтобы

$$W_{пл} \leq 3, \quad W_{пр} \leq 6. \quad (2.4)$$

Условия (2.3) и (2.4) являются необходимыми, но не достаточными, так как геометрическая неизменяемость обеспечивается не только потребным количеством стержней, но и порядком их расположения, который не учитывается в формулах для W . Действительно, переставим, например, в ферме, показанной на рис. 2.2, стержень 2—4 в положение 4—6. Тогда по-прежнему $W = 0$, так как число стержней не изменилось, однако полученная система уже не может воспринимать силу P_1 . В простейших случаях геометрическая неизменяемость может быть установлена непосредственно. Из формул (2.1) и достаточно очевидных соображений вытекает, что элементарная геометрически неизменяемая ячейка фермы образуется узлом, который связывает два стержня, не лежащих на одной прямой (на плоскости), или три стержня, не лежащих в одной плоскости (в пространстве).

Если в результате мысленного отбрасывания таких ячеек остается заведомо геометрически неизменяемая (или изменяемая)

система, то этим свойством, очевидно, обладает и исходная система.

Существуют и более сложные методы кинематического анализа, однако следует иметь в виду, что геометрическая изменяемость системы всегда обнаруживается в процессе ее расчета. Признаком геометрической неизменяемости системы является ограниченность по величине усилий в ее элементах. Рассмотрим, например, комбинированную систему, показанную на рис. 2.4. Составляя суммы моментов для балок относительно узлов 1 и 6, получим

$$\begin{aligned} N_1 a + N_2 2a &= 0, \\ N_1 2a + N_2 a &= P 2a. \end{aligned}$$

Согласно правилу Крамера отсюда

$$N_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 2a \\ 2Pa & a \end{vmatrix}, \quad N_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 2a & 2Pa \end{vmatrix},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a & 2a \\ 2a & a \end{vmatrix}$

— определитель системы. Очевидно, что N_1 и N_2 будут иметь конечные значения, если $\Delta \neq 0$. В рассматриваемом случае $\Delta = -3a^2$, т. е. система является геометрически неизменяемой. Допустим теперь, что опора верхней балки (см. рис. 2.4) перенесена из сечения 1 в сечение 1'. Тогда суммы моментов относительно опорных узлов 1' и 6 дадут уравнения $N_1 2a + N_2 a = 0$, $N_1 2a + N_2 a = P 2a$, для которых $\Delta = 0$. Рассматриваемая система является геометрически изменяемой и представляет собой шарнирный четырехзвенник.

Для того чтобы стержневая система была геометрически неизменяемой, необходимо также предъявить определенные требования к опорам (опорным стержням), так как свободная (незакрепленная) ферма может быть жесткой, а вся система может оказаться механизмом. Очевидно, что для плоской системы, обладающей тремя степенями свободы, должно быть не менее трех опорных стержней-связей, а для пространственной (шесть степеней свободы) — не менее шести. Кроме того, опорные стержни не должны пересекаться в одной точке, не должны быть параллельными и пересекать одну ось.

2.2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

2.2.1. Статически определимые системы

Распространенным классом геометрически неизменяемых систем являются стержневые системы, у которых $W = 0$. В таких системах нет лишних связей — удаление любой связи (стержня) превращает систему в механизм, при этом уравнений равновесия оказывается больше, чем входящих в них неизвестных силовых факторов. При $W = 0$ число уравнений равновесия

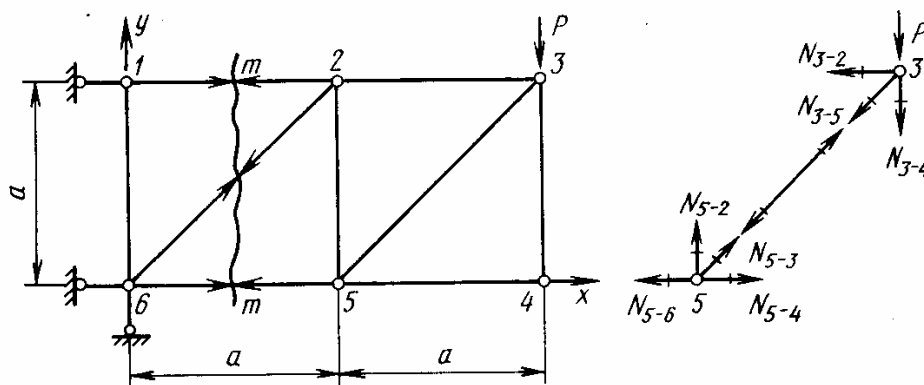


Рис. 2.5. Статически определимая ферма

в точности совпадает с числом неизвестных силовых факторов. Последние однозначно определяются из уравнений равновесия, т. е. система является статически определимой.

Для составления уравнений равновесия используется известный из курса сопротивления материалов метод сечений, согласно которому стержневая система мысленно делится сечениями на части, а действие одной части на другую заменяется внутренними силовыми факторами, равными по величине и противоположно направленными. Пусть, например, координатная ось x направлена по оси стержня, а оси y и z расположены в плоскости поперечного сечения. Внутренние силовые факторы в сечении можно привести к главному вектору и главному моменту, а затем разложить на составляющие по осям, т. е. ввести осевую силу N_x , перерезывающие силы Q_y , Q_z , крутящий момент M_x и изгибающие моменты M_y , M_z . Указанные составляющие находятся из уравнений равновесия внутренних и внешних усилий (сил и моментов), действующих на одну из частей рассеченного стержня или стержневой системы (обычно на ту, где проекции и моменты вычисляются проще).

Поскольку методы расчета балок и рам достаточно полно излагаются в курсе сопротивления материалов, остановимся на особенностях расчета ферм. Основными неизвестными здесь являются усилия в стержнях N , которые постоянны по длине соответствующих стержней. Неизвестные усилия будем направлять от узла, считая их растягивающими, и обозначать номерами узлов, которые они соединяют, причем $N_{i-j} = N_{j-i}$ (рис. 2.5). При составлении уравнений равновесия обычно стараются применять такие методы, которые избавляют от решения системы совместных алгебраических уравнений. Рассмотрим простейшие методы определения усилий в статически определимых фермах.

2.2.2. Метод вырезания узлов

Согласно этому методу мысленно вырезается узел, к нему прикладываются внешние силы (если они действуют на рассматриваемый узел), усилия — реакции в разрезанных стерж-

нях и составляются уравнения равновесия. В связи с тем, что для плоского узла можно приравнять нулю суммы проекций на две, а для пространственного — на три оси, для плоских ферм таких уравнений будет $2U$, а для пространственных — $3U$. Используя их, можно найти усилия во всех стержнях, в том числе и в опорных. Порядок составления уравнений целесообразно выбирать таким образом, чтобы они разделялись на взаимно независимые системы. При этом расчет плоской фермы целесообразно начинать с вырезания узла, в котором сходятся два стержня, а пространственной — с узла, в котором сходятся три стержня (если такие узлы имеются в системе).

Например, для фермы, показанной на рис. 2.5, расчет следует начинать с вырезания узла 4. Тогда из условия $\sum x = 0$ следует $N_{4-5} = 0$, а из $\sum y = 0$ $N_{4-3} = 0$. Затем переходим к узлу 3 ($\sum y = 0 \rightarrow N_{3-5} = -\sqrt{2}P$, $\sum x = 0 \rightarrow N_{3-2} = P$), далее последовательно к узлам 5, 2, 1 и 6. Для фермы, показанной на рис. 2.2, рассматривая узел 2, находим $N_{2-4} = -P_1$, переходим к узлу 4, затем последовательно к узлам 7, 3, 2, 1, 6 и 5.

Недостатком метода вырезания узлов является зависимость результатов последующих вычислений от результатов предыдущих и, как следствие, при достаточно большой вычислительной цепи накопление погрешностей.

2.2.3. Метод моментных точек (для плоских ферм) и моментных осей (для пространственных)

При использовании этого метода для определения неизвестных усилий записываются уравнения равновесия моментов отсеченной части фермы относительно точек и осей, которые выбираются так, чтобы в каждое уравнение входило минимальное число неизвестных. Например, при определении усилия N_{5-6} (см. рис. 2.5) рассматривается уравнение моментов относительно узла 2, а при нахождении N_{1-2} — относительно узла 6 для части фермы, лежащей справа от сечения $m-m$. Если два из стержней, попавших в сечение, параллельны, вместо уравнения моментов обычно используется уравнение проекций. Так, чтобы найти N_{2-6} , можно записать для отсеченной части фермы уравнение проекций на ось y , откуда $N_{2-6} = -\sqrt{2}P$.

В статически определимой ферме удаление даже одного стержня превращает ее в механизм, т. е. расстояние между узлами, ранее связанными удаленным стержнем, может свободно изменяться. А это значит, что при установке вместо удаленного стержня другого (удлиненного или укороченного) усилий в системе не возникает. Отсюда следует важное свойство: изменение температуры, смещение опор, неточность изготовления и сборки не вызывают усилий в стержнях статически определимой фермы.

2.2.4. Определение перемещений узлов статически определимых ферм

Пусть статически определимая ферменная конструкция загружена системой сил, приложенных в узлах, и пусть температура i -го стержня изменяется на величину t_i .

Для определения перемещения k -го узла фермы в заданном направлении можно воспользоваться теоремой Кастильяно (см. разд. 1.4.4).

$$\Delta_k = \frac{\partial \bar{U}}{\partial P_k}, \quad (2.5)$$

где Δ_k — искомое перемещение; P_k — сила, приложенная в k -м узле по заданному направлению; $\bar{U}$ — дополнительная потенциальная энергия.

Если сила в узле, для которого находится перемещение, отсутствует, в выражение для $\bar{U}$ вводится в заданном направлении фиктивная сила, принимаемая впоследствии равной нулю, т. е.

$$\Delta_k = \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial P_k} \right)_{P_k=0}. \quad (2.5')$$

Для ферменной конструкции, имеющей n стержней, можно записать

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_i^2}{E_i} + \sigma_i \alpha_i t_i \right) F_i dx_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{N_i^2 l_i}{2 E_i F_i} + N_i \alpha_i t_i l_i \right). \quad (2.6)$$

Здесь l_i — длина i -го стержня; α_i — коэффициент линейного расширения; F_i — площадь поперечного сечения стержня.

Подставив (2.6) в (2.5), получим

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^n \left(\frac{N_i l_i}{E_i F_i} + \alpha_i t_i l_i \right) \frac{\partial N_i}{\partial P_k}. \quad (2.7)$$

Для преобразования формулы (2.7) к окончательному виду запишем усилия N_i в форме $N_i = N_i^P + N'_{ik} P_k$, где N_i^P — усилия в стержнях от внешней нагрузки; N'_{ik} — усилия от силы $P_k = 1$. Таким образом, $\partial N_i / \partial P_k = N'_{ik}$. Учитывая далее, что сила P_k фактически к системе не приложена, следует положить $P_k = 0$, т. е. $N_i = N_i^P$ и (2.7) принимает вид

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^n \left(\frac{N_i^P N'_{ik} l_i}{E_i F_i} + N'_{ik} \alpha_i t_i l_i \right). \quad (2.8)$$

Таким образом, для определения перемещения узла статически определимой фермы необходимо найти усилия от внешней нагрузки N_i^P , усилия N'_{ik} от единичной нагрузки, приложенной к узлу k

по направлению искомого перемещения. Отметим, что формула (2.8), как следует из вывода теоремы Кастильяно (гл. 1, разд. 1.4.4), по-существу, определяет проекцию полного перемещения на направление единичной силы.

2.3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

2.3.1. Определение усилий в стержнях

Рассмотрим статически неопределимую стержневую систему, для которой по формуле (2.3) имеем, например, $W = -m$. Число m определяет степень статической неопределимости, т. е. число связей, усилия в которых не могут быть определены из уравнений равновесия.

Перейдем от заданной статически неопределимой фермы к так называемой основной системе, мысленно разрезав m стержней. Основная система является, таким образом, статически определимой и должна быть геометрически неизменяемой. Отметим, что выбранная основная система может быть и статически неопределимой. В результате расчета основной системы могут быть найдены усилия в стержнях от внешних нагрузок $(N_i^P)_0$. Например, для фермы, показанной на рис. 2.6, а, $W = 2U - C = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, т. е. $m = 1$. Основная система строится, например, путем разрезания стержня 0—3 (рис. 2.6, б), причем $(N_{01}^P)_0 = P$, $(N_{02}^P)_0 = 0$ и, очевидно, $(N_{03}^P)_0 = 0$.

Неизвестные усилия в разрезанных стержнях обозначим через $X_1, X_2 \dots X_m$ и в соответствии с принципом независимости действия сил запишем суммарные усилия в виде

$$N_t = (N_t^P)_0 + \sum_{j=1}^m N_t^{(j)} X_j, \quad (2.9)$$

где $N_i^{(j)}$ — усилия в стержнях от сил $X_j = 1$, приложенных к j -му стержню. В частности, для рассматриваемого примера из рис. 2.6, в при $X_1 = 1$ получаем $N_{01}^{(1)} = 1$, $N_{02}^{(1)} = -\sqrt{2}$, $N_{03}^{(1)} = 1$. Таким

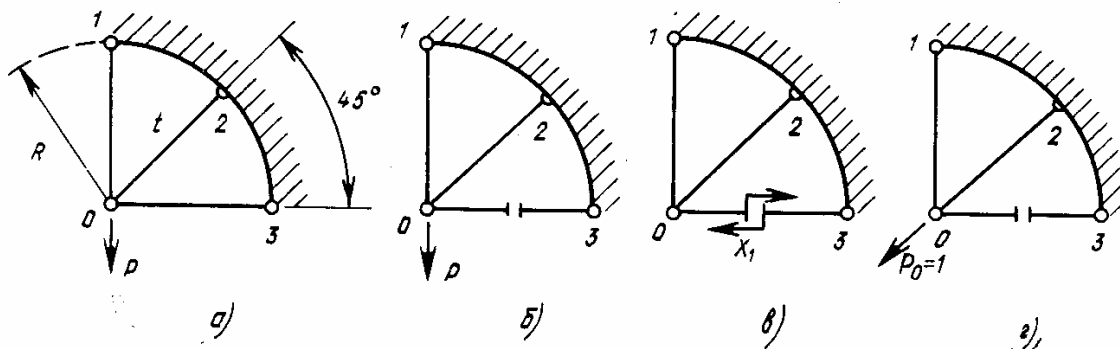


Рис. 2.6. Статически неопределимая стержневая система

образом, для определения N_i необходимо найти m усилий X_j . С этим обстоятельством и связано название метода (метода сил).

Неизвестные усилия X_j находятся из условий неразрывности деформаций стержней в местах разрезов. Эти условия могут быть записаны с помощью принципа наименьшей работы (см. гл. 1, разд. 1.4.3) и имеют вид

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial X_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (2.10)$$

Подставляя усилия (2.9) в выражение для $\bar{U}$ (2.6) и раскрывая уравнения (2.10), получим так называемую каноническую систему уравнений метода сил

$$\sum_{j=1}^m \delta_{kj} X_j + \Delta_{kP} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (2.11)$$

где $\delta_{kj} = \delta_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^{(j)} N_i^{(k)} l_i}{E_i F_i}$,

$$\Delta_{kP} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{(N_i^P)_0 N_i^{(k)} l_i}{E_i F_i} + N_i^{(k)} \alpha_i t_i l_i \right]. \quad (2.12)$$

Здесь m уравнений (2.11) позволяют найти все X_j . В левой части k -го уравнения (2.11) записано взаимное смещение сечений k -го стержня в месте разреза от сил X_j и внешних воздействий. В силу того, что в действительности стержень является сплошным, это смещение, естественно, должно быть равно нулю.

После определения силы X_j из системы (2.11) усилия в стержнях находятся по формуле (2.9).

В частности, для рассматриваемого примера (температура в наклонном стержне изменяется на величину t) (см. рис. 2.6, а) имеем

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\text{где } \delta_{11} = \frac{R}{EF} [1^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2] = \frac{4R}{EF}; \quad \Delta_{1P} = \frac{PR}{EF} - \alpha t R \sqrt{2}.$$

Отсюда

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{1}{4} P + \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha t EF;$$

$$N_{01} = P + X_1 = \frac{3}{4} P + \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha t EF;$$

$$N_{02} = -\sqrt{2} X_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} P - \frac{1}{2} \alpha t EF;$$

$$N_{03} = X_1 = -\frac{1}{4} P + \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha t EF.$$

2.3.2. Определение перемещений узлов

Определив силы X_j , их можно далее отнести к системе внешних нагрузок и воспользоваться формулой (2.8). При этом в ней следует принять $N_i^P = N_i$, где N_i определяются равенствами (2.9), а единичную силу $P_k = 1$ прикладывать в основной, статически определимой системе, т. е. $N'_{ik} = (N'_{ik})_0$. Следовательно,

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^n \left[\frac{N_i (N'_{ik})_0 l_i}{E_i F_i} + (N'_{ik})_0 \alpha_i t_i l_i \right]. \quad (2.13)$$

Найдем смещение Δ_0 узла O системы, показанной на рис. 2.6, а по направлению $O-2$. Из рис. 2.6, г и формулы (2.13) имеем

$$(N'_{01})_0 = (N'_{03})_0 = 0, \quad (N'_{02})_0 = 1,$$

$$\Delta_0 = \left(\frac{N_{02} R}{EF} + \alpha t R \right) 1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{PR}{EF} + \frac{1}{2} \alpha t R.$$

2.3.3. Некоторые обобщения

Порядок расчета ферм методом сил можно легко обобщить на расчет любых стержневых систем. Пусть в поперечных сечениях стержней системы действуют силы и моменты N_x , Q_y , Q_z , M_x , M_y , M_z (рис. 2.7). Учитывая, что работа каждой из этих обобщенных сил на соответствующем обобщенном перемещении, вызванном остальными силами, равна нулю, можно получить следующее выражение для дополнительной потенциальной энергии:

$$\bar{U} = \sum \int \left(\frac{N_x^2}{2EF} + k_y \frac{Q_y^2}{2GF} + k_z \frac{Q_z^2}{2GF} + \frac{M_x^2}{2GI_{кр}} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} \right) dx. \quad (2.14)$$

Здесь интегралы берутся по длине элементов, а суммирование производится по всем элементам системы: E , G — модуль упругости и модуль сдвига; F , I_y , I_z , $I_{кр}$ — площадь, моменты инерции поперечного сечения при изгибе и кручении; k_y , k_z — коэффициенты, характеризующие форму сечения, например

$$k_y = \frac{F}{I_z^2} \int_F \frac{S_z^2}{b_z^2} dF,$$

где S_z — статический момент отсеченной части сечения; b_z — размер поперечного сечения по

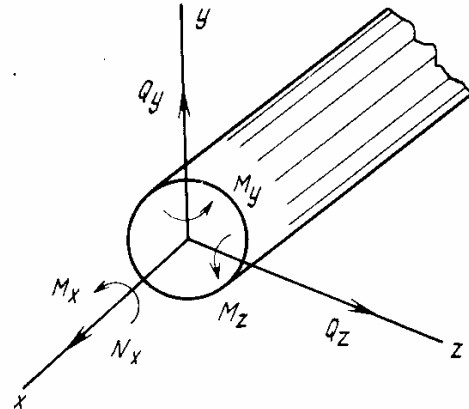


Рис. 2.7. Силовые факторы, действующие в сечении стержня

координате z . В частности, для прямоугольного сечения $k = 1, 2$; для круглого — $k = 32/27$. Заметим, что выражение (2.14) справедливо также и для криволинейных стержней малой кривизны. Для раскрытия статической неопределенности системы, т. е. для нахождения обобщенных усилий $X_1, X_2 \dots X_m$ в лишних связях, как и в случае ферменной конструкции, используем условия (2.10). Предварительно по аналогии с (2.9) запишем выражения для сил и моментов в произвольном сечении элементов системы

$$\begin{aligned} N_x &= (N_x^P)_0 + \sum_{j=1}^m N_x^{(j)} X_j, \\ Q_y &= (Q_y^P)_0 + \sum_{j=1}^m Q_y^{(j)} X_j, \\ &\dots \dots \dots \\ M_z &= (M_z^P)_0 + \sum_{j=1}^m M_z^{(j)} X_j, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $(N_x^P)_0$ и т. д. — силовые факторы, возникающие в основной системе от внешних нагрузок; $N_x^{(j)}$ и т. д. — силовые факторы от единичных сил $X_j = 1$.

Теперь условия (2.10) с учетом (2.14) и (2.15) можно записать в виде системы канонических уравнений метода сил (2.11). При этом коэффициенты этих уравнений вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \delta_{kj} = \delta_{jk} = \sum \int & \left(\frac{N_x^{(j)} N_x^{(k)}}{EF} + k_y \frac{Q_y^{(j)} Q_y^{(k)}}{GF} + k_z \frac{Q_z^{(j)} Q_z^{(k)}}{GF} + \right. \\ & \left. + \frac{M_x^{(j)} M_x^{(k)}}{GI_{\text{кр}}} + \frac{M_y^{(j)} M_y^{(k)}}{EI_y} + \frac{M_z^{(j)} M_z^{(k)}}{EI_z} \right) dx, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\Delta_{kP} = \sum \int \left[\frac{(N_x^P)_0 N_x^{(k)}}{EF} + \dots + \frac{(M_z^P)_0 M_z^{(k)}}{EI_z} \right] dx.$$

Обычно для ферм учитываются только осевые силы N_x , а для рам и балок влиянием осевых и поперечных сил пренебрегают и учитывают моменты, так что выражения (2.16) упрощаются.

Коэффициенты канонических уравнений δ_{kk} , имеющие одинаковые индексы, называются главными, они всегда положительны. Коэффициенты с неодинаковыми индексами δ_{kj} называются побочными и могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

В тех случаях, когда кроме внешних нагрузок необходимо учесть температурное воздействие, в свободные члены системы добавляются температурные слагаемые. Пусть, например, t — приращение температуры на оси стержня, t' — разность приращений

температур у крайних волокон поперечного сечения с высотой h по оси y (см. рис. 2.7). Тогда

$$\Delta_{kP} = \sum \int \left[\frac{(N_x^P)_0 N_x^{(k)}}{EF} + \dots + \frac{(M_z^P)_0 M_z^{(k)}}{EI_z} \right] dx + \\ + \sum \int \left[N_x^{(k)} \alpha t + \frac{M_z^{(k)}}{h} \alpha t' \right] dx. \quad (2.17)$$

Перемещения определяются по формуле, обобщающей (2.13), т. е.

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^n \int \left[\frac{N_x (N'_{xk})_0}{EF} + \frac{k_y Q_y (Q'_{yk})_0}{GF} + \dots + \frac{M_z (M'_{zk})_0}{EI_z} \right] dx + \\ + \sum_{i=1}^n \int \left[(N'_{xk})_0 \alpha t + \frac{(M'_{zk})_0}{h} \alpha t' \right] dx,$$

где $(N'_{xk})_0$ и т. д. — силовые факторы, возникающие в элементах основной системы от силы $P_k = 1$, приложенной в точке k , где ищется перемещение в заданном направлении.

2.3.4. Использование симметрии при расчете рам

При расчете симметричных рам можно ввести некоторые упрощения, особенно, если нагрузка симметрична или обратносимметрична. Так, например, рама, показанная на рис. 2.8, является системой трижды статически неопределимой. Однако, если при выборе основной системы осуществить вертикальный разрез, в нем (в силу симметрии нагрузки) будут лишь симметричные силовые факторы — изгибающий момент X_1 и продольная сила X_2 , а обратносимметричный фактор — перерезывающая сила $X_3 = 0$. При горизонтальном разрезе (в силу обратной симметрии нагрузки) присутствует лишь X_3 , а $X_1 = X_2 = 0$. В связи с этим в общем случае можно любую нагрузку разложить на симметричную и обратносимметричную составляющие и вместо одной системы уравнений с полным числом неизвестных рассматривать две независимые системы, причем одна содержит только симметричные неизвестные, а другая — только обратносимметричные (рис. 2.9).

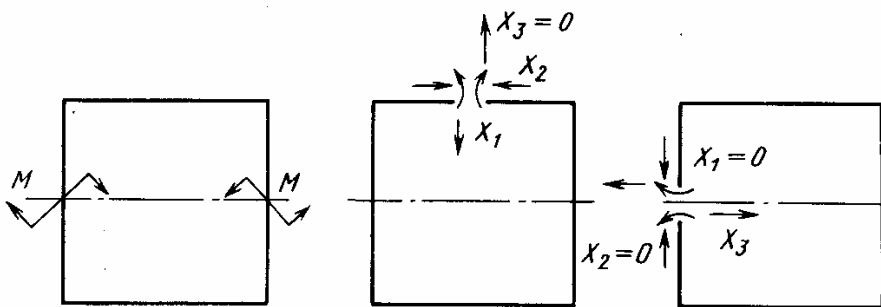


Рис. 2.8. К использованию симметрии при расчете рам

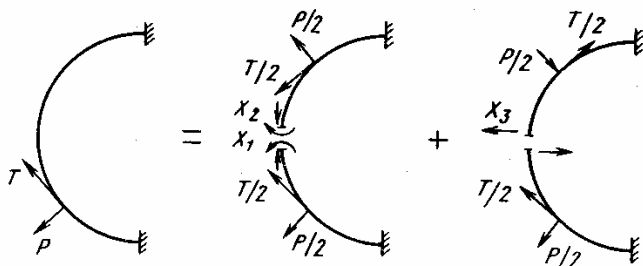


Рис. 2.9. Расположение нагрузки на симметричную и антисимметричную составляющие

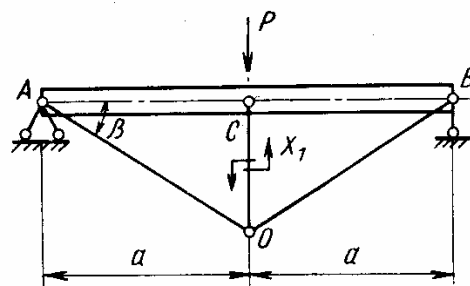


Рис. 2.10. К расчету комбинированной стержневой системы

2.3.5. Пример расчета комбинированной системы

Рассмотрим однажды статически неопределимую комбинированную систему (двухопорная балка с подкрепляющими стержнями), показанную на рис. 2.10.

Пусть жесткость балки на изгиб EI , жесткость стержней на растяжение—сжатие EF . Из рассмотрения геометрии системы найдем длину стержней: $l_{OC} = a \tan \beta$, $l_{OA} = l_{OB} = a / \cos \beta$. В качестве основной системы выберем систему с разрезанным вертикальным стержнем. Тогда из рассмотрения равновесия узла O получим $N_{OC} = X_1 = 1$, $N_{OA} = N_{OB} = -1/2 \sin \beta$. В соответствии с (2.16) коэффициенты системы (2.11) имеют вид

$$\delta_{11} = \frac{a}{EF} \left(\tan \beta + \frac{2}{4 \sin^2 \beta} \frac{1}{\cos \beta} \right) + \frac{a^3}{3EI} = (1 + k) \frac{a^3}{3EI},$$

$$\Delta_{1P} = \frac{Pa^3}{3EI},$$

где $k = \frac{3I}{a^2 F} \frac{1 + 2 \sin^3 \beta}{2 \sin^2 \beta \cos \beta}$.

В результате находим $X_1 = -\Delta_{1P} / \delta_{11} = -\frac{P}{1 + k}$. Дальнейший расчет двухопорной балки, нагруженной в точке C силой $P + X_1$, и системы двух стержней AO и OB , нагруженной в точке O силой X_1 , не представляет затруднений.

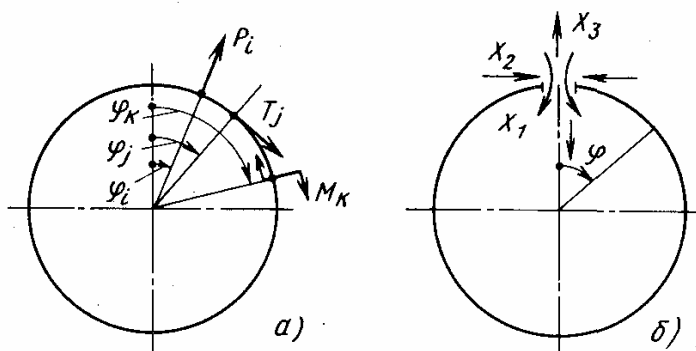
2.4. РАСЧЕТ ШПАНГОУТОВ

2.4.1. Определение усилий при нагружении в плоскости шпангоута

Применим метод сил к расчету часто встречающихся в конструкциях летательных аппаратов кольцевых рам (шпангоутов) постоянного сечения. Будем считать кольцо сравнительно тонким, т. е. имеющим высоту поперечного сечения не более $1/5$ радиуса; контур кольца отождествляем с линией центров тяжести сечений [11].

Рис. 2.11. К расчету кругового кольца

Пусть кольцо радиуса R нагружено в своей плоскости системой радиальных сил P_i ($i = 1, 2, \dots, n$), касательных сил T_j ($j = 1, 2, \dots, m$) и моментов M_k ($k = 1, 2, \dots, l$, рис. 2.11, а). При этом все нагрузки взаимно уравновешены, т. е.



$$\begin{aligned} \sum_1^n P_i \cos \varphi_i - \sum_1^m T_j \sin \varphi_j &= 0, \\ \sum_1^n P_i \sin \varphi_i + \sum_1^m T_j \cos \varphi_j &= 0, \\ \sum_1^m T_j R + \sum_1^l M_k &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Кольцевая рама трижды статически неопределима. За основные неизвестные примем X_1 (изгибающий момент), X_2 (продольную силу) и X_3 (перерезывающую силу), действующие в сечении $\varphi = 0$ (см. рис. 2.11, б). Тогда изгибающий момент в сечении φ выразится формулой

$$M(\varphi) = M_0^P + \sum_{r=1}^3 M_r X_r, \quad (2.19)$$

где M_0^P — момент от внешних сил в основной системе (разрезанном кольце); $M_1 = 1$, $M_2 = R(1 - \cos \varphi)$, $M_3 = R \sin \varphi$ — моменты от единичных сил $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$ соответственно.

Система канонических уравнений (2.11) после сокращения на постоянный множитель R/EI имеет вид (учитываются только изгибающие моменты)

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0,$$

$$\delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} = 0,$$

$$\text{где } \delta_{11} = \int_0^{2\pi} M_1^2 d\varphi = 2\pi, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \int_0^{2\pi} M_1 M_2 d\varphi = 2\pi R,$$

$$\delta_{22} = \int_0^{2\pi} M_2^2 d\varphi = 3\pi R^2, \quad \delta_{33} = \int_0^{2\pi} M_3^2 d\varphi = \pi R^2,$$

$$\Delta_{rP} = - \sum_{i=1}^n \int_{\varphi_i}^{\max \varphi_i} P_i R \sin(\varphi - \varphi_i) M_r d\varphi -$$

$$- \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j}^{\max \varphi_j} T_j R [1 - \cos(\varphi - \varphi_j)] M_r d\varphi - \sum_{k=1}^l \int_{\varphi_k}^{\max \varphi_k} M_k M_r d\varphi$$

$$(r = 1, 2, 3).$$

В коэффициентах Δ_{rP} предел интегрирования выбирается с учетом того, что в разрезанном кольце момент $M_0^P \equiv 0$ при $\varphi < \varphi_\lambda$ и $\varphi > \max \varphi_\lambda$ ($\lambda = i, j, k$).

Выполнив интегрирование и разрешив систему канонических уравнений относительно неизвестных сил X_r , придем с учетом равенств (2.18) к следующим выражениям:

$$X_1 = \sum_{i=1}^n P_i R \chi_{1P}(\varphi_i) + \sum_{j=1}^m T_j R \chi_{1T}(\varphi_j) + \sum_{k=1}^l M_k \chi_{1M}(\varphi_k),$$

$$X_2 = \sum_{i=1}^n P_i \chi_{2P}(\varphi_i) + \sum_{j=1}^m T_j \chi_{2T}(\varphi_j) + \sum_{k=1}^l \frac{M_k}{R} \chi_{2M}(\varphi_k),$$

$$X_3 = \sum_{i=1}^n P_i \chi_{3P}(\varphi_i) + \sum_{j=1}^m T_j \chi_{3T}(\varphi_j) + \sum_{k=1}^l \frac{M_k}{R} \chi_{3M}(\varphi_k). \quad (2.20)$$

Здесь

$$\chi_{1P}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} (1 + \varphi \sin \varphi), \quad \chi_{2P}(\varphi) = -\frac{\varphi \sin \varphi}{2\pi},$$

$$\chi_{3P}(\varphi) = -\frac{\varphi \cos \varphi}{2\pi}; \quad \chi_{1T}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} (\varphi \cos \varphi - \varphi - \sin \varphi),$$

$$\chi_{2T}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi), \quad \chi_{3T}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi);$$

$$\chi_{1M}(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} (\varphi + 2 \sin \varphi), \quad \chi_{2M}(\varphi) = \frac{1}{\pi} \sin \varphi,$$

$$\chi_{3M}(\varphi) = \frac{1}{\pi} \cos \varphi.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Шпангоут нагружен тремя симметрично расположенными радиальными силами P (рис. 2.12, а). Совмещая начало отсчета последовательно с точками A, B, C и учитывая, что $M_0^P(0) = M_2(0) = M_3(0) = 0$, имеем

$$M_A = -PR [\chi_{1P}(0) + \chi_{1P}(120^\circ) + \chi_{1P}(240^\circ)] =$$

$$= -PR (0,15916 + 0,44783 - 0,41819) = -0,189PR;$$

$$M_B = -PR [\chi_{1P}(60^\circ) + \chi_{1P}(180^\circ) + \chi_{1P}(300^\circ)] =$$

$$= -PR (0,30349 + 0,15916 - 0,56253) = 0,100PR;$$

$$M_C = -PR [\chi_{1P}(90^\circ) + \chi_{1P}(210^\circ) + \chi_{1P}(330^\circ)] =$$

$$= -PR (0,40916 - 0,13251 - 0,29918) = 0,0225PR.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 2.12, б.

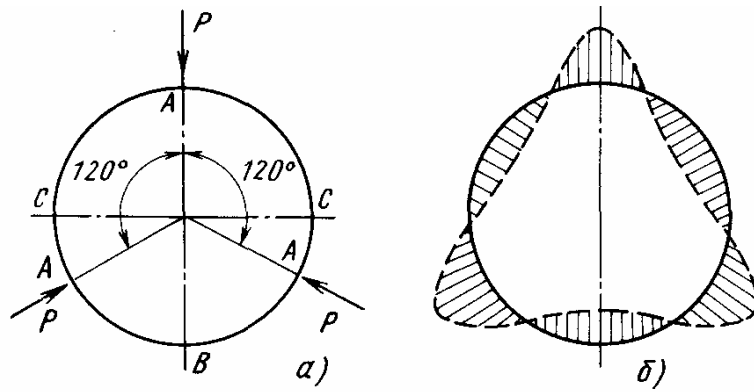


Рис. 2.12. Пример расчета кольца (а — схема нагружения, б — эпюра изгибающих моментов)

Пример 2. На шпангоут (рис. 2.13, а) действует сосредоточенная сила P и уравнивающий ее поток касательных усилий $q = \frac{P}{\pi R} \sin \alpha$. Чтобы получить выражение изгибающего момента $M(\alpha)$, возьмем произвольное сечение под углом α к вертикали и будем отсчитывать φ от этого сечения. На кольцо действует сила P , расположенная под углом $(2\pi - \alpha)$ относительно точки A , а также распределенная нагрузка q , которую можно представить как бесчисленное множество касательных сил $qR d\varphi = \frac{P}{\pi} \sin(\alpha + \varphi) d\varphi$. Тогда в соответствии с первым уравнением (2.20)

$$\begin{aligned}
 M_A = M(\alpha) &= PR\chi_{1P}(2\pi - \alpha) + \int_0^{2\pi} \frac{P}{\pi} \sin(\alpha + \varphi) R\chi_{1T}(\varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{PR}{2\pi} \left[1 + (2\pi - \alpha) \sin(2\pi - \alpha) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\alpha + \varphi) (\varphi \cos \varphi - \right. \\
 &\quad \left. - \sin \varphi - \varphi) d\varphi \right] = \frac{PR}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \alpha + \alpha \sin \alpha - \pi \sin \alpha \right). \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Отсюда, например, $M_B = M(0) = \frac{3PR}{4\pi} = 0,239PR$, $M_C = M(180^\circ) = \frac{PR}{4\pi} = 0,08PR$. Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 2.13, б.

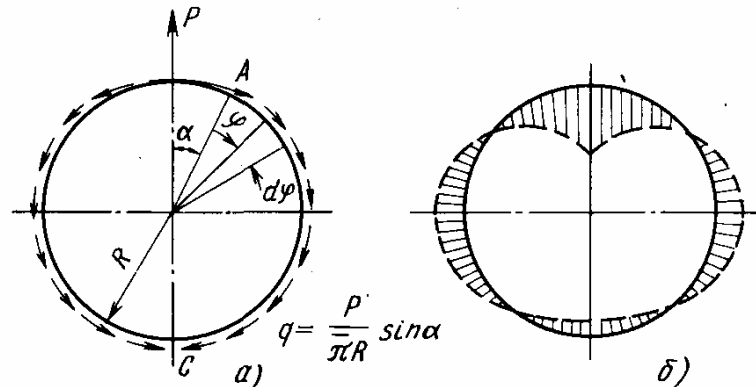


Рис. 2.13. Схема нагружения (а) и эпюра изгибающих моментов (б) шпангоута

Продольные и поперечные силы в сечениях шпангоута находятся из зависимостей, аналогичных (2.19):

$$N(\varphi) = N_0^P + \sum_{r=1}^3 N_r X_r = N_0^P + X_2 \cos \varphi - X_3 \sin \varphi;$$

$$Q(\varphi) = Q_0^P + \sum_{r=1}^3 Q_r X_r = Q_0^P + X_2 \sin \varphi + X_3 \cos \varphi.$$

Здесь N_0^P и Q_0^P — осевое усилие и поперечная сила от внешней нагрузки в основной системе (см. рис. 2.11, б), а X_2 , X_3 определяются равенствами (2.20).

2.4.2. Определение перемещений шпангоута

Взаимное смещение точек шпангоута может быть, как и ранее, найдено с помощью теоремы Кастильяно, однако на практике часто необходимо иметь более общее решение, определяющее распределение функции перемещений по контуру шпангоута. Это распределение может быть получено в результате интегрирования уравнений упругой линии шпангоута. Пусть суммарное перемещение точки A в положение A' определяется проекциями v , w или Δ_r , Δ_θ (рис. 2.14), которые связаны следующим образом:

$$\Delta_r = w \sin \varphi + v \cos \varphi, \quad (2.22)$$

$$\Delta_\theta = w \cos \varphi + v \sin \varphi.$$

В деформированном состоянии точка с полярными координатами $r = R$ и φ будет иметь координаты $r_1 = R + w$, $\varphi_1 = \varphi + v/R$. Удлинение оси шпангоута и изменение ее кривизны имеют вид

$$\varepsilon = \frac{ds_1 - ds}{ds}, \quad \kappa = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}. \quad (2.23)$$

Учитывая, что $ds = R d\varphi$, $ds_1 = r_1 d\varphi_1$ при малых перемещениях, из первого равенства (2.23) получим

$$\varepsilon \approx \frac{1}{R} \left(\frac{dv}{d\varphi} + w \right). \quad (2.24)$$

Кривизна оси шпангоута после деформации в полярных координатах определяется известным равенством

$$\frac{1}{R_1} = \frac{r_1^2 + 2(r_1')^2 - r_1 r_1''}{[r_1^2 + (r_1')^2]^{3/2}},$$

где $r_1' = \frac{dr_1}{d\varphi_1}$. Для малых перемещений окончательно получим

$$\kappa = -\frac{1}{R^3} \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right). \quad (2.25)$$

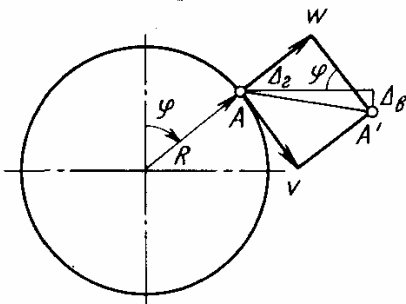


Рис. 2.14. К определению перемещений кругового кольца

При расчете шпангоутов обычно предполагается, что ось является нерастя-

жимой, т. е. $\varepsilon = 0$, а изменение кривизны κ связано с изгибающим моментом соотношением $M = EI\kappa$. Таким образом, из равенств (2.24), (2.25) имеем

$$\frac{dv}{d\varphi} + w = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = -\frac{M(\varphi) R^3}{EI}. \quad (2.27)$$

Поскольку зависимость $M(\varphi)$ известна из статического расчета, уравнение (2.27) позволяет найти w в виде

$$w = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + w^*, \quad (2.28)$$

где w^* — частное решение, соответствующее заданному моменту $M(\varphi)$. Перемещение v определяется из уравнения (2.26)

$$v = C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi - \int w^* d\varphi + C_3. \quad (2.29)$$

Найдем горизонтальную и вертикальную проекции перемещений. Из формул (2.22), (2.28), (2.29) имеем

$$\Delta_r = C_1 + C_3 \cos \varphi - \cos \varphi \int w^* d\varphi + w^* \sin \varphi, \quad (2.30)$$

$$\Delta_v = C_2 - C_3 \sin \varphi + \sin \varphi \int w^* d\varphi + w^* \cos \varphi.$$

Из равенств (2.29), (2.30) следует, что постоянные C_1, C_2, C_3 соответствуют смещениям шпангоута как твердого тела — горизонтальному, вертикальному и повороту относительно центра. Они должны быть определены из условий закрепления шпангоута.

Рассмотрим, например, шпангоут, показанный на рис. 2.13, а. Распределение изгибающего момента определяется в этом случае равенством (2.21) при $\alpha = \varphi$, а частное решение имеет вид

$$w^* = \frac{PR^3}{2\pi EI} \left(\frac{\varphi^2}{4} \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - \frac{\pi}{2} \varphi \cos \varphi - 1 \right). \quad (2.31)$$

Постоянные C_1 и C_3 найдем из условий симметрии: при $\varphi = 0$, $v = 0$ и $dw/d\varphi = 0$. Постоянную C_2 , определяющую вертикальное смещение, определим из интегрального условия

$$\int_0^\pi w \cos \varphi d\varphi = 0.$$

В результате получим

$$C_1 = \frac{PR^3}{4EI}, \quad C_2 = \frac{PR^3}{2\pi EI} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{8} \right), \quad C_3 = -\frac{PR^3}{2EI}$$

и согласно равенствам (2.28), (2.29), (2.31)

$$\begin{aligned} w &= \frac{PR^3}{2\pi EI} \left[\frac{1}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi - 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{3}{4} - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2} \right) \cos \varphi \right], \\ v &= - \frac{PR^3}{2\pi EI} \left[(\pi - \varphi) (1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{3} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{11}{4} - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2} \right) \sin \varphi \right]. \end{aligned}$$

2.4.3. О расчете шпангоутов, нагруженных перпендикулярно их плоскости

Расчет колец, нагруженных силами, перпендикулярными их плоскости, проводится аналогично предыдущему. В общем случае в сечениях шпангоута действуют изгибающий и крутящий моменты, а также перерезывающая сила. Чтобы раскрыть статическую неопределимость, разрежем кольцо по плоскости $\varphi = 0$ и приложим неизвестные изгибающий момент X_4 , крутящий момент X_5 и поперечную силу X_6 .

По аналогии с равенством (2.19) имеем

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= M_0^P + \sum_{r=4}^6 M_r X_r, \\ \mathfrak{M}(\varphi) &= \mathfrak{M}_0^P + \sum_{r=4}^6 \mathfrak{M}_r X_r, \end{aligned} \tag{2.32}$$

где M_0^P , $\mathfrak{M}_0^P$ — изгибающий и крутящий моменты в разрезанном кольце от внешних нагрузок; M_r , $\mathfrak{M}_r$ — моменты от единичных силовых факторов X_r . В отличие от нагружения кольца в плоскости в данном случае коэффициенты канонических уравнений будут содержать по два члена, учитывающих изгиб и кручение кольца. В результате получаются формулы для определения X_4 , X_5 , X_6 , по структуре аналогичные (2.20). Разнообразные методы расчета и формулы для определения усилий и перемещений в шпангоутах постоянной и переменной жесткости приводятся в справочной литературе [26].

2.5. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

2.5.1. Определение числа неизвестных

При расчете плоских статически неопределимых рам наряду с методом сил часто применяется метод перемещений, особенно эффективный для сложных систем с большим числом лишних связей и малой подвижностью узлов [27, 33].

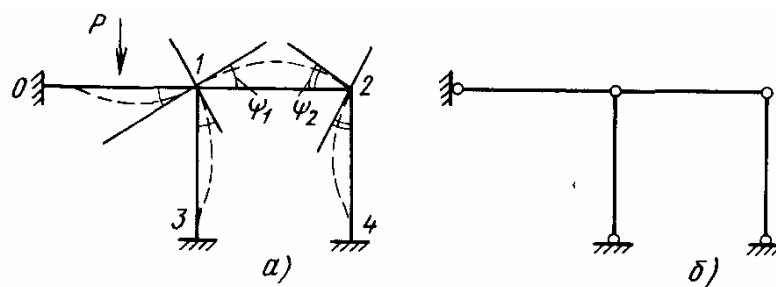


Рис. 2.15. Закрепленная рама (а) и ее шарнирная схема (б)

Прежде чем приступить к расчету по методу перемещений, необходимо установить степень кинематической неопределимости n . Это понятие в отличие от понятия степени статической неопределенности достаточно условно и зависит от принятой расчетной схемы, от степени точности определения перемещений и даже от наличия вспомогательных материалов (набора формул и таблиц), устанавливающих зависимость усилий от перемещений узлов рамы. Например, при наличии в системе криволинейного стержня, ось которого в расчетной схеме заменяется ломаной, n зависит от числа участков этой ломаной.

Будем рассматривать рамы с прямолинейными элементами и пренебрегать деформациями, вызванными продольными силами. Порядок определения числа n , т. е. количества неизвестных метода перемещений, зависит от вида рассматриваемой рамы, и, в частности, от того, какие перемещения допускают узлы рамы. В рамах первого типа узлы допускают только поворот. Пример такой рамы, когда каждый узел прикрепляется последовательно к двум другим узлам двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, показан на рис. 2.15, а. Линейные смещения узлов здесь отсутствуют, так как стержни — нерастяжимые, а система узлов образует жесткие треугольники $0-1-3$ и $1-2-4$. Если рассматриваемой раме поставить в соответствие так называемую шарнирную схему, когда все жесткие узлы рамы, в том числе опорные, заменяются шарнирными (см. рис. 2.15, б), то такая схема будет геометрически неизменяемой ($W = 2 \cdot 2 - 4 = 0$).

Расчет таких рам особенно прост — за неизвестные принимаются углы поворота жестких свободных узлов (в примере ψ_1 и ψ_2 , т. е. $n = 2$).

Рама второго типа, узлы которой допускают линейные смещения, показана на рис. 2.16, а; ее шарнирная схема (см. рис. 2.16, б) будет геометрически изменяемой ($W = 2 \cdot 2 - 3 = 1$). Поскольку стержень $1-2$ принимается нерастяжимым, смещения узлов 1 и 2 должны быть одинаковыми ($1-1' = 2-2' = \Delta$). За неизвестные в этом случае принимаются как углы поворота жестких узлов ψ_1, ψ_2 , так и линейное смещение Δ , т. е. $n = 3$.

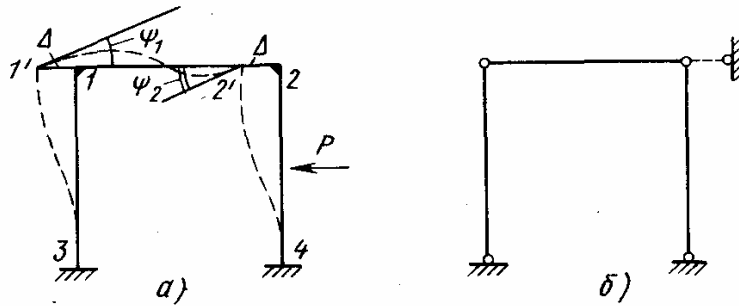


Рис. 2.16. Рама с линейным смещением узлов (а) и ее шарнирная схема (б)

Таким образом, в общем случае степень кинематической неопределимости находится по формуле

$$n = n_{\psi} + n_{\Delta}, \quad (2.33)$$

где n_{ψ} — число свободных рамных узлов; $n_{\Delta} = W$ — число степеней свободы соответствующей шарнирной схемы данной рамы.

2.5.2. Основная система и канонические уравнения

После установления степени кинематической неопределимости n образуем основную систему рамы путем наложения на ее узлы связей, препятствующих упругим перемещениям узлов (угловым и линейным). В соответствии с неизвестными эти связи будут двух видов: защемление—связь, препятствующая угловому перемещению, и жесткий опорный стержень—связь, препятствующая линейному смещению (рис. 2.17). Очевидно, что общее число введенных связей должно быть равно числу неизвестных. Неизвестные определяются из системы канонических уравнений метода перемещений, которые имеют вид

$$\sum_{j=1}^n r_{kj} Z_j + R_{kP} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.34)$$

где Z_j — неизвестные перемещения узлов (угловые или линейные); r_{kj} — реактивное усилие (момент или сила), возникающее в связи k от единичного смещения в связи j ; R_{kP} — реактивное усилие в связи k от внешней нагрузки.

Заметим, что, как и в методе сил, побочные коэффициенты обладают свойством взаимности, т. е. $r_{kj} = r_{jk}$. Уравнения (2.34) являются статическими и выражают равенство нулю общего реактивного усилия во введенной связи.

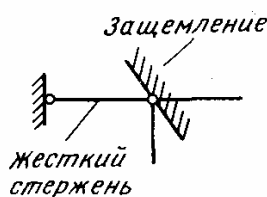
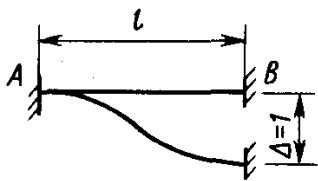
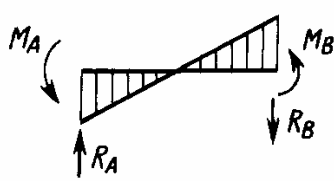
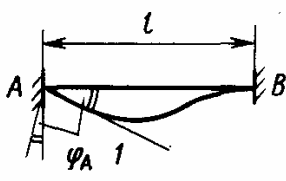
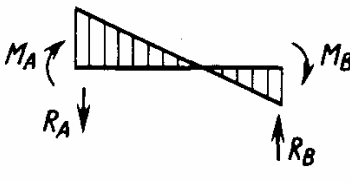
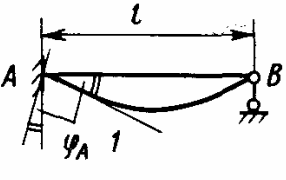
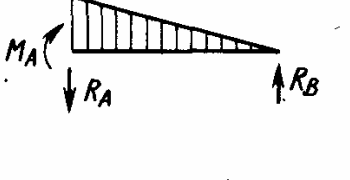
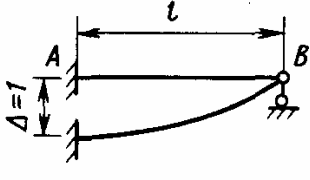
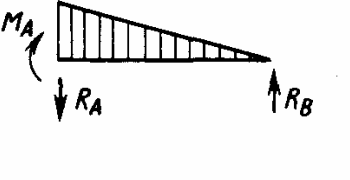
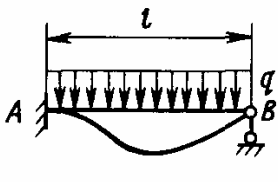
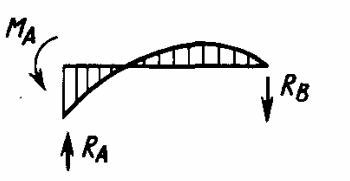


Рис. 2.17. Связи, препятствующие упругим перемещениям узлов рамы

2.5.3. Определение коэффициентов канонических уравнений

При определении коэффициентов r_{kj} и свободных членов R_{kP} уравнений (2.34) используют величины усилий, возникающих в статически неопределимых балках, на которые можно разбить рамы, от единичных смещений их узлов и от нагрузки.

Таблица 2.1

Схема балки и воздействие на нее	Эпюры усилий и реакции	Формулы
		$M_A = M_B = \frac{6EI}{l^2}$ $R_A = R_B = \frac{12EI}{l^3}$
		$M_A = \frac{4EI}{l}$ $M_B = \frac{2EI}{l}$ $R_A = R_B = \frac{6EI}{l^2}$
		$M_A = \frac{3EI}{l}$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^2}$
		$M_A = \frac{3EI}{l^2}$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^3}$
		$M_A = \frac{ql^2}{8}$ $R_A = \frac{5}{8}ql$ $R_B = \frac{3}{8}ql$

Эти усилия в однопролетных балках постоянного сечения для различных случаев перемещений концов балки и загрузений приводятся в справочной литературе. Некоторые случаи представлены в табл. 2.1.

Процедура определения r_{kj} и R_{kP} связана с рассмотрением уравнений равновесия отдельных узлов рамы, содержащих соответствующие связи, или интегрированием эпюр моментов. Во втором случае

$$r_{kj} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_i^{(j)} M_i^{(k)}}{E_i I_i} dx_i, \quad R_{kP} = - \sum_i \int_0^{l_i} \frac{(M_i^P)_0 M_i^{(k)}}{E_i I_i} dx_i. \quad (2.35)$$

Здесь $M_i^{(j)}$, $M_i^{(k)}$ — моменты от единичных перемещений, полученные в основной системе; $(M_i^P)_0$ — момент от нагрузки в любой неизменяемой, в том числе статически определимой системе, образованной из основной, при обязательном исключении k -й связи.

2.5.4. Пример расчета рамы методом перемещений

Рассмотрим раму, изображенную на рис. 2.18, а, для которой $n = n_\psi + n_\Delta = 1 + 1 = 2$. Образует основную систему, вводя связи, препятствующие возможным перемещениям Z_1 и Z_2 (см. рис. 2.18, б). Используя табл. 2.1, построим эпюры моментов от единичных перемещений по заданным направлениям и от нагрузки (рис. 2.19, а, б, в). Система (2.34) имеет вид:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0, \quad (2.36)$$

$$r_{12}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0.$$

Вырежем узел В (см. рис. 2.18) с введенными связями, изобразим на стержнях этого узла усилия, возникшие от перемещений или

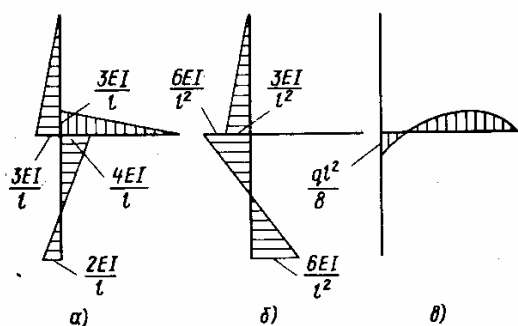


Рис. 2.18. К расчету рамы методом перемещений. Схема рамы (а) и ее основная система (б)

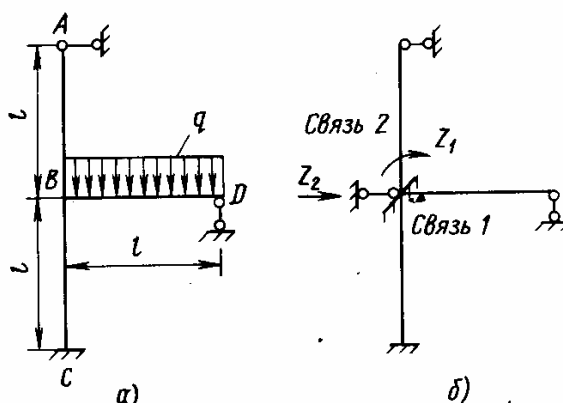


Рис. 2.19. К расчету рамы методом перемещений:

а — эпюра изгибающих моментов M_1 от поворота связи 1 на единичный угол; б — эпюра M_2 от смещения связи 2 на единицу; в — эпюра M_0 от внешней нагрузки (см. рис. 2.18)

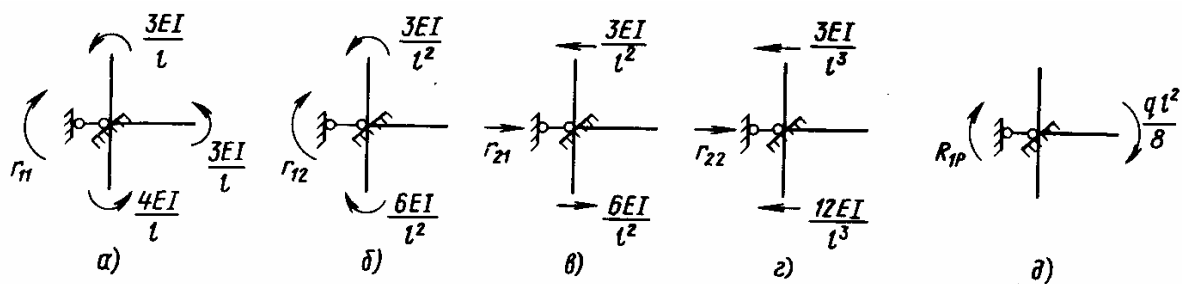


Рис. 2.20. К определению коэффициентов канонических уравнений методом перемещений

внешней нагрузки, и затем из уравнений равновесия найдем соответствующие реакции в связях (рис. 2.20). Например, реактивный момент в узле от его поворота на единичный угол (см. рис. 2.20, а).

$$r_{11} = \frac{3EI}{l} + \frac{3EI}{l} + \frac{4EI}{l} = \frac{10EI}{l}.$$

Этот же результат дает и формула (2.35)

$$r_{11} = \sum_1^3 \int \frac{M_1^2}{EI} dx_i = 2 \frac{1}{EI} \frac{l}{2} \frac{3EI}{l} \frac{2}{3} \frac{3EI}{l} + \\ + \frac{1}{2EI} \left(\frac{4EI}{l} \frac{2}{3} l \frac{2}{3} \frac{4EI}{l} + \frac{2EI}{l} \frac{1}{3} l \frac{2}{3} \frac{2EI}{l} \right) = \frac{10EI}{l}.$$

Аналогично реактивный момент в узле от его единичного линейного перемещения (см. рис. 2.20, б).

$$r_{12} = -\frac{6EI}{l^2} + \frac{3EI}{l^2} = -\frac{3EI}{l^2}.$$

Реактивное усилие в узле от его единичного поворота (см. табл. 2.1 и рис. 2.20, в).

$$r_{21} = -\frac{6EI}{l^2} + \frac{3EI}{l^2} = -\frac{3EI}{l^2} = r_{12}.$$

Реактивное усилие в узле от его единичного перемещения (см. рис. 2.20, г)

$$r_{22} = \frac{12EI}{l^3} + \frac{3EI}{l^3} = \frac{15EI}{l^3}.$$

Реактивные момент и усилие в узле от внешней нагрузки (см. рис. 2.20, д)

$$R_{1P} = -\frac{ql^2}{8}, \quad R_{2P} = 0.$$

Решая систему (2.36), находим

$$Z_1 = \frac{5}{376} \frac{ql^3}{EI}, \quad Z_2 = \frac{1}{376} \frac{ql^4}{EI}.$$

Величины изгибающих моментов по участкам рамы определяются согласно принципу независимости действия силовых факторов, т. е.

$$M = M^P + M^{(1)}Z_1 + M^2Z_2.$$

2.6. МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

2.6.1. Идеализированная расчетная схема

Расчет сложных стержневых систем с большим числом элементов связан со значительными вычислительными трудностями, преодолеть которые позволяют лишь электронные вычислительные машины (ЭВМ). Появление и развитие ЭВМ существенно изменило саму форму расчетов, в частности, получила интенсивное развитие матричная форма записи исходных уравнений как одна из наиболее приспособленных к использованию машин. При этом независимо от степени сложности рассчитываемой конструкции все расчетные операции метода сил или метода перемещений изображаются аппаратом матричного исчисления в компактном и легко обозримом виде.

Использование матриц в статике стержневых систем предполагает разделение системы на отдельные элементы с дискретным сочленением их между собой (места сочленения будем называть узлами). Для ферменной конструкции элементом обычно служит стержень между узлами. Для рам построение идеализированной расчетной схемы осуществляется путем замены криволинейной оси стержня вписанной ломаной с минимально допустимым числом участков (элементов). Если поперечное сечение стержня вдоль его оси изменяется, стержень разбивается на участки с различной жесткостью. Распределенная нагрузка чаще всего (но не обязательно) представляется в виде сосредоточенных сил, эквивалентных действительной нагрузке. В общем случае стремятся к тому, чтобы вершины ломаной совпадали с местами ступенчатого изменения сечений и были бы точками приложения сосредоточенных сил, заменяющих распределенную нагрузку.

Таким образом, вся стержневая система представляется состоящей из отдельных элементов призматической формы. Выделяя мысленно такой элемент (длиной l_i) из конструкции, например плоской рамы, заменим действие на него отброшенных частей соответствующими силовыми факторами M_i , Q_i , N_i на одном торце, M_{i+1} , Q_{i+1} , N_{i+1} — на другом (рис. 2.21). Кроме того, введем сле-

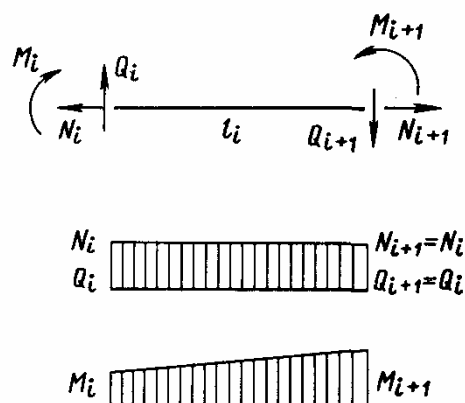


Рис. 2.21. Элемент стержневой системы

дующие обозначения: f_i — площадь поперечного сечения i -го элемента; I_i — момент инерции сечения относительно главной оси; k_i — коэффициент формы сечения; E_i , G_i — модули упругости элемента; h — число элементов в стержневой системе. Сделав эти предварительные замечания, перейдем к рассмотрению таких классических алгоритмов, как метод сил и метод перемещений, используя матричную форму [30].

2.6.2. Метод сил в матричной форме

Рассмотрим m -раз статически неопределимую стержневую систему, нагруженную системой сил P ($P_1, P_2, \dots, P_n$).

Канонические уравнения метода сил (2.11) для такой системы записываются в матричном виде следующим образом:

$$DX = -d_P. \quad (2.37)$$

Здесь

$$D = \|\delta_{kj}\| = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1m} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \dots & \delta_{mm} \end{vmatrix}$$

— квадратная матрица коэффициентов при неизвестных;

$$d_P = \{\Delta_{kP}\} = \begin{vmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \dots \\ \Delta_{mP} \end{vmatrix}$$

— матрица-столбец (вектор) свободных членов;

$$X = \{X_j\} = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_m \end{vmatrix}$$

— вектор неизвестных (усилий в лишних связях).

Заметим, что вектор d_P можно представить также в виде $d_P = \bar{d}_P P$, где $\bar{d}_P = \{\bar{\Delta}_{kP}\}$, если внешнюю нагрузку изобразить как произведение некоторой единичной нагрузки на величину P ($\bar{\Delta}_{1P}, \bar{\Delta}_{2P}, \dots, \bar{\Delta}_{mP}$ — свободные члены канонических уравнений, соответствующие единичной внешней нагрузке, причем $\Delta_{kP} = \bar{\Delta}_{kP} P$).

Поэтому (2.37) можно переписать так:

$$DX = -\bar{d}_P P. \quad (2.38)$$

Если стержневая система рассчитывается на r -различных комбинаций нагрузок, коэффициенты δ_{kj} (т. е. матрица D) остаются неизменными, тогда как каждой комбинации нагрузок соответствуют свои свободные члены и свои неизвестные.

В этом случае имеем r -уравнений вида (2.38)

$$\begin{aligned} DX^{(1)} &= -\bar{d}^{(1)}P^{(1)}; \\ DX^{(2)} &= -\bar{d}_P^{(2)}P^{(2)}; \\ &\dots\dots\dots \\ DX^{(r)} &= -\bar{d}_P^{(r)}P^{(r)}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Эту систему уравнений можно представить в виде одного уравнения

$$DX = -D_P = -\bar{D}_P P, \quad (2.40)$$

которое по внешнему виду совпадает с (2.37) или (2.38), но под X и D_P или $\bar{D}_P$ понимаются уже не векторы, а матрицы с размерами $m \times r$:

$$X = \begin{vmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & \dots & X_1^{(r)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & \dots & X_2^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_m^{(1)} & X_m^{(2)} & \dots & X_m^{(r)} \end{vmatrix}, \quad \bar{D}_P = \begin{vmatrix} \bar{\Delta}_{1P}^{(1)} & \bar{\Delta}_{1P}^{(2)} & \dots & \bar{\Delta}_{1P}^{(r)} \\ \bar{\Delta}_{2P}^{(1)} & \bar{\Delta}_{2P}^{(2)} & \dots & \bar{\Delta}_{2P}^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\Delta}_{mP}^{(1)} & \bar{\Delta}_{mP}^{(2)} & \dots & \bar{\Delta}_{mP}^{(r)} \end{vmatrix}.$$

Что касается матрицы нагрузок P , то она представляется в виде вектора

$$P = \begin{vmatrix} P^{(1)} \\ P^{(2)} \\ \dots \\ P^{(r)} \end{vmatrix},$$

если неизвестные находятся при одновременном действии всех r -комбинаций нагрузок, или диагональной матрицы

$$P = \begin{vmatrix} P^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P^{(r)} \end{vmatrix},$$

если неизвестные определяются при действии каждой из r -комбинаций нагрузок.

Вопрос о составлении матриц D и $\bar{D}_P$ рассмотрим на примере плоской рамы. Для такой рамы перемещения δ_{kj} и $\bar{\Delta}_{kP}$ запишутся в соответствии с (2.16) так:

$$\delta_{kj} = \delta_{jk} = \sum_{i=1}^h \int_0^{l_i} \left[\frac{M_i^{(j)} M_i^{(k)}}{E_i I_i} + k_i \frac{Q_i^{(j)} Q_i^{(k)}}{G_i f_i} + \frac{N_i^{(j)} N_i^{(k)}}{E_i f_i} \right] dx_i,$$

$$\bar{\Delta}_{kP} = \sum_{i=1}^h \int_0^{l_i} \left[\frac{(\bar{M}_i^P)_0 M_i^{(k)}}{E_i I_i} + k_i \frac{(\bar{Q}_i^P)_0 Q_i^{(k)}}{G_i f_i} + \frac{(\bar{N}_i^P)_0 N_i^{(k)}}{E_i f_i} \right] dx_i, \quad (2.41)$$

где $M_i^{(j)}$, $Q_i^{(j)}$, $N_i^{(j)}$ — силовые факторы в основной системе, вызванные $X_j = 1$; $(\bar{M}_i^P)_0$, $(\bar{Q}_i^P)_0$, $(\bar{N}_i^P)_0$ — силовые факторы в основной системе, вызванные единичной внешней нагрузкой.

При принятом способе разбиения рамы на элементы эпюры продольных N и поперечных сил Q в пределах элемента — постоянны, а эпюра изгибающих моментов M изменяется по линейному закону (см. рис. 2.21). Поэтому, используя правило Верещагина, получим

$$\delta_{kj} = \sum_{i=1}^h \left\{ \frac{M_i^{(k)}}{6} (2M_i^{(j)} + M_{i+1}^{(j)}) + \frac{M_{i+1}^{(k)}}{6} (M_i^{(j)} + 2M_{i+1}^{(j)}) \right] \frac{l_i}{E_i I_i} +$$

$$+ k_i \frac{Q_i^{(k)} Q_i^{(j)} l_i}{G_i f_i} + \frac{N_i^{(k)} N_i^{(j)} l_i}{E_i f_i} \left\}.$$

Учитывая зависимость $M_{i+1} = M_i + Q_i l_i$, вытекающую из уравнения равновесия элемента, будем иметь:

$$\delta_{kj} = \sum_{i=1}^h \left[M_i^{(k)} \frac{l_i}{E_i I_i} M_i^{(j)} + M_i^{(k)} \frac{l_i^2}{2E_i I_i} Q_i^{(j)} + Q_i^{(k)} \frac{l_i^2}{2E_i I_i} M_i^{(j)} + \right.$$

$$\left. + Q_i^{(k)} \left(\frac{l_i^3}{3E_i I_i} + k_i \frac{l_i}{G_i f_i} \right) Q_i^{(j)} + N_i^{(k)} \frac{l_i}{E_i f_i} N_i^{(j)} \right]. \quad (2.42)$$

Из выражения (2.42) можно заметить, что и δ_{kj} и $\bar{\Delta}_{kP}$ можно написать так:

$$\delta_{kj} = \sum_{i=1}^h \| M_i^{(k)} Q_i^{(k)} N_i^{(k)} \|.$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \frac{l_i}{E_i I_i} & \frac{l_i^2}{2E_i I_i} & 0 \\ \frac{l_i^2}{2E_i I_i} & \left(\frac{l_i^3}{3E_i I_i} + k_i \frac{l_i}{G_i f_i} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_i}{E_i f_i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_i^{(j)} \\ Q_i^{(j)} \\ N_i^{(j)} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^h b'_{ik} F_i b_{ij}, \quad (2.43)$$

$$\bar{\Delta}_{kP} = \sum_{i=1}^h b'_{ik} F_i \bar{b}_{Pi},$$

где $b_{ik} = \begin{vmatrix} M_i^{(k)} \\ Q_i^{(k)} \\ N_i^{(k)} \end{vmatrix}$

— вектор усилий в i -м сечении, возникающих от воздействия лишней неизвестной $X_k = 1$;

$$\bar{b}_{Pi} = \begin{vmatrix} (\bar{M}_i^P)_0 \\ (\bar{Q}_i^P)_0 \\ (\bar{N}_i^P)_0 \end{vmatrix}$$

— вектор усилий в i -ом сечении от единичной внешней нагрузки;

$$F_i = \begin{vmatrix} \frac{l_i}{E_i I_i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_i}{E_i f_i} \end{vmatrix}$$

— матрица податливости i -го элемента системы.

Знак «'» в (2.43) означает транспонирование, т. е. замену строк матрицы столбцами.

В различных частных случаях вид b_{ik} , $\bar{b}_{Pi}$, F_i оказывается различным. Например, для статически неопределимой фермы

$$b_{ik} = N_i^{(k)}, \quad \bar{b}_{Pi} = (\bar{N}_i^P)_0, \quad F_i = \frac{l_i}{E_i f_i};$$

для плоской рамы, когда не учитывается влияние на перемещение продольных деформаций и сдвигов,

$$b_{ik} = \begin{vmatrix} M_i^{(k)} \\ Q_i^{(k)} \end{vmatrix}, \quad \bar{b}_{Pi} = \begin{vmatrix} (\bar{M}_i^P)_0 \\ (\bar{Q}_i^P)_0 \end{vmatrix}, \quad F_i = \begin{vmatrix} \frac{l_i}{E_i I_i} & \frac{l_i^2}{2E_i I_i} \\ \frac{l_i^2}{2E_i I_i} & \frac{l_i^3}{3E_i I_i} \end{vmatrix}.$$

В самом общем случае для элемента пространственной рамы, ось которого совпадает с осью x , имеем

$$b'_{ik} = \begin{vmatrix} M_{zi}^{(k)} & Q_{yi}^{(k)} & M_{yi}^{(k)} & Q_{zi}^{(k)} & N_{xi}^{(k)} & M_{xi}^{(k)} \end{vmatrix},$$

$$\bar{b}'_{Pi} = \begin{vmatrix} (\bar{M}_{zi}^P)_0 & (\bar{Q}_{yi}^P)_0 & (\bar{M}_{yi}^P)_0 & (\bar{Q}_{zi}^P)_0 & (\bar{N}_{xi}^P)_0 & (\bar{M}_{xi}^P)_0 \end{vmatrix},$$

$$F_i = \begin{vmatrix} \frac{l_i}{E_i I_{zi}} & \frac{l_i^2}{2E_i I_{zi}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_i^2}{2E_i I_{zi}} \left(\frac{l_i^3}{3E_i I_{zi}} + k_{yi} \frac{l_i}{G_i f_i} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_i}{E_i I_{yi}} & \frac{l_i^2}{2E_i I_{yi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_i^2}{2E_i I_{yi}} \left(\frac{l_i^3}{3E_i I_{yi}} + k_{zi} \frac{l_i}{G_i f_i} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_i}{E_i f_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_i}{G_i I_{\text{пр}i}} \end{vmatrix}$$

Теперь запишем (2.43) в следующей форме:

$$\delta_{kj} = \| b'_{11k} b'_{12k} \dots b'_{1hk} \| \cdot \begin{vmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & F_h \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11j} \\ b_{12j} \\ \dots \\ b_{1hj} \end{vmatrix} = b'_{1k} F b_{1j}, \quad (2.44)$$

$$\bar{\Delta}_{kP}^{(\xi)} = b'_{1k} F \bar{b}_{P\xi},$$

где $b_{1k} = \begin{vmatrix} b_{11k} \\ b_{12k} \\ \dots \\ b_{1hk} \end{vmatrix}$

— вектор усилий во всех расчетных сечениях основной системы от лишней неизвестной $X_k = 1$;

$$\bar{b}_{P\xi} = \begin{vmatrix} \bar{b}_{P1\xi} \\ \bar{b}_{P2\xi} \\ \dots \\ \bar{b}_{Ph\xi} \end{vmatrix}$$

— вектор усилий от единичной ξ -й внешней нагрузки;

$$F = \begin{vmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & F_h \end{vmatrix}$$

— матрица податливости всех элементов, рассматриваемых самостоятельно, т. е. не связанных между собой.

И, наконец, искомые матрицы D и $\bar{D}_P$ на основании (2.44) запишутся так:

$$D = \begin{vmatrix} b'_{11} F b_{11} & b'_{11} F b_{12} & \dots & b'_{11} F b_{1m} \\ b'_{12} F b_{11} & b'_{12} F b_{12} & \dots & b'_{12} F b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_{1m} F b_{11} & b'_{1m} F b_{12} & \dots & b'_{1m} F b_{1m} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b'_{11} \\ b'_{12} \\ \dots \\ b'_{1m} \end{vmatrix} F \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \end{vmatrix} = B' F B_1;$$

$$\bar{D}_P = B'_1 F \bar{B}_P, \quad (2.45)$$

где $B_1 = \|b_{11} b_{12} \dots b_{1m}\|$, $\bar{B}_P = \|\bar{b}_{P1} \bar{b}_{P2} \dots \bar{b}_{Pr}\|$ — матрица усилий во всех расчетных сечениях соответственно от всех единичных лишних неизвестных и от всех единичных внешних нагрузок.

Вернувшись к уравнению (2.40), решим его относительно X и с учетом (2.45) получим:

$$X = -D^{-1} \bar{D}_P P = -(B'_1 F B_1)^{-1} (B'_1 F \bar{B}_P) P. \quad (2.46)$$

Здесь D^{-1} — матрица, обратная D , т. е. $D^{-1} D = D D^{-1} = E$, где

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

— единичная матрица.

Итак, мы нашли значения лишних неизвестных X . Прежде чем определить полные усилия во всех сечениях, обратим внимание на следующее. В матрицах B_1 и $\bar{B}_P$ в (2.45) сохранены только те усилия, которым соответствуют перемещения, возникающие при учитываемых в расчете видах деформаций. Для плоской рамы, например в матрицы B_1 и $\bar{B}_P$, могут входить только Q и M , а N не входить, поскольку при раскрытии статической неопределимости продольные усилия не играют существенной роли (удельный вес членов, содержащих N_i в δ_{kj} невелик). Вместе с тем в расчетах кроме M и Q необходимо знать также и N . Вот почему наряду с B_1 и $\bar{B}_P$ должны быть введены в рассмотрение также матрицы B_1^* и $\bar{B}_P^*$, в которых представлены все усилия, а не только учитывающиеся при раскрытии статической неопределимости.

Совершенно очевидно, что когда при раскрытии статической неопределимости учитываются все усилия, $B_1 = B_1^*$, $\bar{B}_P = \bar{B}_P^*$.

После сделанного замечания матрицу усилий во всех сечениях рассматриваемой конструкции можно записать так:

$$S = B_P^* + B_1^* X, \quad (2.47)$$

где первое слагаемое $B_P^* = \bar{B}_P^* P$ представляет собой усилия в основной системе от внешних нагрузок, а второе $B_1^* X$ — от лишних неизвестных.

В развернутом виде (2.47) с учетом (2.46) выглядит следующим образом:

$$S = B P, \quad (2.48)$$

где $B = \bar{B}_P^* - B_1^* (B_1' F B_1)^{-1} (B_1' F \bar{B}_P)$ — матрица усилий в элементах стержневой системы от единичных внешних сил.

Для определения перемещений воспользуемся формулой (2.17), которая применительно к рассматриваемому случаю плоской рамы имеет вид

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^h \int_0^{l_i} \left[\frac{M_i \bar{M}_i^{(k)}}{E_i I_i} + k_i \frac{Q_i \bar{Q}_i^{(k)}}{G_i f_i} + \frac{N_i \bar{N}_i^{(k)}}{E_i f_i} \right] dx. \quad (2.49)$$

Здесь M_i, Q_i, N_i — полные усилия в статически неопределимой системе; $M_i^{(k)}, \bar{Q}_i^{(k)}, \bar{N}_i^{(k)}$ — усилия в основной системе от обобщенной силы $P_k = 1$, приложенной в узле, для которого находится перемещение в заданном направлении.

По аналогии с (2.44) выражение (2.49) можно представить в виде

$$\Delta_k = \bar{b}_k' F S = \bar{b}_k' F B P, \quad (2.50)$$

где $\bar{b}_k$ — вектор усилий в элементах основной системы от $P_k = 1$.

Обобщенные перемещения, соответствующие каждой из внешних нагрузок, рассматриваемых как обобщенные силы, записываются в виде:

$$\Delta = \|\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_r\| = \bar{B}_P' F B P. \quad (2.51)$$

При этом матрица имеет порядок r , элемент Δ_{jk} столбца Δ_k представляет собой перемещение, вызванное силой P_k по направлению P_j ($k, j = 1, 2 \dots r$).

Поскольку для любой упругой системы обобщенные перемещения выражаются через обобщенные внешние нагрузки по формуле

$$\Delta = F^* P, \quad (2.52)$$

где F^* — матрица податливости всей системы, то в результате сравнения (2.51) и (2.52) находим

$$F^* = \bar{B}_P' F B. \quad (2.53)$$

Порядок квадратной матрицы податливости F^* — r . Матрица F^* может быть записана также в виде

$$F^* = B'FB. \quad (2.54)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} F^* &= \bar{B}'_P FB = B'F\bar{B}_P - \bar{D}'_P D^{-1} \bar{D}_P + \bar{D}'_P D^{-1} \bar{D}_P = \\ &= B'F\bar{B}_P - \langle \bar{B}'_P - \bar{D}'_P D^{-1} B'_1 \rangle FB_1 D^{-1} \bar{D}_P = \\ &= B'F \langle \bar{B}_P - B_1 D^{-1} \bar{D}_P \rangle = B'FB. \end{aligned}$$

Кроме того, запишем две очевидные формулы

$$\Delta = \bar{B}'_P V, \quad (2.55)$$

$$V = FS = FBP, \quad (2.56)$$

где V — матрица относительных перемещений по концам элементов (матрица деформаций).

Таким образом, чтобы найти усилия и перемещения в стержневой системе при использовании метода сил, нужно составить четыре исходные матрицы:

- $B'_1 (B_1)$ — размерности $\lambda^* h \times m$ ($\lambda h \times m$),
- $B'_P (\bar{B}_P)$ — размерности $\lambda^* h \times r$ ($\lambda h \times r$),
- F — квадратная матрица $\lambda h \times \lambda h$,
- P — размерности $r \times 1$ или $r \times r$.

Напомним, что здесь λ — число усилий в одном расчетном сечении, учитываемых при раскрытии статической неопределенности; λ^* — полное число усилий в одном расчетном сечении; m — степень статической неопределенности; h — число элементов; r — число независимых комбинаций нагрузок.

Матрицы $B_1 (\bar{B}_P)$ либо совпадают с $B'_1 (\bar{B}'_P)$, либо легко получаются из них путем вычеркивания тех строк, в которых записаны усилия, не учитываемые при раскрытии статической неопределенности.

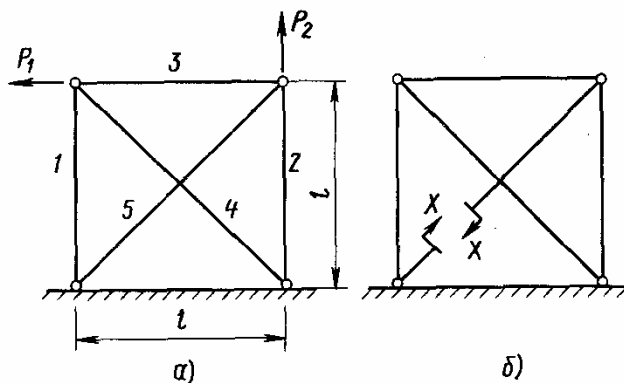


Рис. 2.22. К расчету фермы матричным методом сил:

а — схема фермы; б — ее основная система

Пример. Рассмотрим один раз статически неопределимую ферменную конструкцию, показанную на рис. 2.22, а, у которой материал стержней одинаков и площади поперечных сечений $f_1 = f_2 = 2f_3$.

$$f_4 = f_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} f_3.$$

Основная система и лишнее неизвестное X (усилие в стержне б)

представлены на рис. 2.22, б. Для рассматриваемой фермы исходные матрицы имеют вид:

$$P_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix},$$

$$F_{(1.5 \times 1.5)} = \frac{l}{Ef_3} \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_1_{(1.5 \times 1)} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_P_{(1.5 \times 2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь b_1 соответствует усилиям в стержнях 1 ... 5 от $X = 1$, а $\bar{B}_P$ — усилиям в стержнях 1 ... 5 от $P_1 = 1$ и $P_2 = 1$ соответственно.

Далее выполняется непрерывная цепь вычислительных операций с матрицами по формулам (2.45), (2.46), (2.47), (2.48), (2.52), (2.53):

$$D = b_1^T F b_1 = 5 \frac{l}{Ef_3}, \quad D^{-1} = \frac{1}{5} \frac{Ef_3}{l},$$

$$\bar{D}_P = b_1^T F \bar{B}_P = \frac{l}{Ef_3} \left\| \frac{9}{4} \sqrt{2} - \frac{1}{4} \sqrt{2} \right\|,$$

$$X = -D^{-1} \bar{D}_P P = - \left\| \frac{9\sqrt{2}}{20} - \frac{\sqrt{2}}{20} \right\| \cdot \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} = \left\| -45\sqrt{2} \quad 10\sqrt{2} \right\|,$$

$$B = B_P - b_1 D^{-1} \bar{D}_P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left\| \frac{9\sqrt{2}}{20} - \frac{\sqrt{2}}{20} \right\| =$$

$$= \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -11 & -1 \\ 9 & 19 \\ 9 & -1 \\ 11\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -9\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$F^* = \bar{B}_P^T F B = \frac{l}{40Ef_3} \begin{bmatrix} 99 & 9 \\ 9 & 19 \end{bmatrix},$$

$$S = BP = \begin{vmatrix} -55 & -10 \\ 45 & 190 \\ 45 & -10 \\ 55\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \\ -45\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = F^*P = \frac{l}{Ef_3} \begin{vmatrix} \frac{495}{2} & 45 \\ \frac{45}{2} & 95 \end{vmatrix}.$$

Из рассмотрения результирующих матриц S и Δ следует, например, что усилие в стержне 2 от действия силы $P_2 = 200$ имеет значение $S_2 = 190$; усилие в стержне 3 при совместном действии $P_1 = 100$ и $P_2 = 200$ соответственно $45 - 10 = 35$ и т. д.; вертикальное смещение правого узла (по направлению P_2) — $\Delta_{22} = 95 \frac{l}{Ef_3}$ и т. д.

2.6.3. Учет температурных воздействий

Расчет статически неопределимых стержневых систем на температурные воздействия (а в общем случае на воздействие начальных деформаций не объединенных в конструкцию элементов) проводится аналогично расчету при действии нагрузок.

Рассматривая в каноническом уравнении метода сил выражение для свободного члена (2.44)

$$\bar{\Delta}_{kP}^{(\xi)} = b'_{ik} F \bar{b}_{P\xi},$$

видим, что вектор $F \bar{b}_{P\xi}$ представляет собой деформации отдельных элементов, возникающих в основной системе при действии внешней единичной нагрузки. Поэтому при температурных воздействиях нужно лишь заменить $F \bar{b}_{P\xi} P$ вектором начальных деформаций h , соответствующим заданному приращению температуры t (например, для i -го стержня фермы $h_i = \Delta l_i = \alpha_i t_i l_i$).

Тогда матрица свободных членов запишется в виде:

$$D_P = \begin{vmatrix} b'_{11}h_1 & b'_{11}h_2 & \dots & b'_{11}h_r \\ b'_{12}h_1 & b'_{12}h_2 & \dots & b'_{12}h_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_{1m}h_1 & b'_{1m}h_2 & \dots & b'_{1m}h_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_{11} \\ b'_{12} \\ \dots \\ b'_{1m} \end{vmatrix} \| h_1 h_2 \dots h_r \| = B'_1 H, \quad (2.57)$$

где $h_\xi = \begin{vmatrix} h_1^{(\xi)} \\ h_2^{(\xi)} \\ \dots \\ h_n^{(\xi)} \end{vmatrix}$, ξ — номер воздействия.

Решая систему канонических уравнений, вместо (2.46) будем иметь

$$X = -(B'_1 F B_1)^{-1} B'_1 H, \quad (2.58)$$

а поскольку усилия в основной системе от температурных воздействий равны нулю, получим

$$S = B_1^* X = -B_1^* (B_1' F B_1)^{-1} B_1' H. \quad (2.59)$$

Перемещения в некоторых узлах конструкции, вызванные только температурным воздействием, находятся из выражения (2.55)

$$\Delta = \bar{B}_P V,$$

где $\bar{B}_P$ — матрица усилий в основной системе от единичных нагрузок, приложенных к тем узлам и в тех направлениях, для которых находятся перемещения;

$$V = FS + H$$

— матрица полных деформаций.

В результате имеем

$$\Delta = B_0' H, \quad (2.60)$$

$$\text{где } B_0' = \bar{B}_P' - \bar{B}_P' F B_1^* (B_1' F B_1)^{-1} B_1'. \quad (2.61)$$

Пример. Рассмотрим ферму, показанную на рис. 2.22, а, при $P_1 = P_2 = 0$, у которой стержень 5 нагревается так, что $h_5 = \alpha_5 t_5 l_5 = 1$. Найдем усилия в стержнях и перемещения левого узла по горизонтали

$$D^{-1} = \frac{Ef_3}{5l}, \quad D_P = b_1' H = \left\| -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 1 \quad 1 \right\| \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1,$$

$$S = -B_1^* D^{-1} D_P = - \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{Ef_3}{5l} \cdot 1 = \frac{Ef_3}{l} \begin{Bmatrix} \frac{1}{10} \sqrt{2} \\ \frac{1}{10} \sqrt{2} \\ \frac{1}{10} \sqrt{2} \\ -1/5 \\ -1/5 \end{Bmatrix},$$

$$\Delta = \bar{B}_P' (FS + H) = \left\| -100 \sqrt{2} \quad 0 \right\| \cdot \begin{Bmatrix} \frac{1}{20} \sqrt{2} \\ \frac{1}{20} \sqrt{2} \\ \frac{1}{10} \sqrt{2} \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} + 1 \end{Bmatrix} = -\frac{9}{10} \sqrt{2},$$

т. е. рассматриваемый узел смещается вправо.

2.6.4. Метод перемещений в матричной форме

Симметрия и аналогия вариационных принципов Кастильяно и Лагранжа, которые являются фундаментом метода сил и метода перемещений, позволяют раскрыть кинематическую неопределимость стержневой системы, используя некоторые уже известные понятия.

Соответствие понятий метода сил и метода перемещений можно представить следующим образом:

Метод сил	Метод перемещений
Внешние силы P	Перемещения в конструкции Δ
Перемещения Δ	Внешние силы P
Усилия в элементах S	Деформации элементов V
Деформации элементов V	Усилия в элементах S
Податливость отдельных необъединенных элементов F	Жесткость отдельных необъединенных элементов K
Податливость всей конструкции F^*	Жесткость всей конструкции K^*

Если для определения неизвестных по методу сил использовалось выражение (2.46)

$$X = -D^{-1}D_P = -(B_1'FB_1)^{-1}(B_1'FB_P),$$

где $D_P = \bar{D}_P P$, $B_P = \bar{B}_P P$, то неизвестные метода перемещений находятся так:

$$Z = -C^{-1}C_P = -(A_1'KA_1)^{-1}(A_1'KA_P). \quad (2.62)$$

Здесь A_1 — матрица деформаций элементов конструкции в кинематически определимой основной системе, вызванных единичными неизвестными перемещениями; A_P — матрица деформаций, вызванных заданными перемещениями (для единичных заданных перемещений — $\bar{A}_P$); K — матрица жесткости отдельных необъединенных элементов (т. е. рассматриваемых самостоятельно).

Заметим что

$$KF = FK = E. \quad (2.63)$$

Продолжая аналогию дальше, можно записать:

Метод сил	Метод перемещений
$S = BP$	$V = A\Delta$ (2.64)
$B = \bar{B}_P - B_1(B_1'FB_1)^{-1}(B_1'F\bar{B}_P)$	$A = \bar{A}_P - A_1(A_1'KA_1)^{-1}(A_1'K\bar{A}_P)$
$\Delta = F^*P$	$P = K^*\Delta$ (2.65)
$F^* = B'FB$	$K^* = A'KA$ (2.66)
$V = FS = FBP$	$S = KV = KA\Delta$ (2.67)

При этом $F^*K^* = K^*F^* = E. \quad (2.68)$

Пример. Схему расчета кинематически неопределимой системы проследим на примере фермы, рассмотренной в разд. 2.6.2 (см. рис. 2.22, а).

Поскольку все четыре составляющие перемещений Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 двух подвижных узлов неизвестны, степень кинематической неопределимости $n = 4$. Однако перемещения $\Delta_{11} = Z_3$ и $\Delta_{22} = Z_4$ (рис. 2.23), соответствующие силам P_1 и P_2 , целесообразно не относить к неизвестным, а определять позднее по жесткости всей системы и силам.

Итак, составляем исходные матрицы:

$$P = \begin{vmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{vmatrix},$$

$$K = \begin{vmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_5 \end{vmatrix} = \frac{Ef_s}{l} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix},$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}, \quad \bar{A}_P = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}.$$

Напомним, что, во-первых, $K_i = 1/F_i$. Во-вторых, в первом столбце матрицы A записаны абсолютные удлинения стержней фермы, вызванные смещением левого узла вверх на величину $Z_1 = 1$. Очевидно, что стержень 1 (см. рис. 2.22) удлинится на величину 1, стержень 4 — на величину $\sqrt{2}/2$, а остальные своей длины

не изменят. В-третьих, во втором столбце A_1 записаны абсолютные удлинения стержней, вызванные смещением правого узла на величину $Z_2 = 1$, а столбцы $\bar{A}_P$ представляют собой удлинения стержней, соответствующие перемещениям $\Delta_{11} = 1$ и $\Delta_{22} = 1$.

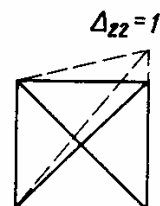
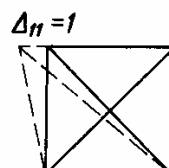
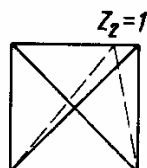
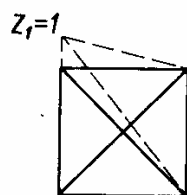
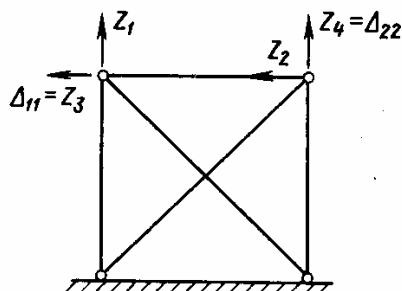


Рис. 2.23. К расчету фермы матричным методом перемещений

Находим

$$C = A_1' K A_1 =$$

$$= \begin{vmatrix} 100 \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 - 10 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \cdot \frac{E f_3}{l} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{E f_3}{4l} \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix},$$

$$C^{-1} = \frac{4l}{E f_3} = \begin{vmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{vmatrix},$$

$$\bar{C}_P = A_1' K \bar{A}_P = \frac{E f_3}{4l} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix},$$

$$A = \bar{A}_P - A_1 C^{-1} \bar{C}_P = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{9} \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{2}{5} \sqrt{2} & \frac{2}{5} \sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

$$K^* = A' K A = \bar{A}_P' K A \frac{E f_3}{l} \begin{vmatrix} \frac{19}{45} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \end{vmatrix},$$

$$F^* = (K^*)^{-1} = \frac{5l}{E f_3} \begin{vmatrix} \frac{19}{9} & -1 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = \frac{l}{40 E f_3} \begin{vmatrix} 99 & 9 \\ 9 & 19 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = F^* P = \frac{l}{E f_3} \begin{vmatrix} \frac{495}{2} & 45 \\ \frac{45}{2} & 95 \end{vmatrix},$$

$$S = K \Delta = \frac{E f_3}{l} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{9}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{2}{9}\sqrt{2} & \frac{2}{5}\sqrt{2} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \frac{l}{E f_3} \begin{vmatrix} \frac{495}{2} & 45 \\ 45 & 95 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -55 & 10 \\ 45 & 190 \\ 45 & -10 \\ 55\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \\ -45\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

И для смещений, и для усилий в стержнях получаем тот же самый результат, что по методу сил.

2.6.5. Матрица жесткости стержневой системы

Рассмотрим более детально основное матричное соотношение метода перемещений (2.65), записав его следующим образом [34]:

$$P = K_0 \delta. \quad (2.69)$$

Здесь под вектором

$$P = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_q \end{vmatrix}$$

в дальнейшем будем понимать комбинацию обобщенных сил, приложенных к узлам идеализированной стержневой системы, а вектор

$$\delta = \begin{vmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_q \end{vmatrix}$$

представляет собой перемещения узлов в направлении действия сил. Матрица K_0 , связывающая силы и соответствующие им перемещения, называется матрицей жесткости.

В развернутом виде эта матрица выглядит так:

$$K_0 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1q} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{iq} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{q1} & k_{q2} & \dots & k_{qj} & \dots & k_{qq} \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Для выяснения физического смысла коэффициента жесткости k_{ij} запишем i -ю строку матричного равенства (2.69)

$$P_i = k_{i1}\delta_1 + k_{i2}\delta_2 + \dots + k_{ij}\delta_j + \dots + k_{iq}\delta_q.$$

Полагая $\delta_j = 1$, а $\delta_{k \neq j} = 0$, получим $P_i = k_{ij}$, т. е. k_{ij} — сила, возникающая в узле i , когда перемещения $\delta_j = 1$, а все остальные перемещения нулевые.

Используя теорему о взаимности работ, можно показать, что $k_{ij} = k_{ji}$, т. е. матрица жесткости всегда симметрична.

Если в узлах действуют в общем случае силы и моменты, то, раскладывая их по координатным осям, будем иметь для i -го узла

$$P'_i = \|P_{xi} P_{yi} P_{zi} M_{xi} M_{yi} M_{zi}\|. \quad (2.71)$$

Соответствующие обобщенные перемещения узла также будут матрицей-столбцом, элементами которой являются перемещения по координатным осям и углы поворота

$$\delta'_i = \|\delta_{xi} \delta_{yi} \delta_{zi} \theta_{xi} \theta_{yi} \theta_{zi}\|. \quad (2.72)$$

Связь между обобщенными силами и перемещениями по-прежнему определяется соотношением (2.69), только элементы k_{ij} матрицы жесткости K_0 в (2.70) будут уже подматрицами размером 6×6 .

Например, для балочного элемента, показанного на рис. 2.24

$$\begin{bmatrix} P_i \\ P_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix}, \quad (2.73)$$

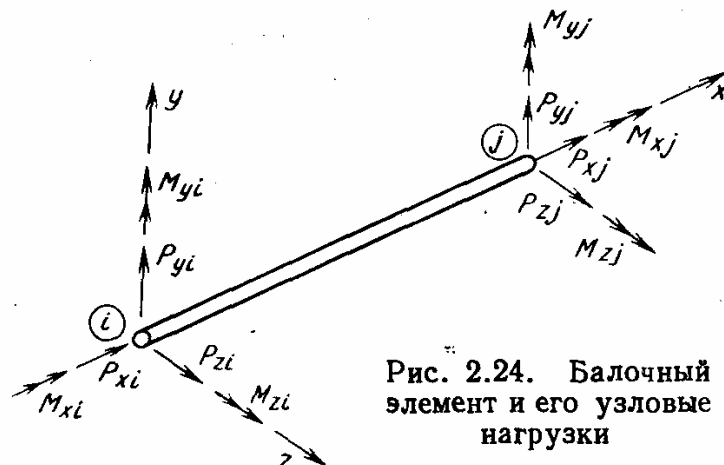


Рис. 2.24. Балочный элемент и его узловые нагрузки

где P_i и δ_i соответствуют выражениям (2.71), (2.72), а подматрицы имеют вид

$$K_{ii} = \begin{vmatrix} \frac{Ef}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{vmatrix},$$

$$K_{ij} = K'_{ji} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{Ef}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \end{vmatrix},$$

$$K_{jj} = \begin{vmatrix} \frac{Ef}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{vmatrix}.$$

Для практических вычислений удобно использовать сквозную нумерацию компонентов узловых обобщенных сил и перемещений, т. е. вместо (2.71) и (2.72) писать

$$\begin{aligned} P'_i &= \| P_{6i-5} P_{6i-4} P_{6i-3} P_{6i-2} P_{6i-1} P_{6i} \|, \\ \delta'_i &= \| \delta_{6i-5} \dots \delta_{6i} \|. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Поскольку составляющие векторов P_i и δ_i связаны с координатными осями, элементы матрицы жесткости зависят от принятой системы координат.

Для вычисления матрицы жесткости отдельных элементов может оказаться удобным использовать для каждого элемента свою (местную) систему координат, которая выбирается так, чтобы вычислительная работа была минимальной. В этих случаях после построения матрицы жесткости в местных координатах нужно перейти к общей системе координатных осей.

Пусть $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и x, y, z — соответственно местная и общая системы координат. Силы и перемещения элемента в этих системах обозначим $\bar{P}$ и P , $\bar{\delta}$ и δ .

При проектировании перемещений δ (линейных и угловых) на местные координатные оси получим связь вида

$$\bar{\delta}_i = L_i \delta_i, \quad (2.75)$$

где L_i — матрица направляющих косинусов (косинусов углов между осями $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и x, y, z).

Так как в любой системе координат соответствующие компоненты сил должны совершать одинаковую работу, то

$$P'_i \delta_i = \bar{P}'_i \bar{\delta}_i. \quad (2.76)$$

Используя (2.75), получим

$$P'_i \delta_i = \bar{P}'_i L_i \delta_i,$$

откуда

$$P_i = L'_i \bar{P}_i. \quad (2.77)$$

В связи с тем, что

$$\bar{P}_i = \bar{K}_i \bar{\delta}_i \quad (2.78)$$

и в силу (2.75) и (2.76)

$$P_i = L'_i \bar{K}_i L_i \delta_i,$$

т. е.

$$K_i = L'_i \bar{K}_i L_i. \quad (2.79)$$

Таким образом, если матрица жесткости элемента в местной системе координат известна, для ее вычисления в общей системе координат достаточно построить матрицу направляющих косинусов и воспользоваться формулой (2.79).

После нахождения матрицы жесткости отдельных элементов стержневой системы, приведенных к единой (общей) системе координат, переходят к построению матрицы жесткости всей системы. Поскольку для удовлетворения условий равновесия в произвольной i -й узловой точке компоненты обобщенной силы P_i должны равняться сумме компонент сил от всех элементов, соединяющихся в этом узле, т. е.

$$P_i = \sum_r P_i^{(r)},$$

где $P_i^{(r)}$ — сила, приложенная к i -му узлу со стороны элемента r , приходим к следующему очевидному правилу для вычисления типовой подматрицы K_{ij} матрицы жесткости K_0 :

$$K_{ij} = \sum_r K_{ij}^{(r)}. \quad (2.80)$$

Здесь суммирование ведется по тем элементам r , к которым одновременно принадлежат узлы i и j .

Общее формирование матрицы жесткости сложных систем автоматизировано и производится с помощью ЭВМ. Поэтому простое правило (2.80) очень удобно, так как сразу после нахождения коэффициента для отдельного элемента он может быть немедленно заслан в соответствующую ячейку памяти вычислительной машины.

При выводе матричного уравнения равновесия (2.69) стержневая система предполагалась свободной, т. е. система алгебраических уравнений

$$k_{i1}\delta_1 + k_{i2}\delta_2 + \dots + k_{iq}\delta_q = P_i \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (2.81)$$

содержит в себе в общем случае шесть уравнений равновесия, которые соответствуют шести степеням свободы всей конструкции как абсолютно твердого тела. Это приводит к тому, что строки матрицы жесткости связаны между собой линейными зависимостями, т. е. эта матрица будет вырожденной (ее определитель равен нулю).

Перемещение стержневой системы как жесткого целого можно устранить, закрепив ее статически определенным образом — в общем случае необходимо наложить шесть соответствующим образом ориентированных опорных связей.

Исключив из матрицы K_0 строки и столбцы, соответствующие узловым перемещениям, на которые накладываются кинематические связи, получим уже невырожденную матрицу K_0^* , т. е. вместо (2.69) имеем

$$P^* = K_0^* \delta^*.$$

Отсюда при заданных нагрузках можно вычислить узловые перемещения конструкций в общей системе координат:

$$\delta^* = [K_0^*]^{-1} P^*. \quad (2.82)$$

После этого по формулам (2.69) и (2.67) находятся перемещения и узловые силы в каждом элементе стержневой системы.

Изложенная процедура матричного метода перемещений, когда за основные неизвестные принимаются перемещения узлов, представляет простейший пример использования метода конечных элементов, широко используемого при решении различных технических задач. Этот метод в общем случае излагается в гл. 7.

3.1. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ И УРАВНЕНИЯ

3.1.1. Расчетная схема пластины. Гипотезы Кирхгофа

Плоские панели различных очертаний являются широко распространенными элементами летательных аппаратов, они описываются теорией тонких пластин. *Пластина — это тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми h (толщина пластины, которая далее считается постоянной) мало по сравнению с размерами в плане.* Введем систему координат, показанную на рис. 3.1. Плоскость $z = 0$, делящую толщину пластины пополам, назовем срединной плоскостью. Отрезок нормали mp к срединной плоскости, заключенный между плоскостями, ограничивающими пластину, назовем нормальным элементом. В общем случае на пластину может действовать система поверхностных нагрузок на плоскостях $z = \pm h/2$ (рис. 3.2), система объемных и контурных сил, вызывающих в совокупности растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб пластины.

В принципе пластина, как и любое упругое тело, описывается общими уравнениями равновесия теории упругости (1.3), (1.9), (1.11), полученными в гл. 1, т. е. уравнениями равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0; \quad (3.3)$$

геометрическими соотношениями

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.4)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.5)$$

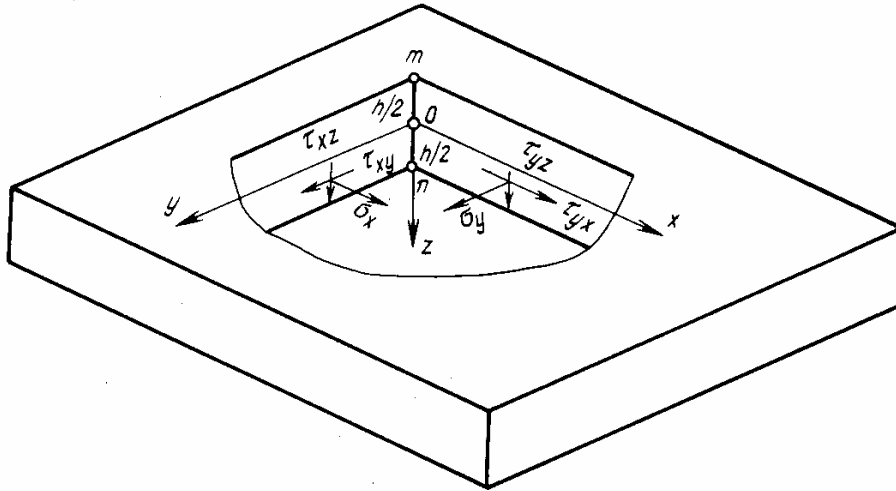


Рис. 3.1. Система координат и напряжения, действующие в пластине

и законом Гука

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (3.6)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad (3.7)$$

где $G = E/2(1 + \mu)$.

Статические граничные условия на поверхностях $z = \pm h/2$ имеют следующий вид (см. рис. 3.2):

$$\begin{aligned} \text{при } z = h/2 \quad & \tau_{xz} = -q_{x1}, \quad \tau_{yz} = -q_{y1}, \quad \sigma_z = -q_{z1}; \\ \text{при } z = -h/2 \quad & \tau_{xz} = -q_{x2}, \quad \tau_{yz} = -q_{y2}, \quad \sigma_z = -q_{z2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Толщина пластины h мала по сравнению с размерами пластины в плане. Это обстоятельство позволяет ввести ряд гипотез, существенно упрощающих исходные уравнения (3.1)—(3.7). Такие гипотезы были предложены Кирхгофом, они формулируются следующим образом.

1. Нормальный элемент mn (см. рис. 3.1) в процессе деформации пластины:

а) не изменяет своей длины;

б) остается прямым и нормальным к поверхности, в которую переходит в результате деформации срединная плоскость.

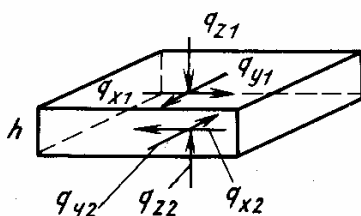


Рис. 3.2. Нагрузки, действующие на поверхностях пластины

2. Напряжения σ_z , действующие по плоскостям $z = \text{const}$, пренебрежимо малы по сравнению с основными напряжениями. Гипотезы Гирхгофа являются по существу обобщением закона плоских сечений, используемого при расчете балок.

3.1.2. Вывод уравнений теории тонких пластин

Преобразуем исходные уравнения (3.1)—(3.7) с учетом введенных выше гипотез. Из гипотезы 1а следует, что $\varepsilon_z = 0$, т. е. согласно первому равенству (3.5) $\partial w / \partial z = 0$ и $w = w(x, y)$. Перемещение w является основной неизвестной функцией в теории изгиба пластин и называется прогибом пластины. Сопоставляя гипотезу 1б с определением деформации сдвига, можно заключить, что $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, т. е. согласно равенствам (3.5)

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Интегрируя эти соотношения по z с учетом того, что w не зависит от z , получим

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y), \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y). \quad (3.9)$$

Здесь введены две произвольные функции $u_0(x, y)$ и $v_0(x, y)$, представляющие собой перемещения точек срединной плоскости $z = 0$ по осям x и y . Подставляя (3.9) в (3.4), найдем деформации в плоскостях, параллельных срединной

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Рассмотрим теперь соотношения (3.6). Отбрасывая в соответствии с гипотезой 2 σ_z , запишем эти соотношения в виде

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}.$$

Тогда с учетом деформаций (3.10) получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Равенства (3.11) позволяют сделать важный для дальнейшего вывод: распределение напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} по толщине пластины включает постоянную, не зависящую от z составляющую, которая статически эквивалентна распределенному усилию, и

линейно зависящую от z составляющую, которая эквивалентна моменту. Введем усилия и моменты по формулам

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz; \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz; \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz; \quad (3.12)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz; \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz. \quad (3.13)$$

Подставляя значения напряжений (3.11), получим

$$N_x = B(\epsilon_x^0 + \mu \epsilon_y^0), \quad N_y = B(\epsilon_y^0 + \mu \epsilon_x^0), \quad N_{xy} = \frac{B(1-\mu)}{2} \gamma_{xy}^0; \quad (3.14)$$

$$M_x = D(\kappa_x + \mu \kappa_y), \quad M_y = D(\kappa_y + \mu \kappa_x), \quad M_{xy} = \frac{D}{2}(1-\mu) \kappa_{xy}, \quad (3.15)$$

$$\text{где } \epsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \epsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}; \quad (3.16)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (3.17)$$

$$B = \frac{Eh}{1-\mu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (3.18)$$

Соотношения (3.14) связывают нормальные N_x , N_y и сдвигающее N_{xy} усилия с относительными деформациями ϵ_x^0 , ϵ_y^0 , γ_{xy}^0 срединной плоскости. Параметр B характеризует жесткость пластины при растяжении-сжатии. Соотношения (3.15) связывают изгибающие M_x , M_y и крутящий M_{xy} моменты с кривизной κ_x , кривизной κ_y и кручением κ_{xy} поверхности, в которую перешла срединная плоскость в результате деформации. Параметр D , называемый цилиндрической жесткостью, характеризует изгибную жесткость пластины.

Соотношения (3.14)–(3.17) при условиях (3.12), (3.13) полностью эквивалентны равенствам (3.11). Действительно, подставляя в (3.11) производные от перемещений через усилия и моменты из соотношения (3.14)–(3.17), получим

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} + \frac{12M_x}{h^3} z, \quad \sigma_y = \frac{N_y}{h} + \frac{12M_y}{h^3} z, \quad \tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{h} + \frac{12M_{xy}}{h^3} z. \quad (3.19)$$

Таким образом напряжения однозначно выражаются через введенные усилия и моменты, а они, в свою очередь — через три перемещения $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w(x, y)$. Следовательно, гипотезы Кирхгофа позволили значительно упростить задачу — исходная трехмерная задача об определении перемещений $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ приводится к двумерной, т. е. к определению функций u_0 , v_0 , w , зависящих только от двух переменных.

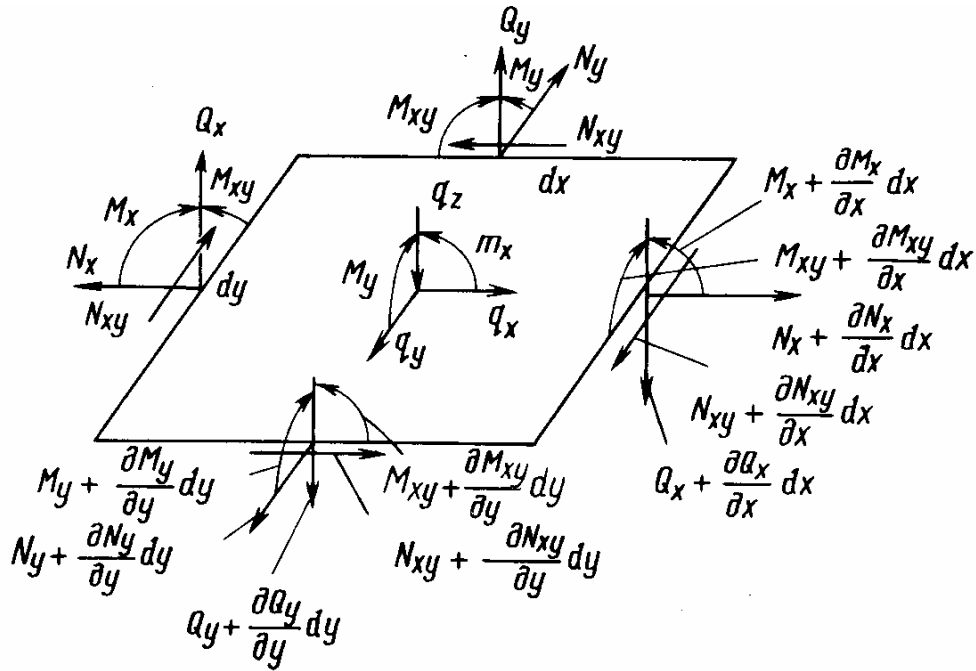


Рис. 3.3. Усилия и моменты, действующие на элемент пластины

Выделим теперь двумерный элемент срединной плоскости и приложим к нему усилия и моменты с соответствующими приращениями (рис. 3.3). Направления усилий и моментов соответствуют направлениям напряжений, показанным на рис. 3.1. Запишем уравнения равновесия выделенного элемента — суммы проекций действующих усилий на оси x , y , z и суммы моментов относительно осей y и x

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + q_x = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + q_y = 0; \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0; \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + m_x &= 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y + m_y &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Здесь q_x , q_y , q_z и m_x , m_y — поверхностные силы и моменты, приведенные к срединной плоскости пластины. Их связь с внешними поверхностями (см. рис. 3.2) и объемными нагрузками будет установлена ниже.

Можно заметить, что в уравнениях (3.20)—(3.22) введены два новых усилия — перерезывающие силы Q_x и Q_y , которые являются равнодействующими касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} (см. рис. 3.1)

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \quad (3.23)$$

Установим связь между уравнениями равновесия элемента срединной плоскости (3.20)—(3.22) и дифференциальными уравнениями равновесия теории упругости (3.1)—(3.3). Ввиду того, что согласно принятым гипотезам напряжения однозначно выражаются через усилия и моменты формулами (3.19), естественно предположить, что и уравнения равновесия в рассматриваемой приближенной теории пластин должны выполняться интегрально в отношении усилий и моментов. Действительно, интегрируя по z уравнение (3.1)

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) dz = 0$$

и учитывая, что в соответствии с равенствами (3.12) и граничными условиями (3.8)

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz = \frac{\partial N_x}{\partial x}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = -q_{x2} + q_{x1},$$

получим первое уравнение (3.20). Осуществляя аналогичные преобразования для уравнений (3.2) и (3.3), можно записать еще два соотношения, т. е. получить уравнения (3.20), (3.21) для усилий, в которых (см. рис. 3.2) принято

$$\begin{aligned} q_x &= q_{x1} - q_{x2} + \int_{-h/2}^{h/2} X dz, \quad q_y = q_{y1} - q_{y2} + \int_{-h/2}^{h/2} Y dz, \\ q_z &= q_{z1} - q_{z2} + \int_{-h/2}^{h/2} z dz. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Перейдем теперь к уравнениям моментов. Для этого умножим уравнение (3.1) на z и проинтегрируем по толщине пластины

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) z dz = 0.$$

Учитывая, что согласно (3.13)

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} z dz = \frac{\partial M_x}{\partial x}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} z dz = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

и интегрируя по частям с учетом (3.8), (3.23)

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} z dz = [z \tau_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = -\frac{h}{2} (q_{x1} + q_{x2}) - Q_x,$$

получим первое уравнение (3.22). Преобразуя аналогичным образом соотношение (3.2), можно в результате получить уравнения моментов (3.22), в которых

$$\begin{aligned} m_x &= -\frac{h}{2}(q_{x1} + q_{x2}) + \int_{-h/2}^{h/2} Xz \, dz, \\ m_y &= -\frac{h}{2}(q_{y1} + q_{y2}) + \int_{-h/2}^{h/2} Yz \, dz. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Таким образом, в теории пластин уравнения равновесия теории упругости удовлетворяются в отношении усилий и моментов.

Итак, теория пластин в основном построена. Деформации пластины определяются тремя перемещениями u_0 , v_0 , w , относительными деформациями и функциями кривизны ϵ_x , ϵ_y^0 , γ_{xy} , κ_x , κ_y , κ_{xy} , а напряженное состояние — усилиями N_x , N_y , N_{xy} , Q_x , Q_y и моментами M_x , M_y , M_{xy} . Эти 17 неизвестных функций переменных x и y должны удовлетворять системе 17 уравнений, включающей пять уравнений равновесия (3.20)–(3.22), шесть физических соотношений (3.14), (3.15) и шесть геометрических соотношений (3.16), (3.17). Перемещения u , v , w и напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} определяются формулами (3.9) и (3.19).

Можно заметить, что полученная система уравнений разделяется на две независимые подсистемы. Действительно, восемь уравнений (3.14), (3.16) и (3.20) включают восемь неизвестных N_x , N_y , N_{xy} , ϵ_x^0 , ϵ_y^0 , γ_{xy}^0 , u_0 , v_0 , которые определяют напряженно-деформированное состояние в плоскости пластины, а девять уравнений (3.15), (3.17), (3.21) и (3.22) включают девять неизвестных M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y , κ_x , κ_y , κ_{xy} , w , которые определяют напряженно-деформированное состояние пластины при изгибе. В связи с этим в дальнейшем будут отдельно рассматриваться задачи о плоском напряженном состоянии и изгибе пластин.

Прежде чем перейти к приложениям построенной теории, сделаем еще одно существенное замечание. При выводе формул (3.9) отмечалось, что гипотезы Кирхгофа, на которых основана теория пластин, по существу соответствуют равенствам $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Казалось бы, что при этом из закона Гука (3.7) должно следовать, что $\tau_{xz} = 0$ и $\tau_{yz} = 0$, однако в уравнениях равновесия (3.21), (3.22) фигурируют перерезывающие силы Q_x и Q_y , являющиеся равнодействующими напряжений τ_{xz} и τ_{yz} . Из рис. 3.3 следует, что при отсутствии Q_x и Q_y не может быть обеспечено равновесие элемента в направлении оси z , т. е. имеет место противоречие между уравнениями равновесия и законом Гука для деформации с индексом z . Появление такого противоречия является совершенно естественным — следовало с самого начала ожидать, что введение дополнительных предположений — гипотез

Кирхгофа — приведет к построению приближенной теории, в которой некоторые соотношения полной системы уравнений теории упругости не будут удовлетворены. Поскольку условия равновесия должны быть выполнены, остается признать, что в теории пластин нарушается закон Гука для напряжений и деформаций с индексом z . Напряжения τ_{xz} , τ_{yz} и σ_z находятся из уравнений равновесия (3.1)—(3.3). Действительно, подставляя напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} из (3.19) в уравнения (3.1), (3.2) и интегрируя последние по z с учетом уравнений (3.20), (3.22), получим

$$\tau_{xz} = \frac{6Q_x}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right), \quad \tau_{yz} = \frac{6Q_y}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right). \quad (3.26)$$

Подставляя (3.26) в уравнение (3.3) и интегрируя его по z с учетом уравнения (3.21), найдем

$$\sigma_z = -q \left(\frac{1}{2} + \frac{3z}{2h} - \frac{2z^3}{h^3} \right). \quad (3.27)$$

Ввиду того, что равенства (3.26), (3.27) обычно используются в задачах изгиба пластин, при их выводе предполагалось, что на пластину действует только давление q по поверхности $z = -h/2$, т. е. принималось (рис. 3.2) $X = Y = Z = 0$; $q_{x1} = q_{x2} = q_{y1} = q_{y2} = q_{z2} = 0$; $q_{z1} = q$.

3.2. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИН

3.2.1. Исходные соотношения

Система уравнений теории пластин разделяется на две независимые подсистемы, описывающие нагружение в плоскости пластины и ее изгиб. Рассмотрим случай, когда пластина нагружена контурными силами, лежащими в ее срединной плоскости и вызывающими в ней напряженное состояние, которое называется плоским (рис. 3.4).

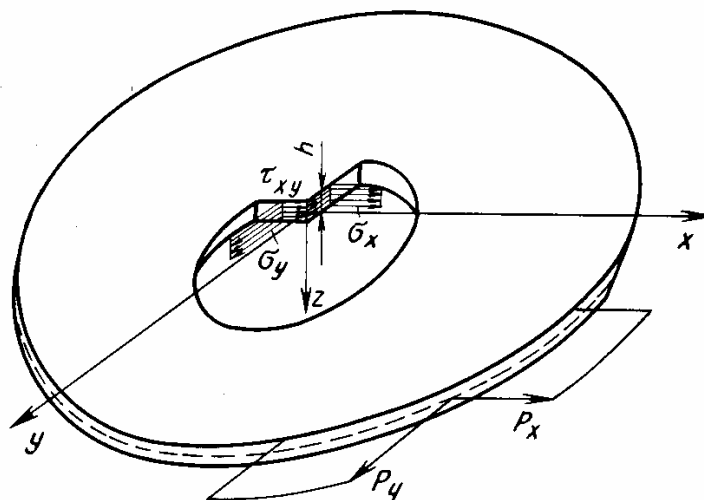


Рис. 3.4. Пластина, находящаяся в условиях плоского напряженного состояния

Запишем для этого случая систему уравнений теории пластин, включающих усилия N_x , N_y , N_{xy} , деформации ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} и перемещения u и v (поскольку напряжения, деформации и перемещения равномерно распределены по толщине пластины, индекс «0», обозначающий соответствующие составляющие в общих соотношениях разд. 3.1, в дальнейшем опускается). Уравнения равновесия (3.20) при $q_x = q_y = 0$ принимают вид

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (3.28)$$

где согласно равенствам (3.19)

$$N_x = \sigma_x h, \quad N_y = \sigma_y h, \quad N_{xy} = \tau_{xy} h. \quad (3.29)$$

Физические и геометрические соотношения (3.14), (3.16) записываются в форме

$$N_x = B(\epsilon_x + \mu \epsilon_y), \quad N_y = B(\epsilon_y + \mu \epsilon_x), \quad N_{xy} = 0,5B(1 - \mu)\gamma_{xy}, \quad (3.30)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.31)$$

где $B = Eh/(1 - \mu^2)$.

Восемь уравнений (3.28), (3.30), (3.31) включают восемь неизвестных. Распространенным методом решения полученной системы является решение задачи в функциях напряжений, изложенное в разд. 1.1.3 гл. 1. Согласно этому методу основная система уравнений включает уравнения равновесия (3.28) и уравнение совместности деформаций, которое может быть непосредственно получено из соотношений (3.31) и имеет вид

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.32)$$

Записывая (3.32) через усилия с помощью соотношений (3.30), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(N_x - \mu N_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(N_y - \mu N_x) = 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.33)$$

Таким образом, имеем три уравнения (3.28), (3.33), включающие три неизвестных усилия N_x , N_y , N_{xy} . Эти три уравнения можно привести к одному введением функции напряжений Эри φ

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (3.34)$$

Подставляя усилия (3.34) в уравнения (3.28), (3.33), можно убедиться в том, что уравнения равновесия (3.28) тождественно удовлетворяются, а уравнение совместности деформаций (3.33) принимает вид

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (3.35)$$

$$\text{где } \nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (3.36)$$

Таким образом, задача о нагружении пластины в своей плоскости сводится к решению уравнения (3.35). Это уравнение подробно исследуется в курсе теории упругости (см., например, [16]).

3.2.2. Однородное плоское напряженное состояние

В панелях крыла и фюзеляжа самолета, в стенках лонжеронов и нервюр реализуется напряженное состояние, которое приближенно можно считать плоским и однородным, т. е. не зависящим от координат (рис. 3.5). Такое состояние описывается функцией напряжений вида

$$\varphi = \frac{1}{2} N_x^0 y^2 + \frac{1}{2} N_y^0 x^2 - N_{xy}^0 xy. \quad (3.37)$$

Уравнение (3.35) при этом тождественно удовлетворяется и согласно (3.34) $N_x = N_x^0$, $N_y = N_y^0$, $N_{xy} = N_{xy}^0$. Считая усилия N_x^0 , N_y^0 , N_{xy}^0 заданными, найдем перемещения. Из равенств (3.30) и (3.31) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh} (N_x - \mu N_y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Eh} (N_y - \mu N_x); \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{xy}. \quad (3.39)$$

Интегрируя равенства (3.38) с учетом того, что усилия постоянны, получим

$$u = \frac{x}{Eh} (N_x^0 - \mu N_y^0) + f_1(y), \quad v = \frac{y}{Eh} (N_y^0 - \mu N_x^0) + f_2(x).$$

Подставим u и v в (3.39)

$$f_1'(y) + f_2'(x) = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{xy}^0.$$

Это соотношение может быть выполнено, если

$$f_1'(y) = c_1, \quad f_2'(x) = c_2, \quad c_1 + c_2 = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{xy}^0,$$

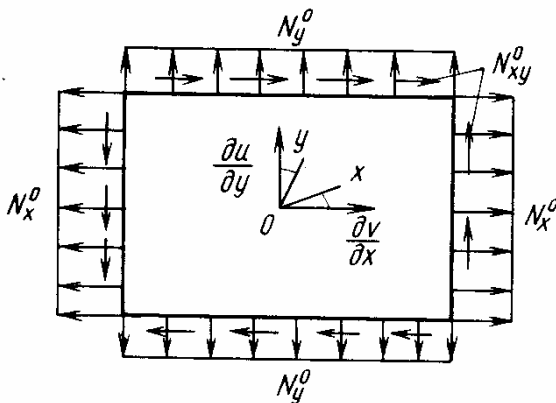


Рис. 3.5. Пластина, находящаяся в условиях однородного плоского напряженного состояния

$$\text{т. е. } f_1 = c_1 y + c_3, \quad f_2 = c_2 x + c_4$$

$$\text{и тогда } u = \frac{x}{Eh} (N_x^0 - \mu N_y^0) + c_1 y + c_3,$$

$$v = \frac{y}{Eh} (N_y^0 - \mu N_x^0) + c_2 x + c_4,$$

$$\text{где } c_1 + c_2 = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{xy}^0.$$

Закрепив начало координат 0 от смещений по осям x и y , т. е. положив $u(0, 0) = 0$, $v(0, 0) = 0$, найдем $c_3 = c_4 = 0$.

Малый угол поворота пластины относительно начала координат определяется равенством (см. рис. 3.5)

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Полагая $\omega = 0$, получим $c_1 = c_2$, т. е.

$$u = \frac{x}{Eh} (N_x^0 - \mu N_y^0) + \frac{(1+\mu)y}{Eh} N_{xy}^0;$$

$$v = \frac{y}{Eh} (N_y^0 - \mu N_x^0) + \frac{(1+\mu)x}{Eh} N_{xy}^0.$$

3.2.3. Концентрация напряжений в пластине с отверстием

Рассмотрим важную для приложений задачу о растяжении пластины с малым круговым отверстием (рис. 3.6) — задачу Кирша. Введем полярную систему координат (r, θ) , связанную с декартовыми координатами соотношениями

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \theta = \arctg(y/x). \quad (3.40)$$

Для анализа напряженного состояния в окрестности отверстия необходимо записать полученные выше уравнения в полярных координатах. Эти уравнения можно вывести непосредственно, рассматривая элемент в полярных координатах, или путем перехода от декартовых координат к полярным. Из равенств (3.40) имеем

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

Рассматривая некоторую функцию $f(x, y)$ как сложную функцию переменных r и θ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \times \\ &\times \sin \theta, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \sin \theta + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \cos \theta; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \times \\ &\times \frac{\sin \theta - \cos \theta}{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} + \\ &+ 2 \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}; \end{aligned}$$

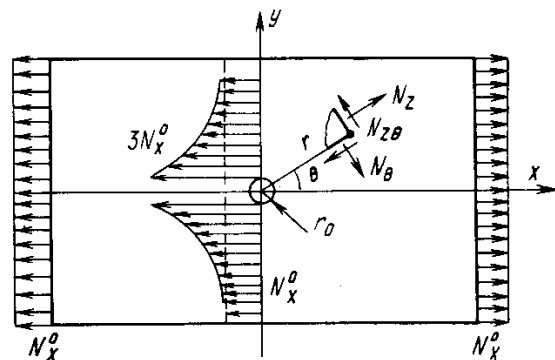


Рис. 3.6. Растяжение пластины с круговым отверстием

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - \\
&\quad - 2 \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \\
&\quad - \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}; \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

С учетом равенств (3.41) основное уравнение плоской задачи (3.34) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (3.42)$$

Запишем теперь связь между усилиями N_r , N_θ , $N_{r\theta}$ и функцией напряжений φ . Заметим, что при $\theta = 0$ (см. рис. 3.6) $N_x = N_r$, $N_y = N_\theta$, $N_{xy} = N_{r\theta}$. Используя равенства (3.34) и переходя от декартовых координат к полярным с помощью формул (3.41), в которых следует принять $\theta = 0$, окончательно получим

$$\begin{aligned}
N_r &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \\
N_\theta &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\
N_{r\theta} &= - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_{\theta=0} = - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.
\end{aligned} \quad (3.43)$$

Рассмотрим теперь пластину, показанную на рис. 3.6. Функция напряжений, соответствующая равномерному растяжению вдоль оси, в декартовой системе координат согласно (3.37) имеет вид

$$\varphi_1(x, y) = (1/2) N_x^0 y^2,$$

а в полярной системе координат в соответствии с (3.40) получим

$$\varphi_1(r, \theta) = (1/2) N_x^0 r^2 \sin^2 \theta = (1/4) N_x^0 r^2 (1 - \cos 2\theta). \quad (3.44)$$

Этой функции согласно формулам (3.43) соответствуют усилия

$$N_r^{(1)} = \frac{N_x^0}{2} (1 + \cos 2\theta), \quad N_\theta^{(1)} = \frac{N_x^0}{2} (1 - \cos 2\theta), \quad N_{r\theta}^{(1)} = \frac{N_x^0}{2} \sin 2\theta. \quad (3.45)$$

Учитывая структуру формулы (3.44), зададим искомую функцию напряжений в виде

$$\varphi = f_1(r) + f_2(r) \cos 2\theta. \quad (3.46)$$

Подставив выражение (3.46) в основное уравнение (3.42), получим

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr}\right) + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) \times \\ \times \left(\frac{d^2 f_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_2}{dr} - \frac{4}{r^2} f_2\right) \cos 2\theta = 0.$$

Это уравнение должно быть выполнено для всех значений θ . Следовательно, функции $f_1(r)$ и $f_2(r)$ должны удовлетворять обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr}\right) = 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 f_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_2}{dr} - \frac{4}{r^2} f_2\right) = 0.$$

Общие решения этих уравнений приводят к функции напряжений

$$\varphi = (c_1 r^2 \ln r + c_2 r^2 + c_3 \ln r + c_4) + \\ + \left(c_5 r^2 + c_6 r^4 + \frac{c_7}{r^2} + c_8\right) \cos 2\theta,$$

где c_i — постоянные интегрирования.

Согласно формулам (3.43) усилия принимают вид

$$N_r = c_1 (1 + 2 \ln r) + 2c_2 + \frac{c_3}{r^2} - \left(2c_5 + \frac{6c_7}{r^4} + \frac{4c_8}{r^2}\right) \cos 2\theta, \\ N_\theta = c_1 (3 + 2 \ln r) + 2c_2 - \frac{c_3}{r^2} \left(2c_5 + \frac{6c_7}{r^4} + \frac{4c_8}{r^2}\right) \cos 2\theta, \quad (3.47) \\ N_{r\theta} = \left(2c_5 + 6c_6 r^2 - \frac{6c_7}{r^4} - \frac{2c_8}{r^2}\right) \sin 2\theta.$$

При достаточно большом удалении от отверстия (при $r \rightarrow \infty$) усилия (3.47) должны совпадать с (3.45). Отсюда следует, что $c_1 = c_6 = 0$ и

$$2c_2 - 2c_5 \cos 2\theta = (1/2) N_x^0 (1 + \cos 2\theta), \\ 2c_2 + 2c_5 \cos 2\theta = (1/2) N_x^0 (1 - \cos 2\theta), \quad (3.48) \\ 2c_5 \sin 2\theta = -(1/2) N_x^0 \sin 2\theta.$$

На контуре отверстия $r = r_0$ усилия N_r и $N_{r\theta}$ должны обращаться в нуль, т. е.

$$2c_2 + \frac{c_3}{r_0^2} - \left(2c_5 + \frac{6c_7}{r_0^4} + \frac{4c_8}{r_0^2}\right) \cos 2\theta \equiv 0, \\ 2c_5 + \frac{6c_7}{r_0^4} - \frac{2c_8}{r_0^2} = 0. \quad (3.49)$$

Из уравнений (3.48) и (3.49) получим

$$c_2 = \frac{1}{4} \sigma_0, \quad c_3 = -\frac{r_0^2}{2} \sigma_0, \quad c_5 = -\frac{1}{4} \sigma_0, \quad c_7 = -\frac{r_0^4}{4} \sigma_0, \quad c_8 = \frac{r_0^2}{2} \sigma_0.$$

Окончательно усилия (3.47) принимают вид

$$\begin{aligned} N_r^x &= \frac{N_x^0}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{N_x^0}{2} \left(1 + \frac{3r_0^4}{r^4} - \frac{4r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\theta, \\ N_\theta^x &= \frac{N_x^0}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{N_x^0}{2} \left(1 + \frac{3r_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ N_{r\theta}^x &= -\frac{N_x^0}{2} \left(1 - \frac{3r_0^4}{r^4} + \frac{2r_0^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Анализ формул (3.50) показывает, что нормальные тангенциальные усилия N_θ^x принимают максимальные значения $3N_x^0$ на концах диаметра, перпендикулярного направлению растяжения (см. рис. 3.6), т. е. коэффициент концентрации напряжений в рассматриваемом случае равен трем.

Решение (3.50) построено в предположении о том, что ширина пластины достаточно велика. Для оценки минимально допустимой ширины пластины рассмотрим изменение усилия N_θ^x по оси y (при $\theta = \pi/2$). Из (3.50) имеем

$$N_\theta^x(r, \pi/2) = \frac{N_x^0}{2} \left(2 + \frac{r_0^2}{r^2} + 3 \frac{r_0^4}{r^4} \right).$$

Из этой формулы следует, что при $y = 10r_0$ N_θ^x отличается от N_x^0 на 6 %, т. е. полученное решение можно считать удовлетворительным, если ширина пластины более чем в 10 раз превышает диаметр отверстия.

При растяжении усилиями N_y^0 вдоль оси y в формулах (3.50) следует заменить θ на $(\pi/2 + \theta)$, т. е.

$$\begin{aligned} N_r^y &= \frac{N_y^0}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{N_y^0}{2} \left(1 + \frac{3r_0^4}{r^4} - \frac{4r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\theta, \\ N_\theta^y &= \frac{N_y^0}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{N_y^0}{2} \left(1 + \frac{3r_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (3.51)$$

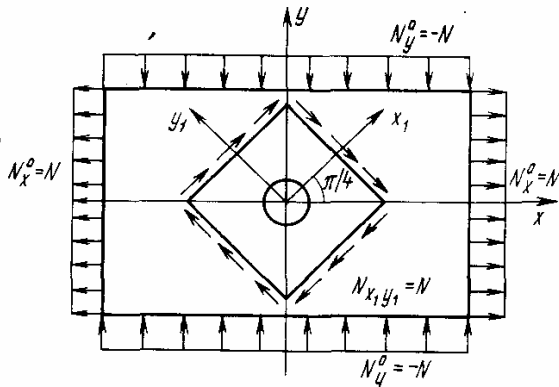


Рис. 3.7. Сдвиг пластины с круговым отверстием

$$N_{r\theta}^y = \frac{N_y^0}{2} \left(1 - \frac{3r_0^4}{r^4} + \frac{2r_0^2}{r^2} \right) \sin 2\theta.$$

Если на растяжение вдоль оси x с усилиями $N_x^0 = N$ наложить сжатие вдоль оси y с усилиями $N_y^0 = -N$, можно получить состояние чистого сдвига в координатах x_1, y_1 (рис. 3.7). Полагая в равенствах (3.50) $N_x^0 = N$, складывая их с соответствующими равенствами (3.51)

при $N_y^0 = -N$ и совмещаю ось x_1 с осью x (т. е. заменяя θ на $\theta + \pi/4$), получим

$$\begin{aligned} N_r^{xy} &= -N \left(1 + \frac{3r_0^4}{r^4} - \frac{4r_0^2}{r^2} \right) \sin 2\theta, \\ N_\theta^{xy} &= N \left(1 + \frac{3r_0^4}{r^4} \right) \sin 2\theta, \\ N_{r\theta}^{xy} &= -N \left(1 - \frac{3r_0^4}{r^4} + \frac{2r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Максимальное значение усилия N_θ^{xy} в рассматриваемом случае равно $4N$, т. е. коэффициент концентрации напряжений равен четырем.

В общем случае плоского напряженного состояния распределение усилий может быть получено алгебраическим сложением соответствующих равенств (3.50), (3.51) и (3.52).

3.3. ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

3.3.1. Уравнения теории изгиба пластин и граничные условия

Рассмотрим теперь случай изгиба пластины поперечной нормальной нагрузкой $q(x, y)$ (рис. 3.8). Ввиду того, что в плоскости пластины внешних сил не приложено, из системы уравнений (3.14), (3.16), (3.20) описывающей плоское напряжение, следует, что $u_0 = v_0 = 0$, $N_x = N_{xy} = N_y = 0$, т. е. из перемещений срединной плоскости в теории изгиба пластин остается только прогиб $w(x, y)$, а из силовых факторов — моменты M_x , M_y , M_{xy} и перерезывающие силы Q_x , Q_y (см. рис. 3.8). Перемещения точек пластины определяются равенствами (3.9) при $u_0 = v_0 = 0$, т. е.

$$u = -z \frac{dw}{dx}, \quad v = -z \frac{dw}{dy}. \quad (3.53)$$

Установим геометрический смысл этих равенств. Из рис. 3.9 следует, что при изгибе точка A смещается в направлении оси x в положение A_1 , причем $AA_1 = -u = z \operatorname{tg} \alpha$. Но $\operatorname{tg} \alpha = \partial w / \partial x$, т. е. получаем первую формулу (3.53). Таким образом, производные $\partial w / \partial x$ и $\partial w / \partial y$ являются углами поворота нормали к срединной плоскости в направлении осей x и y в пределах рассматриваемой, линейной теории изгиба пластин.

Изгибающие и крутящий моменты связаны с кривизной и кручением поверхности, в которую переходит при изгибе срединная плоскость, соотношениями (3.15)

$$M_x = D(\kappa_x + \mu \kappa_y), \quad M_y = D(\kappa_y + \mu \kappa_x), \quad M_{xy} = \frac{D}{2}(1 - \mu) \kappa_{xy}, \quad (3.54)$$

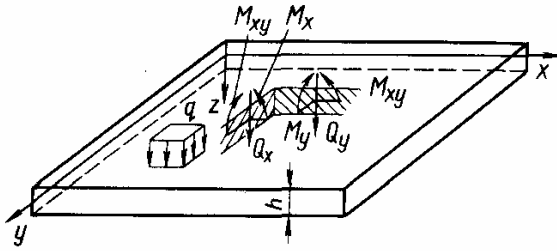


Рис. 3.8. Изгибаемая пластина

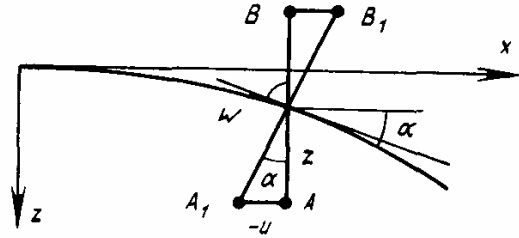


Рис. 3.9. Смещения точек пластины

где $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$ — изгибная или цилиндрическая жесткость пластины. Кривизна и кручение выражаются через прогиб w формулами (3.17)

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.55)$$

Уравнения равновесия согласно равенствам (3.21), (3.22) имеют вид

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0; \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (3.57)$$

В соответствии со схемой нагружения, показанной на рис. 3.8, и формулами (3.24), (3.25) в уравнениях (3.21) и (3.22) принято $q_z = q_{z1} = q$, $m_x = m_y = 0$.

Девять уравнений (3.54)—(3.57) включают девять неизвестных M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y , κ_x , κ_y , κ_{xy} , w и определяют напряженно-деформированное состояние пластины при изгибе. Эти уравнения можно свести к одному уравнению, включающему в качестве неизвестной функции $w(x, y)$. Подставим с этой целью κ_x , κ_y и κ_{xy} из (3.53) в (3.54). Получим

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (3.58)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Выразим теперь из уравнений (3.57) перерезывающие силы

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3.59)$$

или с учетом (3.58)

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (3.60)$$

Исключим Q_x и Q_y из уравнения (3.56) с помощью (3.59), т. е.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0. \quad (3.61)$$

Подставляя моменты из (3.58), окончательно получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

или с учетом (3.36)

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}. \quad (3.62)$$

Уравнение (3.62), называемое по имени французских механиков, которые впервые его получили, уравнением Софи Жермен—Лагранжа, является основным уравнением теории изгиба пластин.

Если прогиб пластины найден, по формулам (3.58) и (3.59) можно определить моменты и перерезывающие силы и далее по формулам (3.19), (3.26), (3.27) — все напряжения, т. е.

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z, \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3} z, \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z; \quad (3.63)$$

$$\tau_{xz} = \frac{6Q_x}{h^3} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right), \quad \tau_{yz} = \frac{6Q_y}{h^3} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right); \quad (3.64)$$

$$\sigma_z = -q \left(\frac{1}{2} + \frac{3z}{2h} - \frac{2z^3}{h^3} \right). \quad (3.65)$$

Решение уравнения (3.61) должно удовлетворять граничным условиям, которые отражают характер закрепления или нагружения пластины по контуру. Рассмотрим типовые граничные условия:

а) жестко защемленный край (рис. 3.10, а). Пусть, например, край $x = 0$ жестко защемлен. Тогда при $x = 0$ должны быть равны нулю перемещения, т. е. $u = v = w = 0$. Из первого равенства (3.53) следует, что $\partial w / \partial x = 0$, а из второго — что усло-

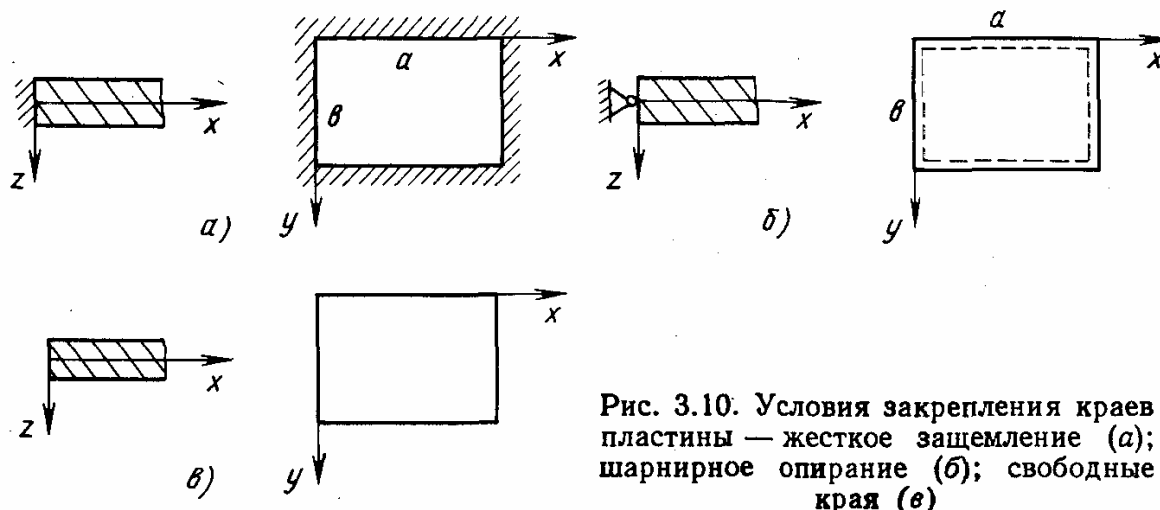


Рис. 3.10. Условия закрепления краев пластины — жесткое защемление (а); шарнирное опирание (б); свободные края (в)

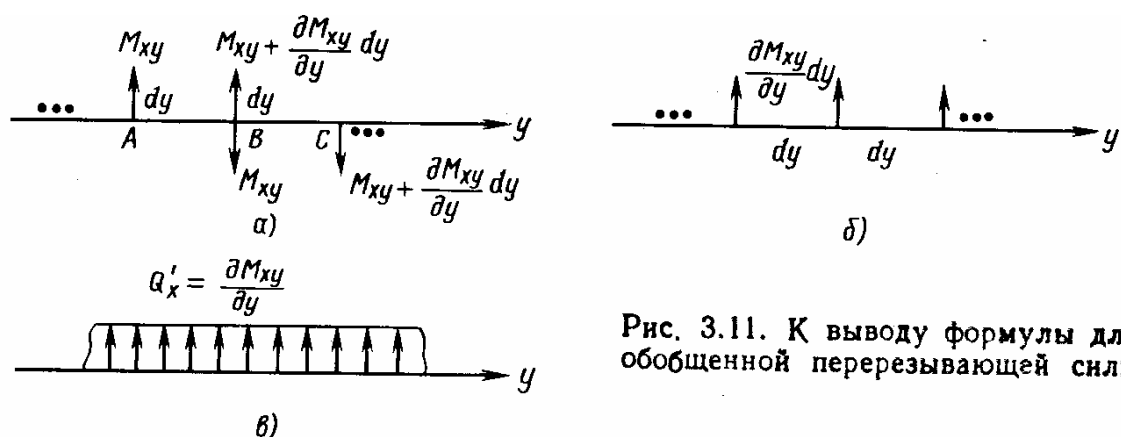


Рис. 3.11. К выводу формулы для обобщенной перерезывающей силы

ние $v = 0$ удовлетворяется автоматически, т. е. при $w = 0$, $\partial w / \partial y \equiv 0$ при $x = 0$. Итак, граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } x = \text{const } w = \partial w / \partial x &= 0, \\ \text{при } y = \text{const } w = \partial w / \partial y &= 0, \end{aligned} \quad (3.66)$$

т. е. на защемленных краях пластины обращаются в нуль прогиб и соответствующие углы поворота;

б) шарнирно опертый край (см. рис. 3.10, б). На шарнирно опертом крае обращаются в нуль прогиб и изгибающий момент. Например, для края $x = 0$ необходимо потребовать, чтобы $w = 0$ и $M_x = 0$. Поскольку из условия $w = 0$ следует $\partial w / \partial y = \partial^2 w / \partial y^2 = 0$ при $x = 0$, то с учетом (3.58) получаем, что при $x = 0$, $w = 0$ и $M_x = -D (\partial^2 w / \partial x^2) = 0$, т. е. условия шарнирного опирания имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } x = \text{const } w = \partial^2 w / \partial x^2 &= 0, \\ \text{при } y = \text{const } w = \partial^2 w / \partial y^2 &= 0; \end{aligned} \quad (3.67)$$

в) свободный край (см. рис. 3.10, в). На свободном крае, например $x = 0$, отсутствуют напряжения σ_x , τ_{xy} и τ_{xz} , т. е. в соответствии с равенствами (3.63), (3.64) должны выполняться условия $M_x = M_{xy} = Q_x = 0$. Однако в рассматриваемой теории разрушающее уравнение (3.61) имеет четвертый порядок, т. е. для определенности решения на каждом крае должно быть не более двух граничных условий, как это и было в случаях защемленного и шарнирно опертого края. Три записанных выше условия по существу статически эквивалентны двум, поскольку крутящий момент на крае сводится к паре перерезывающих сил. Действительно, рассмотрим край срединной плоскости $x = 0$ (рис. 3.11). Заменим момент $M_{xy} dy$ на участке $AB = dy$ (см. рис. 3.11, а) парой сил M_{xy} в точках А и В (по теории изгиба пластин моменты являются распределенными и имеют размерность силы). Аналогичную операцию сделаем и для соседнего участка $BC = dy$. Тогда в точке В (и в других точках, поскольку точка В является произвольной) образуются силы, показанные на рис. 3.11, б, статически эквивалентные распределенной пере-

перерезающей силе Q'_x (см. рис. 3.11, в). Добавляя эту перерезывающую силу к основной Q_x и поступая аналогичным образом на крае $y = 0$, получим обобщенные перерезывающие силы Кирхгофа

$$Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y^* = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (3.68)$$

С помощью равенств (3.58) и (3.60) Q_x^* и Q_y^* можно выразить через прогиб:

$$\begin{aligned} Q_x^* &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \\ Q_y^* &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Таким образом, граничные условия на свободном крае имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } x = \text{const} \quad M_x = Q_x^* &= 0, \\ \text{при } y = \text{const} \quad M_y = Q_y^* &= 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Они могут быть записаны через w с помощью формул (3.58) и (3.69).

В заключение запишем выражение для полной энергии изгибаемой пластины. Согласно формуле (1.24)

$$\mathcal{E} = U - A. \quad (3.71)$$

Потенциальная энергия деформации U определяется в общем случае равенствами (1.19) и (1.23) и в рассматриваемом случае принимает вид

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz. \quad (3.72)$$

Здесь ϵ_x , ϵ_y и γ_{xy} в соответствии с (3.4) и (3.53) определяются равенствами

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Осуществляя в (3.72) интегрирование по z от $-h/2$ до $h/2$, с учетом (3.13) получим

$$U = \frac{1}{2} \iint \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy. \quad (3.73)$$

Работа поперечной нагрузки q на малом возможном перемещении w имеет вид

$$A = \iint q w dx dy. \quad (3.74)$$

Окончательно, подставляя (3.73) и (3.74) в (3.70) и выражая моменты через прогиб с помощью соотношений (3.58), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \iint \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - qw \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Как уже отмечалось в разд. 1.3.2, из условия $\delta \mathcal{E} = 0$ можно получить уравнение равновесия в функциях перемещений и статические граничные условия. Вариационное уравнение для рассматриваемого функционала имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)} + \frac{\partial}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)} = 0, \quad (3.76)$$

где F — подынтегральная функция в (3.75) и

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w} &= -\frac{q}{D}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)} = 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}; \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)} &= 2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)} &= 4(1 - \mu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в (3.76), получим основное уравнение теории изгиба пластин в форме (3.62). Осуществляя преобразования вариации полной энергии $\delta \mathcal{E}$ по схеме, аналогичной изложенной в разд. 1.3.3 для балки, можно получить также естественные граничные условия, которые определяются выведенными выше соотношениями (3.66), (3.67), (3.70).

Отметим, что приведенные общие зависимости строго справедливы в том случае, когда срединная поверхность при деформации пластины представляет собой разворачивающуюся поверхность. В частности, это имеет место при чистом изгибе пластины по цилиндрической поверхности. Если срединная плоскость изгибается в неразворачивающуюся поверхность, то рассмотренная теория и соответствующие зависимости будут достаточно точными, если возникающие в срединной поверхности напряжения малы по сравнению с максимальными напряжениями изгиба. А это равносильно тому, что линейная деформация срединной поверхности мала по сравнению с максимальной деформацией изгиба, которая зависит от толщины пластины и ее кривизны при деформации.

3.3.2. Методы расчета прямоугольных пластин

Рассмотрим основные методы, применяемые в строительной механике для расчета изгибаемых пластин.

Рассмотрим сначала некоторые частные случаи закрепления, при которых возможны точные решения задачи.

Решение в двойных тригонометрических рядах (метод Навье). Метод применяется для решения задачи об изгибе прямоугольной шарнирно опертой по всему контуру пластины при произвольной распределенной нагрузке $q(x, y)$.

Поместим начало прямоугольной системы координат x, y в один из углов пластины. Вдоль осей x, y пластина имеет размеры a и b (см. рис. 3.10, б). Разрешающее уравнение и граничные условия для такой пластины определяются равенствами (3.61) и (3.67), т. е.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (3.77)$$

$$\text{При } x = 0 \text{ и } x = a \quad w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0, \quad (3.78)$$

$$\text{при } y = 0 \text{ и } y = b \quad w = \partial^2 w / \partial y^2 = 0.$$

Представим решение уравнения (3.78) в форме

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.79)$$

Как видно, при таком задании функции прогибов удовлетворяются все граничные условия. Подставим далее (3.79) в (3.77) и с учетом обозначения

$$A_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = B_{mn} \quad (3.80)$$

получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (3.81)$$

Коэффициенты B_{mn} этого ряда определяются по формуле

$$B_{mn} = \frac{4}{abD} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy,$$

которую можно получить, умножив обе части равенства (3.81) на

$$\sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dx dy \quad (k, l = 1, 2, 3, \dots)$$

и проинтегрировав результат по x от 0 до a и по y от 0 до b с учетом свойства ортогональности тригонометрических функций. Таким образом, из (3.80) и формул для B_{mn} следует

$$A_{mn} = \frac{4}{\pi^4 ab \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 D} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad (3.82)$$

т. е. решение определяется соотношениями (3.79) и (3.82). В частности, при равномерном давлении $q(x, y) = q_0$ имеем

$$B_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mnD}, \quad A_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^4 mnD \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} (m, n = 1, 3, 5 \dots).$$

Этот ряд быстро сходится. При $m = n = 1$ для квадратной пластины ($a = b$) максимальный прогиб в середине пластины

$$w_{\max} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^6 D}$$

отличается от точного результата на 2,5 %.

Метод Навье можно применить также для расчета пластины на изгиб при сосредоточенном воздействии. Для этого представим сначала, что на ограниченном участке действует распределенная нагрузка $q_0 = P/uv$ (рис. 3.12). В этом случае на основании (3.82) можно записать

$$A_{mn} = \frac{4P/(uv)}{\pi^4 Dab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \int_{\xi - \frac{u}{2}}^{\xi + \frac{k}{2} \eta + \frac{v}{2}} \int_{\eta - \frac{v}{2}}^{\eta + \frac{u}{2}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

Отсюда после интегрирования будем иметь

$$A_{mn} = \frac{4P \sin \frac{n\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{\pi^4 Dab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \left(\frac{\sin \frac{m\pi u}{2a}}{\frac{m\pi u}{2a}} - \frac{\sin \frac{m\pi v}{2b}}{\frac{m\pi v}{2b}} \right).$$

Устремляя u и v к нулю, получим

$$A_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{\pi^4 Dab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

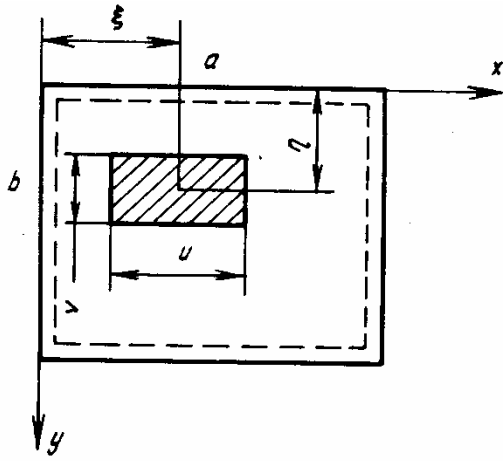


Рис. 3.12. Шарнирно опертая пластина при локальном нагружении

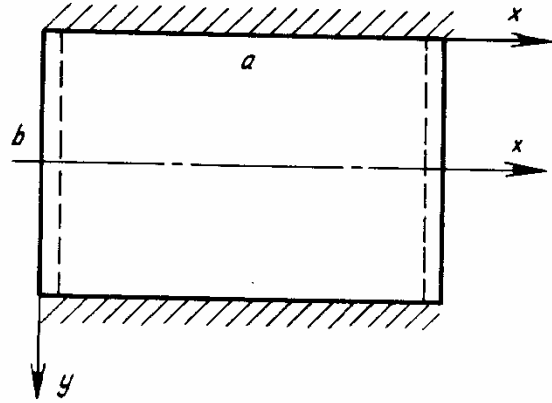


Рис. 3.13. Пластина с двумя шарнирно опертыми и двумя жестко защемленными краями

и согласно разложению (3.79) будем иметь следующее решение, определяющее прогиб пластины, нагруженной сосредоточенной силой в точке

$$w(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}.$$

Решение в одинарных тригонометрических рядах (метод Леви). Этот метод применим для пластины, два противоположных края которой шарнирно оперты, а на двух других могут быть любые граничные условия.

Пусть имеем пластину, шарнирно опертую по краям $x = 0$, $x = a$ (рис. 3.13). На границах пластины имеем условия (3.67), т. е.

$$\text{при } x = 0 \text{ и } x = a \quad w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0. \quad (3.83)$$

Представим решение уравнения (3.67) в виде одинарного тригонометрического ряда

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (3.84)$$

каждый член которого удовлетворяет граничным условиям (3.83), а $Y_m(y)$ — искомые функции.

Подставляя разложение (3.84) в уравнение (3.77), получим

$$\sum_m \left(Y_m^{\text{IV}} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m^{\text{II}} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (3.85)$$

Разложим теперь нагрузку $q(x, y)$ в ряд, аналогичный (3.84), т. е.

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (3.86)$$

где $q_m(y)$ можно получить следующим образом. Умножим правую и левую части (3.86) на $\sin(k\pi x/a) dx$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) и проинтегрируем результат по x от 0 до a . С учетом условий ортогональности тригонометрических функций

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq k \\ \frac{a}{2} & \text{при } m = k \end{cases}$$

получим

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (3.87)$$

Тогда уравнение (3.84) примет вид

$$\sum_m \left(Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m^{II} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{1}{D} \sum_m q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Так как это равенство справедливо при любых x , то, приравняв множители при синусах с одинаковыми номерами m , получим m -уравнений

$$Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m^{II} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = \frac{q_m(y)}{D}.$$

Решение каждого из этих уравнений имеет вид

$$Y_m(y) = A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + B_m y \operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} y + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + D_m y \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + Y_m^*. \quad (3.88)$$

Частное решение Y_m^* определяется в зависимости от вида внешней нагрузки, а постоянные A_m, B_m, C_m, D_m находятся из граничных условий на краях $y = 0, y = b$.

Пример. Пусть $q(x, y) = q_0$ — равномерно распределенная нагрузка, а края $y = 0, y = b$ защемлены (см. рис. 3.13). Так как в этом случае прогибы симметричны относительно середины пластины, то перенесем ось x на середину (новое положение оси x показано на рис. 3.13 штрихпунктирной линией). Тогда в силу симметрии прогиба по оси y в решении (3.88) следует исключить нечетные составляющие, т. е. принять $B_m = C_m = 0$. В результате получим

$$Y_m(y) = A_m \operatorname{ch} \lambda_m y + D_m y \operatorname{sh} \lambda_m y + Y_m^*, \quad (3.89)$$

где $\lambda_m = m\pi/a$.

Из равенства (3.87) при $q = q_0$ имеем

$$q_m = \frac{4q_0}{a\lambda_m} (m = 1, 3, 5, \dots)$$

и частное решение Y_m^* можно принять в виде

$$Y_m^* = \frac{4q_0}{aD\lambda_m^5}. \quad (3.90)$$

Поскольку края $y = \pm b/2$ (см. рис. 3.13) жестко защемлены, граничные условия записываются в форме (3.66), т. е.

$$\text{при } y = \pm b/2 \quad w = \partial w / \partial y = 0. \quad (3.91)$$

Подставляя (3.89) с учетом (3.90) в условия (3.91), получим следующие два уравнения для определения A_m и D_m :

$$A_m \operatorname{ch} \alpha_m + D_m (b/2) \operatorname{sh} \alpha_m = -4q_0 / (a \lambda_m^5 D),$$

$$A_m \lambda_m \operatorname{sh} \alpha_m + D_m (\operatorname{sh} \alpha_m + \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m) = 0,$$

где $\alpha_m = \lambda_m b/2$.

Находя отсюда A_m и D_m и подставляя их в решение (3.89) и далее используя формулу (3.84), получим функцию прогиба в виде

$$w(x, y) = \frac{4q_0}{aD} \sum_{m=1, 3, 5 \dots} \frac{(\operatorname{sh} \alpha_m + \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m) \operatorname{ch} \lambda_m y - \lambda_m (\operatorname{sh} \alpha_m) y \operatorname{sh} \lambda_m y}{\lambda_m^5 (\alpha_m + \operatorname{ch} \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m)} \times \\ \times \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Полученный ряд достаточно быстро сходится. В частности, для квадратной пластины ($a = b$) максимальный прогиб в центре ($x = a/2, y = 0$) при $m = 1$ составляет $w_{\max} = 0,002q_0 a^4/D$, что отличается от точного значения на 4 %.

В реальных конструкциях пластины могут иметь самые разнообразные условия закрепления. Поскольку при этом точное решение, как правило, построить не удастся, для расчета используются прикладные, приближенные методы, изложенные в разд. 1.6 гл. 1. Проиллюстрируем приложение этих методов к расчету изгибаемых пластин.

Расчет пластин методом Ритца—Тимошенко. Согласно изложенному в разд. 1.6.1 функция прогиба представляется в виде конечного ряда

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^k A_i w_i(x, y), \quad (3.92)$$

где задаваемые (аппроксимирующие) функции $w_i(x, y)$ должны удовлетворять по крайней мере геометрическим граничным условиям. Неизвестные коэффициенты A_i определяются на основании условий типа (1.71)

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots k), \quad (3.93)$$

где полная потенциальная энергия $\mathcal{E}$ вычисляется подстановкой (3.92) в выражение (3.75).

Условия (3.93) приводят к системе линейных алгебраических уравнений, матричная форма которых имеет вид

$$[a] [A] = [b], \quad (3.94)$$

где $[a]$, $[b]$ — квадратная матрица и матрица-столбец порядка k , элементы которых определяются по формулам

$$a_{ij} = D \iint \left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \right) + \right. \\ \left. + 2(1 - \mu) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} \right] dx dy, \\ b_i = \iint q w_i dx dy \quad (i, j = 1, 2 \dots k).$$

Определив из системы (3.94) неизвестные коэффициенты A_i и подставив их в (3.92), получим искомую функцию прогибов. Точность результата зависит от количества членов в ряде (3.92) и характера выбранных аппроксимирующих функций. При практических расчетах пластин эти функции удобно представлять в виде

$$w_i(x, y) = \varphi_m(x) \psi_n(y), \quad (3.95)$$

при этом, если выбранные функции $\varphi_m(x)$ и $\psi_n(y)$ будут ортогональными, то значительно упростятся как формулы для коэффициентов a_{ij} в уравнениях (3.94), так и сами уравнения, так как матрица $[a]$ станет диагональной и уравнения будут независимыми. В этом отношении в качестве функций $\varphi_m(x)$, $\psi_n(y)$ можно рекомендовать формы собственных колебаний балки, соответствующей изолированной полоске, вырезанной из пластины вдоль осей x , y . Граничные условия для такой балки должны соответствовать условиям закрепления пластины на сторонах $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. При выборе одного члена разложения в качестве функций $\varphi_1(x)$, $\psi_1(y)$ можно взять форму статического прогиба полоски-балки при нагрузке, аналогичной нагрузке на пластину, или форму основного тона собственных колебаний, если нагрузка на пластину равномерно распределенная.

В качестве примера рассмотрим прямоугольную шарнирно опертую пластину при действии сосредоточенной силы P , приложенной в точке с координатами ξ , η (см. рис. 3.12). Форму искомого прогиба представим в виде

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{m=k} \sum_{n=1}^{n=l} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Аппроксимирующие функции

$$\varphi_m = \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad \psi_n = \sin \frac{n\pi y}{b}$$

удовлетворяют всем граничным условиям. Кроме того, для этих функций выполняются условия ортогональности

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m = n \\ a/2 & \text{при } m \neq n \end{cases};$$

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 & \text{при } m = n \\ b/2 & \text{при } m \neq n \end{cases}.$$

Тогда коэффициенты $a_i \equiv a_{mn}$ и $b_i \equiv b_{mn}$ в уравнениях (3.94) определяются по формулам

$$a_{mn} = \frac{\pi^4 ab D}{4} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2,$$

$$b_{mn} = P \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}.$$

Неизвестные $A_i \equiv A_{mn}$ в уравнении (3.94) найдутся по формуле

$$A_{mn} = \frac{b_{mn}}{a_{mn}} = \frac{4P \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{\pi^4 ab D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

а искомая функция прогибов будет определяться выражением

$$w(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 ab D} \sum_{m=1}^{m=k} \sum_{n=1}^{n=l} \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

При $a = b$, $\xi = \eta = \frac{a}{2}$, $m = n = 1$ максимальный прогиб квадратной пластины при действии сосредоточенной силы в середине пластины и учете одного члена в выражении для функции прогибов будет

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{\pi^4 D}.$$

Расчет пластин методом Бубнова—Галеркина. В задаче об изгибе пластин этот метод, изложенный в разд. 1.6.2, используется для приближенного решения разрешающего уравнения теории изгиба пластин (3.62), которое перепишем в виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{q}{D} = 0. \quad (3.96)$$

Представим решение уравнения (3.96) в форме конечного ряда

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^k A_i w_i(x, y), \quad (3.97)$$

где задаваемые (аппроксимирующие) функции $w_i(x, y)$ должны удовлетворять всем граничным условиям на краях пластины. Неизвестные коэффициенты A_i определяются из условий типа (1.75)

$$\iint \Phi(x, y, A_i, q/D) w_i dx dy = 0, \quad (3.98)$$

где $\Phi(x, y, A_i, q/D)$ — функция, являющаяся результатом подстановки (3.94) в (3.96). Если бы ряд (3.97) являлся точным решением, функция ϕ обращалась бы в нуль. Условия (3.98), которые представляют собой условия ортогональности функции ошибки ϕ к каждой из аппроксимирующих функций, после вычисления интегралов (при решении они являются определенными) дают систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_i . При выборе аппроксимирующих функций можно использовать рекомендации, которые были сделаны при описании метода Ритца—Тимошенко. Однако следует помнить, что в данном случае требования к функциям $w_i(x, y)$ являются более жесткими — они должны удовлетворять всем граничным условиям.

В качестве примера рассмотрим заземленную по контуру прямоугольную пластину при поперечной равномерно распределенной нагрузке (см. рис. 3.10, а). Для сокращения вычислений оставим в (3.97) один член и, учитывая приведенные ранее рекомендации, представим аппроксимирующую функцию в виде

$$w_1(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y),$$

где функции $\varphi_1(x) = (x^2/a^4)(x-a)^2$, $\psi_1(y) = (y^2/b^4)(y-b)^2$ представляют собой форму прогибов полосок-балок, вырезанных из пластины вдоль осей x, y . Как видно, функция

$$w_1(x, y) = A_1 \frac{x^2}{a^4} (x-a)^2 \frac{y^2}{b^4} (y-b)^2$$

удовлетворяет всем граничным условиям. Подставив $w_1(x, y)$ в (3.96), получим

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, A_1, q/D) = & \frac{A_1}{a^4 b^4} [24x^2(x-a)^2 + \\ & + B(6x^2 - 6ax + a^2)(6y^2 - 6by + b^2) + 24y^2(y-b)^2] - q_0/D. \end{aligned}$$

Тогда на основании (3.98) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{A_1}{a^4 b^4} [24x^2(x-a)^2 + 8(6x^2 - 6ax + a^2)(6y^2 - 6by + b^2) + \right. \\ \left. + 24y^2(y-b)^2] - \frac{q_0}{D} \right\} \frac{x^2}{a^4} (x-a)^2 \frac{y^2}{b^4} (y-b)^2 dx dy = 0, \end{aligned}$$

откуда после интегрирования и преобразований получим

$$A_1 = \frac{7a^4b^4q_0}{8D \left(a^4 + \frac{4}{7} a^2b^2 + b^4 \right)}.$$

В итоге выражение для искомой функции прогибов примет вид

$$w(x, y) = \frac{7x^2y^2(x-a)^2(y-b)^2q_0}{8D \left(a^4 + \frac{4}{7} a^2b^2 + b^4 \right)}.$$

В частности, для квадратной пластины ($a = b$) максимальный прогиб в середине пластины ($x = y = \frac{a}{2}$) будет

$$w_{\max} = 0,00133 \frac{q_0 a^4}{D},$$

что не более чем на 5 % отличается от точного результата.

Расчет пластин методом Власова—Канторовича. При использовании этого метода, изложенного в разд. 1.6.3, неизвестная функция прогибов в соответствии с (1.76) задается в виде конечного ряда

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^k f_i(x) \varphi_i(y). \quad (3.99)$$

Здесь одна из групп функции, пусть $\varphi_i(y)$, задается заранее. Эти функции достаточно хорошо должны описывать деформирование пластины вдоль оси y и удовлетворять граничным условиям на краях $y = \text{const}$. Другая группа функций, в данном случае $f_i(x)$, определяется из обыкновенных дифференциальных уравнений типа (1.77), строящихся с использованием принципа Лагранжа.

Подставляя разложение (3.99) в выражение для полной энергии (3.75), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int \left\{ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (a_{ij} f_i'' f_j'' + b_{ij} f_i' f_j' + 2\mu c_{ij} f_i'' f_j' + 2(1-\mu) d_{ij} f_i' f_j') - \right. \\ \left. - \sum_i p_i f_i \right\} dx = \int F(f_i, f_j) dx, \end{aligned} \quad (3.100)$$

где $a_{ij} = \int D \varphi_i \varphi_j dy$, $b_{ij} = \int D \varphi_i' \varphi_j' dy$,

$$c_{ij} = \int D \varphi_i \varphi_j'' dy, \quad d_{ij} = \int D \varphi_i' \varphi_j' dy, \quad p_i = \int q \varphi_i dy.$$

Вариационные уравнения для функции $f_i(x)$ имеют вид, аналогичный (1.77), т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial f_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f_i'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial f_i''} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots k). \quad (3.101)$$

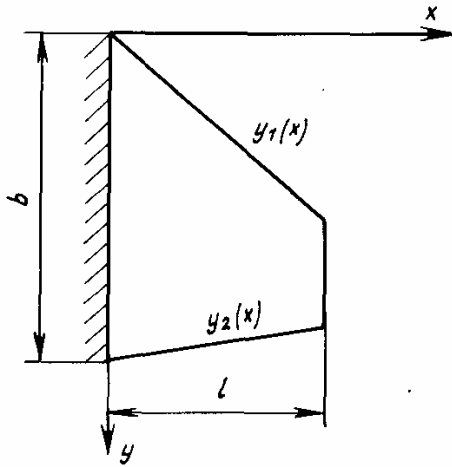


Рис. 3.14. Консольная пластина

Решения уравнений (3.99) должны удовлетворять граничным условиям на краях $x = \text{const}$. Геометрические граничные условия записываются непосредственно. Например, для жестко защемленного края в соответствии с (3.66) и (3.29) получим при $x = \text{const}$ $f_i = f'_i = 0$.

В качестве статических граничных условий следует принять естественные граничные условия вариационной задачи, вывод которых был проиллюстрирован на примере задачи об изгибе балки в разд. 1.3.3.

В рассматриваемом случае эти условия, аналогичные первым двум условиям (1.35) для свободного края $x = \text{const}$, имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial f'_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f''_i} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial f''_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots k). \quad (3.102)$$

Приведем пример применения метода Власова—Канторовича для определения прогибов консольной пластины при произвольно распределенной нагрузке (рис. 3.14). При этом будем считать, что пластина может быть переменной толщины и произвольной формы в плане. Задавая перемещение сечения $x = \text{const}$ вдоль оси x как поступательное перемещение вдоль оси z и поворот относительно оси x , представим функции $\varphi_i(y)$ в виде

$$\varphi_i(y) = y^i \quad (i = 0; 1).$$

Тогда ряд (3.99) примет вид

$$w(x, y) = f_0(x) + f_1(x)y,$$

а выражение для полной потенциальной энергии (3.100) будет

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l [a_0(f_0'')^2 + 2a_1 f_0'' f_1'' + a_2(f_1'')^2 + 2(1-\mu)a_0(f_1')^2 - \\ - 2p_0 f_0 - 2p_1 f_1] dx, \end{aligned}$$

$$\text{где } a_i = \int_{y_1}^{y_2} D y^i dy, \quad p_i = \int_{y_1}^{y_2} q y^i dy.$$

Тогда равенство (3.101) при $F = a_0(f_0'')^2 + 2a_1 f_0'' f_1'' + a_2(f_1'')^2 + 2(1-\mu)a_0(f_1')^2 - 2p_0 f_0 - 2p_1 f_1$ приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (a_0 f_0'' + a_1 f_1'') = p_0, \\ \frac{d^2}{dx^2} (a_1 f_0'' + a_2 f_1'') - 2(1-\mu)a_0 f_1' = p_1. \end{aligned} \quad (3.103)$$

При решении этих уравнений необходимо учесть, что на крае $x = 0$ (см. рис. 3.14) пластинка жестко закреплена, т. е. имеют место граничные условия

$$\text{при } x = 0 \quad f_0 = f'_0 = 0, \quad f'_1 = 0, \quad (3.104)$$

а край $x = l$ свободен, т. е. имеют место граничные условия (3.102)

при $x = l$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial f'_0} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f''_0} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial f'_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f''_1} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial f''_0} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial f''_1} &= 0. \end{aligned}$$

В развернутой форме эти условия имеют вид (при $x = l$)

$$\frac{d}{dx} (a_0 f''_0 + a_1 f''_1) = 0, \quad 2(1 - \mu) a_0 f'_1 - \frac{d}{dx} (a_1 f''_0 + a_2 f''_1) = 0. \quad (3.105)$$

$$a_0 f''_0 + a_1 f''_1 = 0; \quad a_1 f''_0 + a_2 f''_1 = 0.$$

Таким образом, для определения $f_0(x)$ и $f_1(x)$ имеем два дифференциальных уравнения (3.103) с переменными коэффициентами, каждое из которых имеет четвертый порядок и восемь условий (3.104), (3.105) для нахождения постоянных интегрирования.

В частности, для пластины в виде прямоугольного треугольника, который закреплён по катету b и имеет длину другого катета l , при равномерном давлении $q = q_0$ и постоянной жесткости D решение имеет вид

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{q_0 l^4}{8D} \frac{1}{1 - 2\alpha^2} \left[\frac{2}{9} (5 - 4\alpha^2) \left(1 - \bar{x} - \frac{1 - \bar{x}^4}{4} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta - 1}{\beta} \left(1 - \bar{x} - \frac{1 - \bar{x}^{\beta+1}}{\beta + 1} \right) \right]; \\ f_1 &= \frac{q_0 l^4}{4bD} \frac{1}{1 - 2\alpha^2} \left(\frac{\bar{x}^\beta - 1}{\beta} - \frac{\bar{x}^3 - 1}{3} \right), \end{aligned}$$

где $\bar{x} = 1 - \frac{x}{l}$, $\alpha = \frac{l}{b} \sqrt{\frac{3}{2} (1 - \mu)}$, $\beta = \sqrt{1 + 16\alpha^2}$.

Искомая функция прогибов определяется выражением

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \frac{q_0 l^4}{8D (1 - 2\alpha^2)} \left[\frac{2}{9} (5 - 4\alpha^2) \left(1 - \bar{x} - \frac{1 - \bar{x}^4}{4} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta - 1}{\beta} \left(1 - \bar{x} - \frac{1 - \bar{x}^{\beta+1}}{\beta + 1} \right) + \frac{2y}{b} \left(\frac{\bar{x}^\beta - 1}{\beta} - \frac{\bar{x}^3 - 1}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Расчет пластин методом сеток. Метод сеток принадлежит к классу дискретных, конечно-разностных методов, изложенных в разд. 1.6.5, и применяется для численного решения двумерных

дифференциальных уравнений. В задачах об изгибе пластин таким уравнением является разрешающее уравнение (3.62), т. е.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (3.106)$$

Решение этого уравнения, т. е. определение прогиба пластины при заданных граничных условиях и нагрузке методом конечных разностей заключается в следующем. Пусть имеем прямоугольную пластину. Нанесем на нее прямоугольную сетку с шагом Δx , Δy (см. рис. 1.9). Тогда, пользуясь формулами (1.83), можно записать по методу конечных разностей все производные, входящие в уравнение (3.106), а следовательно, и само уравнение во всех узловых точках сетки. Пусть, например, точка k (см. рис. 1.9) является одной из узловых точек сетки. Тогда уравнение (3.106), записанное в точке k по методу конечных разностей, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x^4} (6w_k - 4w_a - 4w_b + w_m + w_n) + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2} (4w_k - 2w_a - 2w_b - \\ - 2w_c - 2w_d + w_e + w_g + w_h + w_l) + \\ + \frac{1}{\Delta y^4} (6w_k - 4w_c - 4w_d + w_p + w_q) = \frac{q_k}{D}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Алгебраическое уравнение (3.107) является типичным, если уравнение (3.106) записывается по методу конечных разностей в узловых точках, отстоящих не менее чем на два шага от границы пластины. Если узловая точка является смежной с границей или принадлежит ей (последний случай только для свободного края), то при записи уравнения (3.106) в такой точке по методу конечных разностей появятся так называемые законтурные (фиктивные) узловые точки. Требуемое выражение прогибов в законтурных точках через прогибы в точках собственно пластины (внутренние узловые точки) определяется с использованием конкретных граничных условий.

Пусть, например, линия $m - n$ (см. рис. 1.9) — защемленный край пластины, которая находится выше линии $m - n$.

Введем законтурные точки e , c , l и рассмотрим точки a , k и s . Так как точка k находится на защемленном крае, имеем $w_k = 0$, $(\partial w / \partial y)_k = 0$, или по методу конечных разностей согласно формулам (1.83) $(1/2\Delta y)(w_c - w_d) = 0$. Отсюда

$$w_c = w_d, \quad (3.108)$$

т. е. функция прогиба в законтурной точке выражается через функцию прогиба точки d , принадлежащей пластине.

Пусть теперь линия $m - n$ (см. рис. 1.9) — шарнирно опертый край. Как и в предыдущем случае, для расчета пластины необходимо предварительно выразить значения прогибов в точках типа c через значения прогибов в точках типа d . Так как точка k принадлежит шарнирно опертому краю, можно записать $w_k = 0$,

$(\partial^2 w / \partial y^2)_k = 0$. Отсюда с учетом (1.83) имеем $(1/\Delta y^2)(w_c + w_d - 2w_h) = 0$ или

$$w_c = -w_d. \quad (3.109)$$

Пусть теперь линия $m-n$ (см. рис. 1.9) — свободный край. В этом случае при расчете пластины придется выражать прогибы в двух законтурных точках типа c и q . Для этого нужно использовать условия свободного края. Так как точка k принадлежит свободному краю, то можно записать

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_k = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]_k = 0,$$

откуда с учетом (1.83) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta y^2} (w_c + w_d - 2w_h) + \frac{\mu}{\Delta x^2} (w_a + w_b - 2w_h) &= 0; \\ \frac{1}{2\Delta y^3} (2w_c - 2w_d - w_p + w_q) + \frac{2-\mu}{2\Delta x^2 \Delta y} (2w_c - 2w_d + w_h - w_i - \\ &- w_e + w_g) = 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения следует формула

$$w_c = 2 \left(1 - \mu \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right) w_h - \mu \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} (w_a + w_b) - w_d, \quad (3.110)$$

которая справедлива для точек типа c , т. е. законтурных точек, отстоящих на один шаг от свободного края.

Из второго уравнения следует формула

$$\begin{aligned} w_q &= 2 \left[\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} (2 - \mu) + 1 \right] (w_d - w_c) + \\ &+ \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} (2 - \mu) (w_e - w_g - w_h + w_i) + w_p, \end{aligned} \quad (3.111)$$

которая справедлива для точек типа q , т. е. законтурных точек, отстоящих на два шага от свободного края. В этой формуле прогибы w_e, w_c, w_i и т. п. вычисляются по формуле типа (3.110).

В качестве примера рассмотрим квадратную пластину, шарнирно опертую по всему контуру. Разделим стороны пластины на четыре части и, полагая в дальнейшем $a = b$, $\Delta x = \Delta y = a/4$, $q = q_0 = \text{const}$, в силу симметрии запишем уравнение (3.107) только в точках 1, 2, 5 (рис. 3.15).

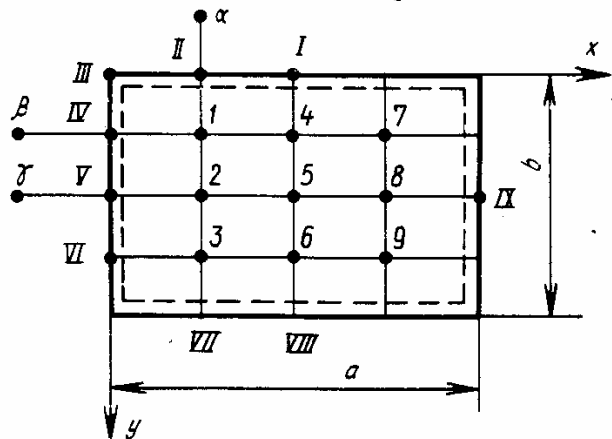


Рис. 3.15. К расчету пластины методом сеток

Точка 1:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^4} (6w_1 - 4w_{IV} - 4w_4 + w_\beta + w_7) + \\ & + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2} [4w_1 - 2(w_{II} + w_2 + w_{IV} + w_4) + w_{III} + w_3 + w_1 + w_V] + \\ & + \frac{1}{\Delta y^4} (6w_1 - 4w_{II} - 4w_2 + w_\alpha + w_3) = \frac{q_1}{D}. \end{aligned}$$

В силу граничных условий и формул типа (3.109) имеем

$$w_1 = w_{II} = w_{III} = w_{IV} = w_V = 0,$$

$$w_\alpha = -w_1, \quad w_\beta = -w_1, \quad w_7 = -w_2.$$

Тогда, положив $a = b$, $\Delta x = \Delta y = a/4$, $q_1 = q_0$, получим

$$20w_1 - 16w_2 + 2w_3 = \frac{q_0 a^4}{256D}.$$

Точка 2.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^4} (6w_2 - 4w_V - 4w_5 + w_V + w_8) + \\ & + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2} [4w_2 - 2(w_V + w_5 + w_1 + w_3) + w_{IV} + w_4 + w_6 + w_{VI}] + \\ & + \frac{1}{\Delta y^4} (6w_2 - 4w_1 - 4w_3 + w_{II} + w_{VII}) = \frac{q_2}{D}. \end{aligned}$$

С учетом граничных условий и равенств $a = b$, $\Delta x = \Delta y = a/4$, $q_2 = q_0$ имеем

$$-16w_1 + 28w_2 - 8w_3 = \frac{q_0 a^4}{256D}.$$

Точка 5:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^4} (6w_5 - 4w_2 - 4w_8 + w_{IX} + w_V) + \\ & + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2} [4w_5 - 2(w_2 + w_8 + w_4 + w_6) + w_1 + w_3 + w_7 + w_3] + \\ & + \frac{1}{\Delta y^4} (6w_5 - 4w_4 - 4w_6 + w_I + w_{VIII}) = \frac{q_5}{D}. \end{aligned}$$

С учетом граничных условий и равенств $a = b$, $\Delta x = \Delta y = a/4$, $q_5 = q_0$ имеем

$$8w_1 - 32w_2 + 20w_3 = \frac{q_0 a^4}{256D}.$$

Таким образом, разрешающая система уравнений имеет вид

$$20w_1 - 16w_2 + 2w_3 = \frac{q_0 a^4}{256D};$$

$$-16w_1 + 28w_2 - 8w_3 = \frac{q_0 a^4}{256D};$$

$$8w_1 - 32w_2 + 20w_3 = \frac{q_0 a^4}{256D}.$$

откуда в результате решения получим

$$w_1 = 0,55 \frac{q_0 a^4}{256D}, \quad w_2 = 0,75 \frac{q_0 a^4}{256D},$$

$$w_3 = 1,02 \frac{q_0 a^4}{256D}.$$

Максимальный прогиб в середине $w_{\max} = w_3 = 0,004 \frac{q_0 a^4}{D}$ отличается от точного решения не более чем на 2,5 %.

3.4. ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

3.4.1. Исходные соотношения

Для исследования круглых пластин, являющихся пространственными элементами конструкций самого разнообразного назначения, целесообразно записать соотношения теории изгиба пластин в полярных координатах r, θ (рис. 3.16). Эти соотношения можно вывести непосредственно или перейти в полученных выше уравнениях от декартовых координат к полярным. Соответствующие формулы (3.41) такого преобразования были получены в разд. 3.2.3. Основное уравнение теории изгиба пластин (3.62) после перехода к полярным координатам примет форму, аналогичную (3.42), т. е.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) = \frac{q}{D}. \quad (3.112)$$

Согласно рис. 3.16 в круглой пластине действуют изгибающие моменты M_r, M_θ , крутящий момент $M_{r\theta}$ и перерезывающие силы Q_r, Q_θ . Для вывода соотношений, связывающих усилия и моменты с прогибом, воспользуемся приемом, изложенным в разд. 3.2.3. Из рис. 3.16 следует, что при $\theta = 0$ $M_r = M_x, M_\theta = M_y, M_{r\theta} = M_{xy}$.

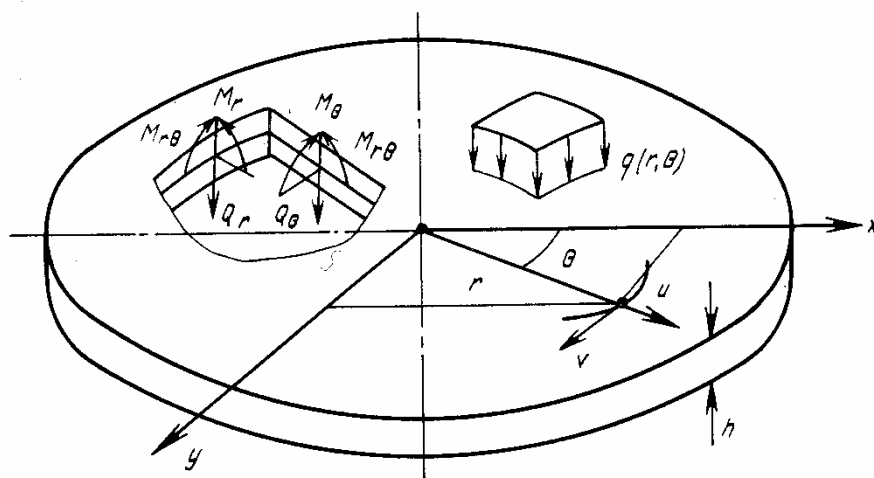


Рис. 3.16. Круглая пластина

$Q_r = Q_x$, $Q_\theta = Q_y$. В соответствии с равенствами (3.58) и формулами (3.41), записанными для $\theta = 0$, получим

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ M_\theta &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$M_{r\theta} = -D(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{\theta=0} = -D(1 - \mu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right).$$

Аналогичным образом преобразуются выражения для перерезывающих сил (3.59):

$$\begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \quad (3.114)$$

Обобщенные перерезывающие силы записываются аналогично (3.68):

$$Q_r^* = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta}, \quad Q_\theta^* = Q_\theta + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r}.$$

Распределение перемещений по толщине круглой пластины можно получить из равенств (3.53), если учесть, что при $\theta = 0$ радиальное перемещение u совпадает с перемещением по оси x , а окружное перемещение v совпадает с перемещением по оси y . С помощью формул (3.41) найдем

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial r}, \quad v = -z \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (3.115)$$

и, наконец, распределение напряжений по толщине пластины определяется соотношениями, полностью аналогичными равенствам (3.63)—(3.65), т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{12M_r}{h^3} z, \quad \sigma_\theta = \frac{12M_\theta}{h^3} z, \quad \tau_{r\theta} = \frac{12M_{r\theta}}{h^3} z, \\ \tau_{rz} &= \frac{6Q_r}{h^3} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right), \quad \tau_{\theta z} = \frac{6Q_\theta}{h^3} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right), \\ \sigma_z &= -q \left(\frac{1}{2} + \frac{3z}{2h} - \frac{2z^3}{h^3} \right). \end{aligned} \quad (3.116)$$

Решение уравнения (3.112) необходимо подчинить граничным условиям на краях пластины. Для жестко защемленного края согласно (3.115) по аналогии с (3.66) получим

$$\begin{aligned} \text{при } r = \text{const} \quad w = \frac{\partial w}{\partial r} &= 0; \\ \text{при } \theta = \text{const} \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (3.117)$$

На шарнирно опертом крае должны обращаться в нуль прогиб и изгибающий момент, т. е. в соответствии с (3.113) по аналогии с (3.67)

$$\text{при } r = \text{const} \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad (3.118)$$

$$\text{при } \theta = \text{const} \quad w = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0.$$

И, наконец, для свободного края аналогично (3.69), будем иметь

$$\text{при } r = \text{const} \quad M_r = Q_r^* = 0, \quad (3.119)$$

$$\text{при } \theta = \text{const} \quad M_\theta = Q_\theta^* = 0.$$

3.4.2. Осесимметричный изгиб круглых пластин

Наиболее распространенным является случай осесимметричного изгиба сплошных и кольцевых круглых пластин нагрузкой $q = q(r)$. Если край пластины $r = \text{const}$ закреплен одинаково во всех точках, прогиб является симметричным относительно центра пластины и не зависит от θ . В случае осесимметричного изгиба $w = w(r)$, $v = 0$, $Q_\theta = 0$, $M_{r\theta} = 0$. Основное уравнение изгиба (3.112) и соотношения упругости (3.113), (3.114) при этом принимают вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q(r)}{D}; \quad (3.120)$$

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \quad (3.121)$$

$$Q_r = Q_r^* = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right).$$

Граничные условия определяются равенствами (3.117)—(3.119) для края $r = \text{const}$.

Уравнение (3.120) допускает решение в общем виде. Заметим, что

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right), \quad (3.122)$$

т. е. уравнение (3.120) можно записать в форме

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}. \quad (3.123)$$

Умножим (3.123) на r , проинтегрируем и разделим результат на r . Получим

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{1}{rD} \int q r dr + \frac{c_1}{r}. \quad (3.124)$$

Сопоставляя (3.124) с последним равенством (3.121) и соотношением (3.122), найдем

$$Q_r = -\frac{1}{r} \int q r dr - \frac{c_1}{r} D. \quad (3.125)$$

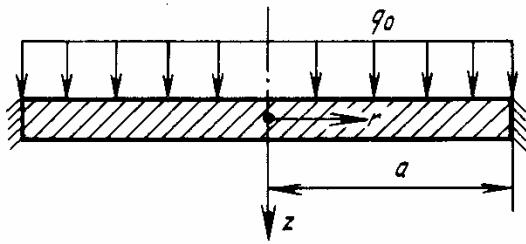


Рис. 3.17. Круглая пластина, за-
щемленная по контуру

Интегрируя (3.124), умножая на r и еще раз интегрируя, после деления результата на r получим

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{rD} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int q r dr +$$

$$+ c_1 \frac{r}{2} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + c_2 \frac{r}{2} + \frac{c_3}{r}. \quad (3.126)$$

И, наконец, интегрируя (3.126), найдем прогиб

$$w = \frac{P(r)}{D} + c_1 \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + c_2 \frac{r^2}{4} + c_3 \ln r + c_4, \quad (3.127)$$

где $P(r) = \int \frac{dr}{r} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int q r dr$.

Постоянные $c_1 - c_4$ находятся из граничных условий.

В качестве примера рассмотрим сплошную пластинку, защемленную по контуру $r = a$ и нагруженную равномерным давлением q_0 (рис. 3.17). Для равномерной нагрузки имеем

$$P(r) = \frac{q_0 r^4}{64}. \quad (3.128)$$

Ввиду того, что перерезывающая сила (3.125) и прогиб (3.127) должны быть конечными при $r = 0$, следует принять $c_1 = c_3 = 0$, т. е. получим

$$w = \frac{q_0 r^4}{64D} + c_2 \frac{r^2}{4} + c_4.$$

Для жесткой заделки должны выполняться условия (3.117), т. е. при $r = a$ $w = dw/dr = 0$. Из этих условий найдем $c_2 = -(q_0 a^2)/(8D)$, $c_4 = (q_0 a^4)/(64D)$ и $w = \frac{q_0}{64D} (a^2 - r^2)^2$.

Максимальный прогиб реализуется в центре пластины

$$w_{\max} = w(r = 0) = \frac{q_0 a^4}{64D}.$$

ГЛАВА 4

РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК

4.1. УРАВНЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

4.1.1. Основные определения

В главе 3 были рассмотрены пластины, т. е. тонкостенные элементы, ограниченные двумя плоскостями. Оболочка является более сложным объектом — она представляет собой тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми h (толщина оболочки) мало по сравнению с другими характерными размерами (рис. 4.1).

Оболочки разнообразных форм являются распространенными элементами летательных аппаратов различного назначения. Расчетная схема оболочки используется для анализа герметических кабин самолетов, корпусов и баков ракет, баллонов давления и других элементов.

По аналогии с пластинами *поверхность, разделяющую толщину оболочки пополам, назовем срединной поверхностью, а отрезок нормали к срединной поверхности np (см. рис. 4.1) — нормальным элементом*. Геометрия оболочки полностью определяется формой ее срединной поверхности и толщиной.

Отнесем оболочку к системе координат α, β, γ (см. рис. 4.1), причем ось γ является прямолинейной и направлена по нормали к срединной поверхности, а оси α и β являются криволинейными и лежат в срединной поверхности. Проведем через ось γ семейство плоскостей, нормальных к срединной поверхности. Тогда в результате пересечения этих плоскостей со срединной поверхностью оболочки в точке O образуется семейство кривых, среди которых существуют две такие, у которых радиусы кривизны являются максимальным и минимальным в данной точке. Касательные к этим кривым называются главными направлениями поверхности и, как доказывается в теории поверхностей, являются ортогональными. *Кривые, касающиеся в каждой точке главных направлений, называются линиями главных кривизн* и в теории оболочек обычно используются в качестве координатных линий α и β (см. рис. 4.1). Введенная таким образом система координат α, β, γ является ортогональной.

Длины элементов координатных линий α и β запишем в виде $ds_\alpha = A d\alpha$, $ds_\beta = B d\beta$, где A и B — некоторые масштабные коэффициенты, определяющие, скольким единицам длины соответствуют единичные приращения переменных α и β . Тогда ква-

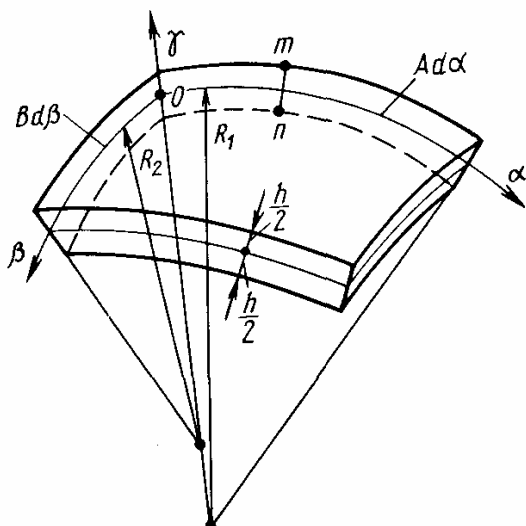


Рис. 4.1. Элемент оболочки

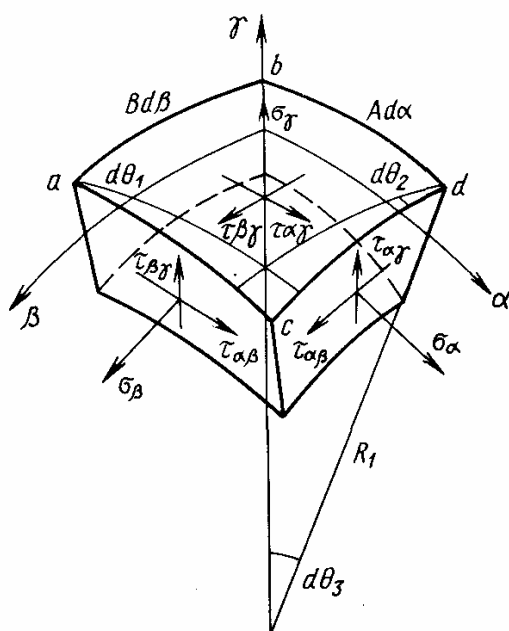


Рис. 4.2. Напряжения, действующие по граням элемента

дуг длины дуги произвольного элемента, лежащего в срединной поверхности, равен

$$ds^2 = ds_\alpha^2 + ds_\beta^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2. \quad (4.1)$$

Соотношение (4.1) называется первой квадратичной формой поверхности (существует и вторая квадратичная форма, которая связана с кривизнами поверхности и в дальнейшем не потребуется), а параметры A и B — коэффициентами первой квадратичной формы. Для плоскости, отнесенной к декартовым координатам x, y , получим $ds^2 = dx^2 + dy^2$, т. е. $A = B = 1$, для плоскости, отнесенной к полярным координатам r, θ (см., например, рис. 3.16), $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$, т. е. $A = 1, B = r$. Геометрия срединной поверхности оболочки полностью определяется коэффициентами A, B и главными радиусами кривизны R_1, R_2 , которые в общем случае являются функциями переменных α и β .

Для элемента длины дуги произвольной линии, заключенной между поверхностями $\gamma = \pm h/2$, можно записать следующую приближенную формулу:

$$ds^2 \simeq A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 + d\gamma^2. \quad (4.2)$$

Приближенность соотношения (4.2) вытекает из того, что, например, для наружной и внутренней поверхностей оболочки ($\gamma = \pm h/2$) $d\gamma = 0$ и (4.2) совпадает с (4.1), т. е. длина линий на поверхностях оболочки отождествляется с длиной их проекций на срединную поверхность. Из рис. 4.1 следует, что такая замена тем правомочнее, чем меньше h по сравнению с R_1 и R_2 . Точная формула типа (4.2) имеет вид

$$ds^2 = A^2 \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)^2 d\alpha^2 + B^2 \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)^2 d\beta^2 + d\gamma^2. \quad (4.3)$$

4.1.2. Исходные соотношения в криволинейных координатах

В главе 3 уравнения теории пластин выводились из уравнений теории упругости в декартовых координатах. Для аналогичного вывода уравнений теории оболочек необходимы соответствующие уравнения в криволинейных координатах. При этом толщина оболочки считается малой, т. е. вводятся упрощения, позволяющие заменить (4.3) приближенной формулой (4.2). Уравнения равновесия элемента (рис. 4.2), аналогичные уравнениям (3.1)—(3.3), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial (B\sigma_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (A\tau_{\alpha\beta})}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (AB\tau_{\alpha\gamma}) - \sigma_\beta \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \tau_{\alpha\gamma} \frac{AB}{R_1} &= 0, \\ \frac{\partial (A\sigma_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial (B\tau_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (AB\tau_{\beta\gamma}) - \sigma_\alpha \frac{\partial A}{\partial \beta} + \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \tau_{\beta\gamma} \frac{AB}{R_2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} (AB\sigma_\gamma) + \frac{\partial (B\tau_{\alpha\gamma})}{\partial \alpha} + \frac{\partial (A\tau_{\beta\gamma})}{\partial \beta} - \sigma_\alpha \frac{AB}{R_1} - \sigma_\beta \frac{AB}{R_2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Рассмотрим, например, первое уравнение (4.4). Его более сложная по сравнению с уравнением (3.1) в декартовых координатах структура связана с тем, что в криволинейных координатах A и B являются функциями α , β и срединная поверхность искривлена. В результате, если $bd = A d\alpha$, $ab = B d\beta$, то $ac = bd + (\partial A / \partial \beta) d\beta$, $cd = ab + (\partial B / \partial \alpha) d\alpha$, и за счет углов $d\theta_1$, $d\theta_2$ и $d\theta_3$ (см. рис. 4.2) величины напряжений σ_β , $\tau_{\alpha\beta}$ и $\tau_{\alpha\gamma}$ дают проекции на направление α .

Более сложными, чем соотношения (3.4), (3.5) в теории пластин, являются и геометрические соотношения

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_\beta}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{u_\gamma}{R_1}, \quad \epsilon_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{u_\alpha}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{u_\gamma}{R_2}, \quad (4.5)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{B} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{u_\beta}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad (4.6)$$

$$\epsilon_\gamma = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}, \quad \gamma_{\alpha\gamma} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{1}{A} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{R_1}, \quad \gamma_{\beta\gamma} = \frac{\partial u_\beta}{\partial \gamma} + \frac{1}{B} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \beta} - \frac{u_\beta}{R_2}.$$

Здесь u_α , u_β , u_γ — перемещения по направлениям α , β , γ . Что касается физических соотношений, то они с точностью до обозначений совпадают с (3.6), (3.7)

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{1}{E} (\sigma_\alpha - \mu \sigma_\beta - \mu \sigma_\gamma), \quad \epsilon_\beta = \frac{1}{E} (\sigma_\beta - \mu \sigma_\alpha - \mu \sigma_\gamma), \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{\alpha\beta}; \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\epsilon_\gamma = \frac{1}{E} (\sigma_\gamma - \mu \sigma_\alpha - \mu \sigma_\beta), \quad \gamma_{\alpha\gamma} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{\alpha\gamma}, \quad \gamma_{\beta\gamma} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{\beta\gamma}. \quad (4.8)$$

4.1.3. Основные соотношения общей теории оболочек

Теория оболочек, так же как и теория пластин, базируется на гипотезах Кирхгофа для нормального элемента mn (см. рис. 4.1), обсуждавшихся в разд. 3.1.1. Согласно этим гипотезам следует принять $\epsilon_\gamma = \gamma_{\alpha\gamma} = \gamma_{\beta\gamma} = 0$ и из (4.6) при $\gamma \ll \ll R_{1,2}$ получим $u_\gamma = w(\alpha, \beta)$ и линейное распределение перемещений u_α, u_β по толщине оболочки, аналогичное (3.9)

$$u_\alpha = u + \gamma \vartheta_\alpha, \quad u_\beta = v + \gamma \vartheta_\beta, \quad (4.9)$$

где $u(\alpha, \beta)$; $v(\alpha, \beta)$; $w(\alpha, \beta)$ — перемещения срединной поверхности $\gamma = 0$ в направлениях α, β и прогиб оболочки, а

$$\vartheta_\alpha = \frac{u}{R_1} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \vartheta_\beta = \frac{v}{R_2} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (4.10)$$

углы поворота нормали к срединной поверхности.

Подставляя перемещения (4.9) в геометрические соотношения (4.5), получим выражения для деформаций

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_\alpha^0 + \gamma \kappa_\alpha, \quad \epsilon_\beta = \epsilon_\beta^0 + \gamma \kappa_\beta, \quad \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^0 + \gamma \kappa_{\alpha\beta}, \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha^0 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_1}, \quad \epsilon_\beta^0 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_2}, \\ \gamma_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (4.12)$$

— деформации удлинения и сдвига срединной поверхности;

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta_\beta, \quad \kappa_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \vartheta_\alpha, \quad (4.13)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\vartheta_\alpha}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\vartheta_\beta}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}$$

— изменения кривизн и кручение срединной поверхности.

В соответствии с гипотезами Кирхгофа в законе Гука (4.7) следует пренебречь напряжениями σ_γ по сравнению с σ_α и σ_β . Выражая из (4.7) напряжения и подставляя в полученные равенства деформации (4.11), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \bar{E} [\epsilon_\alpha^0 + \mu \epsilon_\beta^0 + \gamma (\kappa_\alpha + \mu \kappa_\beta)], \\ \sigma_\beta &= \bar{E} [\epsilon_\beta^0 + \mu \epsilon_\alpha^0 + \gamma (\kappa_\beta + \mu \kappa_\alpha)], \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \bar{E} (1 - \mu) (\gamma_{\alpha\beta}^0 + \gamma \kappa_{\alpha\beta}), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $\bar{E} = E/(1 - \mu^2)$.

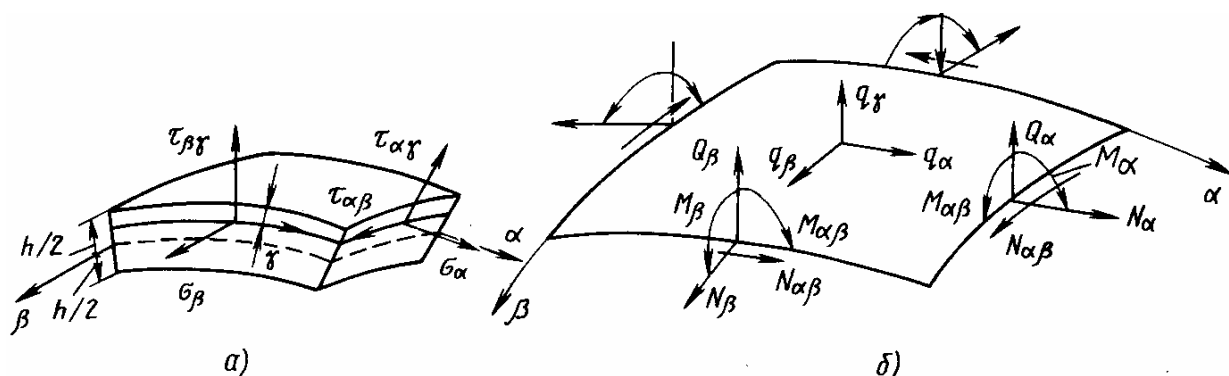


Рис. 4.3. Напряжения (а), результирующие усилия и моменты (б), действующие по граням элемента оболочки

Так же, как и в теории пластин, напряжения линейно изменяются по толщине оболочки и аналогично (3.12), (3.13) могут быть введены усилия и моменты (рис. 4.3):

$$\begin{aligned}
 N_\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha d\gamma, & N_\beta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta d\gamma, & N_{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} d\gamma, \\
 M_\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \gamma d\gamma, & M_\beta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \gamma d\gamma, & M_{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} \gamma d\gamma, \\
 Q_\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\gamma} d\gamma, & Q_\beta &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\gamma} d\gamma.
 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Таким образом, в качестве основного элемента оболочки можно рассматривать элемент срединной поверхности, нагруженный усилиями и моментами, показанными на рис. 4.3, б. Подставляя напряжения (4.14) в соотношения (4.15), получим

$$\begin{aligned}
 N_\alpha &= \bar{E}h(\epsilon_\alpha^0 + \mu\epsilon_\beta^0), & N_\beta &= \bar{E}h(\epsilon_\beta^0 + \mu\epsilon_\alpha^0), \\
 N_{\alpha\beta} &= \frac{h}{2}\bar{E}(1-\mu)\gamma_{\alpha\beta}^0,
 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$M_\alpha = D(\kappa_\alpha + \mu\kappa_\beta), \quad M_\beta = D(\kappa_\beta + \mu\kappa_\alpha), \quad M_{\alpha\beta} = \frac{D}{2}(1-\mu)\kappa_{\alpha\beta},$$

где $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ — изгибная или цилиндрическая жесткость оболочки. Усилия и моменты должны быть связаны уравнениями равновесия, которые могут быть получены непосредственно из рассмотрения равновесия элемента, показанного на рис. 4.3, б или, как это было показано в гл. 3, в результате интегрирования по толщине уравнений (4.4) с учетом соотношений

(4.15). Используя последнюю схему вывода уравнений, которая была описана в разд. 3.1.2, окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial (BN_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (AN_{\alpha\beta})}{\partial \beta} - N_\beta \frac{\partial B}{\partial \alpha} + N_{\alpha\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{AB}{R_1} Q_\alpha + ABq_\alpha &= 0, \\ \frac{\partial (AN_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial (BN_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - N_\alpha \frac{\partial A}{\partial \beta} + N_{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{AB}{R_2} Q_\beta + ABq_\beta &= 0, \\ \frac{\partial (BQ_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (AQ_\beta)}{\partial \beta} - N_\alpha \frac{AB}{R_1} - N_\beta \frac{AB}{R_2} + ABq_\gamma &= 0; \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (BM_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (AM_{\alpha\beta})}{\partial \beta} - M_\beta \frac{\partial B}{\partial \alpha} + M_{\alpha\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} - ABQ_\alpha &= 0, \\ \frac{\partial (AM_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial (BM_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - M_\alpha \frac{\partial A}{\partial \beta} + M_{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - ABQ_\beta &= 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где q_α , q_β , q_γ — поверхностные нагрузки, отнесенные к срединной поверхности оболочки (см. рис. 4.3, б). При этом шестое уравнение (уравнение моментов относительно нормали к срединной поверхности оболочки) удовлетворяется тождественно в силу парности касательных напряжений.

Соотношения (4.10), (4.12), (4.13), (4.16)—(4.18) представляют собой исходную систему 19-ти уравнений общей теории оболочек, которые включают девятнадцать неизвестных функций переменных α , β : восемь усилий и моментов — N_α , N_β , $N_{\alpha\beta}$, Q_α , Q_β , M_α , M_β , $M_{\alpha\beta}$, восемь компонентов деформаций — ε_α^0 , ε_β^0 , $\gamma_{\alpha\beta}^0$, ϑ_α , ϑ_β , κ_α , κ_β , $\kappa_{\alpha\beta}$ и три перемещения — u , v , w . При $A = B = 1$ и $\alpha = x$, $\beta = y$ из полученных уравнений следуют уравнения теории пластин, выведенные в гл. 3.

Согласно общей схеме решения задачи в перемещениях, изложенной в разд. 1.1.3, система уравнений теории оболочек может быть сведена к трем уравнениям относительно перемещений u , v , w . Для этого необходимо из уравнений (4.18) выразить перерезывающие силы

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial (BM_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (AM_{\alpha\beta})}{\partial \beta} - M_\beta \frac{\partial B}{\partial \alpha} + M_{\alpha\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right], \\ Q_\beta &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial (AM_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial (BM_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - M_\alpha \frac{\partial A}{\partial \beta} + M_{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

и подставить их в уравнения (4.17). Выражая далее в полученных таким образом трех уравнениях усилия и моменты через перемещения с помощью равенств (4.16), (4.12) и (4.10), (4.13), можно записать следующую систему:

$$\begin{aligned} L_{1u}u + L_{1v}v + L_{1w}w &= q_\alpha, \\ L_{2u}u + L_{2v}v + L_{2w}w &= q_\beta, \\ L_{3u}u + L_{3v}v + L_{3w}w &= q_\gamma. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Дифференциальные операторы L в общем случае имеют весьма громоздкую форму и здесь не приводятся.

Если в результате решения системы (4.20) найдены перемещения $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$, то далее по формулам (4.10) — (4.13), (4.19) можно определить компоненты деформации и с помощью соотношений (4.16) — усилия и моменты. Напряжения в оболочке определяются равенствами, аналогичными (3.19) и (3.26) в теории пластин, т. е.

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{h} + \frac{12M_\alpha}{h^3} \gamma, \quad \sigma_\beta = \frac{N_\beta}{h} + \frac{12M_\beta}{h^3} \gamma, \quad (4.21)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{h} + \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^3} \gamma;$$

$$\tau_{\alpha\gamma} = \frac{6Q_\alpha}{h^3} \left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4} \right), \quad \tau_{\beta\gamma} = \frac{6Q_\beta}{h^3} \left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4} \right). \quad (4.22)$$

Формулы (4.22) соответствуют наиболее распространенному случаю, когда на поверхностях оболочки отсутствуют касательные составляющие внешней нагрузки.

В теории оболочек так же, как и в теории изгиба пластин, имеет место нарушение закона Гука для напряжений $\tau_{\alpha\gamma}$, $\tau_{\beta\gamma}$ и σ_γ , обсуждавшееся выше в разд. 3.1.2.

4.1.4. Граничные условия

Разрешающие уравнения общей теории оболочек (4.20) имеют в совокупности восьмой порядок по переменным α и β . В каждой точке края оболочки необходимо записать четыре граничных условия, которые являются непосредственным обобщением граничных условий (3.66), (3.67) и (3.70). Так, на крае оболочки $\alpha = \text{const}$ в общем случае должны быть заданы четыре граничных условия:

$$u \text{ или } N_\alpha, v \text{ или } N_{\alpha\beta}, w \text{ или } Q_\alpha^*, \vartheta_\alpha \text{ или } M_\alpha.$$

В более общем случае (упругое закрепление) может быть задана линейная комбинация двух функций

$$k_1 N_\alpha = c_1 u, \quad k_2 N_{\alpha\beta} = c_2 v,$$

$$k_3 Q_\alpha^* = c_3 w, \quad k_4 u_\alpha = c_4 \vartheta_\alpha.$$

На защемленном крае к условиям отсутствия прогиба и угла поворота (3.66) необходимо добавить условия отсутствия тангенциальных перемещений срединной поверхности, т. е.

$$\text{при } \alpha = \text{const } u = v = w = \vartheta_\alpha = 0, \quad (4.23)$$

$$\text{при } \beta = \text{const } u = v = w = \vartheta_\beta = 0.$$

Углы поворота нормали к срединной поверхности ϑ_α и ϑ_β определяются равенствами (4.10).

Распространенным является так называемое скользящее шарнирное опирание (свободное опирание) края. Граничные условия при этом имеют вид

$$\text{при } \alpha = \text{const } w = v = 0, M_\alpha = N_\alpha = 0, \quad (4.24)$$

$$\text{при } \beta = \text{const } w = u = 0, M_\beta = N_\beta = 0.$$

Согласно (4.24), например, край $\alpha = \text{const}$ может свободно перемещаться в направлении α ($N_\alpha = 0$) и закреплен от перемещений в направлении β ($v = 0$). Если отсутствуют все тангенциальные перемещения, то условия $N_\alpha = 0$ и $N_\beta = 0$ следует заменить соответственно на $u = 0$ и $v = 0$. Если же край свободен в отношении тангенциальных перемещений, условия $v = 0$ и $u = 0$ в (4.24) заменяются на $N_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$.

К условиям на свободном крае пластины (3.70) необходимо добавить условия отсутствия тангенциальных усилий, т. е.

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha = \text{const } N_\alpha = N_{\alpha\beta} = M_\alpha = Q_\alpha^* = 0, \\ \text{при } \beta = \text{const } N_\beta = N_{\alpha\beta} = M_\beta = Q_\beta^* = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Здесь Q_α^* и Q_β^* — обобщенные перерезывающие силы, которые определяются равенствами, аналогичными (3.68), т. е.

$$Q_\alpha^* = Q_\alpha + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta}, \quad Q_\beta^* = Q_\beta + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha}, \quad (4.26)$$

где Q_α и Q_β выражаются через моменты соотношениями (4.19).

4.1.5. Полная энергия оболочки

Потенциальная энергия тонкой оболочки, для которой допустима замена (4.3) на (4.2), имеет вид, аналогичный (3.71)

$$U = \frac{1}{2} \iint \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_\alpha \varepsilon_\alpha + \sigma_\beta \varepsilon_\beta + \tau_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}) AB d\alpha d\beta d\gamma.$$

Подставляя деформации с помощью равенств (4.11) и учитывая выражения для усилий и моментов (4.16), получим

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \iint (N_\alpha \varepsilon_\alpha^0 + N_\beta \varepsilon_\beta^0 + N_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^0 + M_\alpha \kappa_\alpha + M_\beta \kappa_\beta + \\ + M_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}) AB d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Вариация работы внешних сил имеет вид

$$\delta A = \iint (q_\alpha \delta u + q_\beta \delta v + q_\gamma \delta w) AB d\alpha d\beta. \quad (4.28)$$

Полная энергия оболочки определяется общей формулой (1.24), т. е. $\mathcal{E} = U - A$; согласно принципу Лагранжа (см. разд. 1.3) $\delta \mathcal{E} = \delta U - \delta A = 0$.

4.2. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

4.2.1. Вывод разрешающего уравнения

Выше в общих чертах без подробного вывода были получены уравнения общей теории оболочек. В настоящем разделе вывод основных уравнений будет проиллюстрирован на достаточно простом и тем не менее важном для приложений примере — на задаче об осесимметричном изгибе цилиндрической оболочки. Полученные результаты позволят также сделать некоторые важные выводы, которые будут использованы в дальнейшем.

Пусть тонкая круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины h нагружается нормальной нагрузкой (давлением $q_\gamma = p(\alpha)$) и касательной нагрузкой $q_\alpha = q(\alpha)$ (рис. 4.4). Если действующие на торцах оболочки силы также не зависят от окружной координаты β , то как нагружение, так и напряженно-деформированное состояние оболочки будут осесимметричными. При этом $v \equiv 0$, а перемещения u , w и все усилия и моменты будут зависеть только от осевой координаты α .

Согласно рис. 4.4, $ds^2 = d\alpha^2 + R^2 d\beta^2$, т. е. в соответствии с формулой (4.1) для цилиндрической оболочки $A = 1$, $B = R$. Кроме того, очевидно, что $R_1 \rightarrow \infty$ и $R_2 = R$. Геометрические соотношения типа (4.5), (4.6) в цилиндрических координатах для осесимметричной задачи имеют вид

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_\beta = \frac{u_\gamma}{R}; \quad (4.29)$$

$$\varepsilon_\gamma = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}, \quad \gamma_{\alpha\gamma} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial \alpha}. \quad (4.30)$$

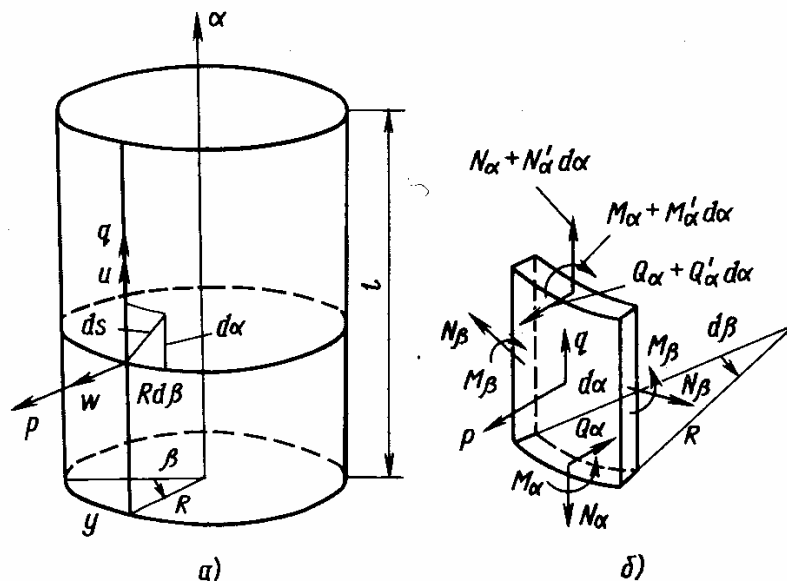


Рис. 4.4. Цилиндрическая оболочка (а) и действующие в ней усилия и моменты (б) при осесимметричном нагружении

На основании гипотез Кирхгофа ($\varepsilon_\gamma = \gamma_{\alpha\gamma} = 0$) из (4.30) получим частную форму равенств (4.9), (4.10) для рассматриваемого случая

$$u_\gamma = w(\alpha), \quad u_\alpha = u(\alpha) + \gamma \vartheta_\alpha, \quad \vartheta_\alpha = -w', \quad (4.31)$$

где w и u — функция прогиба и осевое перемещение точек срединной поверхности, а $(\quad)'$ обозначает производную по α . Подставляя (4.31) в (4.29), аналогично (4.11) имеем

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^0 + \gamma \kappa_\alpha, \quad \varepsilon_\beta = \varepsilon_\beta^0, \quad (4.32)$$

где

$$\varepsilon_\alpha^0 = u', \quad \varepsilon_\beta^0 = \frac{w}{R}, \quad \kappa_\alpha = -w''. \quad (4.33)$$

Закон Гука (4.14) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \bar{E}(\varepsilon_\alpha^0 + \mu \varepsilon_\beta^0 + \gamma \kappa_\alpha), \\ \sigma_\beta &= \bar{E}(\varepsilon_\beta^0 + \mu \varepsilon_\alpha^0 + \gamma \mu \kappa_\alpha). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Подставляя ε_α^0 , ε_β^0 , κ_α согласно (4.34) и (4.35) и находя усилия и моменты (4.15), запишем равенства типа (4.16):

$$\begin{aligned} N_\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha d\gamma = \bar{E}h \left(u' + \mu \frac{w}{R} \right), \\ N_\beta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta d\gamma = \bar{E}h \left(\frac{w}{R} + \mu u' \right), \\ M_\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \gamma d\gamma = -Dw'', \quad M_\beta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \gamma d\gamma = -\mu Dw'', \end{aligned} \quad (4.35)$$

где, как и ранее, $\bar{E} = E/(1 - \mu^2)$, $D = \bar{E}h^3/12$.

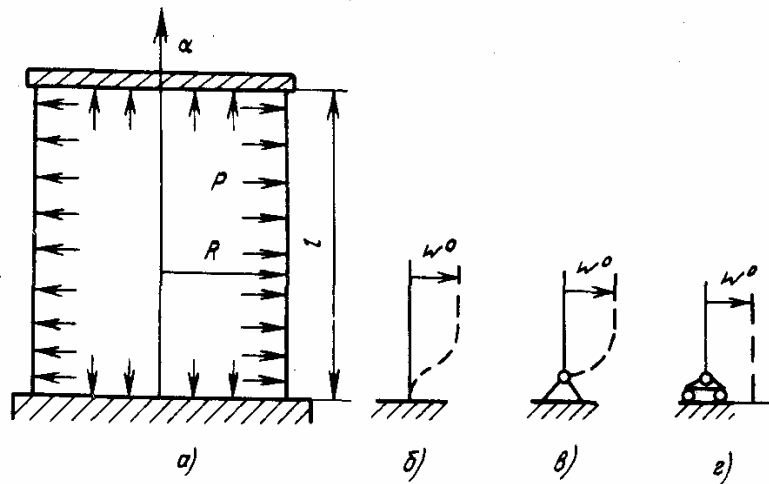
Выведем теперь уравнения равновесия типа (4.17). Выделим из оболочки элемент, показанный на рис. 4.4, б и приравняем нулю сумму всех сил, действующих в осевом направлении α , сумму проекций сил на нормаль к поверхности и сумму моментов относительно элемента параллели (остальные уравнения равновесия удовлетворяются тождественно). Получим

$$N'_\alpha + q = 0, \quad Q'_\alpha - \frac{N_\beta}{R} + p = 0, \quad M'_\alpha - Q_\alpha = 0. \quad (4.36)$$

Соотношения (4.35) и (4.36) представляют собой систему основных уравнений для осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки. Семь полученных уравнений включают столько же неизвестных — два перемещения u , w и пять усилий и моментов N_α , N_β , Q_α , M_α , M_β . Как отмечалось в разд. 4.1.3, эту систему можно свести к уравнениям, включающим в качестве неизвестных перемещения. Действительно, из третьего уравнения (4.36) и равенств (4.35) имеем

$$Q_\alpha = M'_\alpha = -Dw''. \quad (4.37)$$

Рис. 4.5. Цилиндрическая оболочка, нагруженная равномерным внутренним давлением (a) и характер закрепления ее края: защемленный край (b), шарнирно опертый край ($в$) и край, свободно перемещающийся в радиальном направлении ($г$)



Подставляя теперь в первые два уравнения (4.36) N_α , M_α , Q_α , выраженные через перемещения, окончательно получим

$$u'' + \frac{\mu}{R} w' = -\frac{q}{Eh}, \quad \frac{1}{R} \left(\mu u' + \frac{w}{R} \right) + \frac{h^2}{12} w^{IV} = \frac{p}{Eh}. \quad (4.38)$$

Во многих случаях задача является статически определимой относительно усилий N_α — они могут быть получены путем интегрирования первого уравнения (4.36), причем произвольная постоянная определяется по известному значению $N_\alpha = N$ на каком-либо торце оболочки. В этих случаях вместо двух уравнений (4.38) можно получить одно уравнение относительно прогиба w .

Пусть на оболочку действует только внутреннее давление p (рис. 4.5). При $q = 0$ из первого уравнения (4.36) получим $N_\alpha = N$ (если $p = \text{const}$, то $N = 0,5pR$). Исключая из формул (4.35) u' , найдем

$$N_\beta = \frac{Eh}{R} w + \mu N. \quad (4.39)$$

В этом случае второе уравнение (4.36) после подстановки выражений для Q_α (4.37) и N_β (4.39) примет вид

$$Dw^{IV} + \frac{Eh}{R^2} w = p - \mu \frac{N}{R}$$

или

$$w^{IV} + 4k^4 w = \frac{1}{D} \left(p - \mu \frac{N}{R} \right), \quad (4.40)$$

где $k^4 = \frac{Eh}{4R^2D} = \frac{3(1-\mu^2)}{R^2h^2}$.

4.2.2. Краевой эффект и безмоментное состояние

Общее решение уравнения (4.40) запишем в виде

$$w = e^{-k\alpha} (C_1 \cos k\alpha + C_2 \sin k\alpha) + e^{k\alpha} (C_3 \cos k\alpha + C_4 \sin k\alpha) + w^0, \quad (4.41)$$

где $w^0(\alpha)$ — частное решение неоднородного уравнения (4.40), зависящее от вида правой части. Четыре произвольных постоян-

ных C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из четырех граничных условий при $\alpha = 0$ и $\alpha = l$ (см. рис. 4.5).

Если оболочка рассматривается как полубесконечная ($l \rightarrow \infty$), то из условия ограниченности решения при $\alpha \rightarrow \infty$ следует положить $C_2 = C_3 = 0$. Тогда

$$w = e^{-k\alpha} (C_1 \cos k\alpha + C_2 \sin k\alpha) + w^0. \quad (4.42)$$

Здесь константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий на краю $\alpha = 0$; они характеризуют быстро затухающее решение типа краевого эффекта, описывающее местный изгиб оболочки вблизи края $\alpha = 0$. Так как $e^{-\pi} \approx 0,043$, то влиянием краевого эффекта практически можно пренебречь при $\alpha \geq \pi/k$ или, если положить $\mu = 0,3$, при $\alpha \geq 2,5 \sqrt{Rh}$. Например при $R/h = 100$ и $R/h = 400$ ширина зоны краевого эффекта равна $0,25R$ и $0,125R$ соответственно.

Если длина оболочки превышает ширину зоны краевого эффекта ($l > 2,5 \sqrt{Rh}$), то такую оболочку можно считать длинной и изгиб вблизи каждого из двух краев $\alpha = 0$ и $\alpha = l$ можно рассматривать независимо друг от друга, используя решение (4.42) для полубесконечной оболочки (при этом в каждом случае координата α отсчитывается от рассматриваемого края в направлении другого края).

Если правая часть уравнения (4.42) представлена в виде полинома по степеням α с показателями, не превышающими трех, то частное решение имеет вид

$$w^0 = \frac{R^2}{Eh} \left(\rho - \mu \frac{N}{R} \right). \quad (4.43)$$

В более общем случае, если правая часть уравнения (4.40) меняется достаточно плавно, выражение (4.43) может быть использовано как приближенное частное решение.

Решение (4.43) может быть также получено как решение уравнения (4.40) при $D = 0$. Из равенств (4.35), (4.37) и соотношений (4.21), определяющих распределение напряжений по толщине оболочки, следует, что при $D = 0$ $M_\alpha = M_\beta = Q_\alpha = 0$ и $\sigma_\alpha = N_\alpha/h$, $\sigma_\beta = N_\beta/h$, т. е. напряжения равномерно распределены по толщине. Такое напряженное состояние оболочки называется безмоментным и соответственно решение (4.43) называется безмоментным решением.

Таким образом, можно считать, что общее решение задачи при осесимметричной деформации тонкой достаточно длинной цилиндрической оболочки складывается из безмоментного решения w^0 и решения краевого эффекта.

В частности, для оболочки, показанной на рис. 4.5, а, при $\rho = \cos nt$ ($N = 0,5\rho R$) и $l > 2,5 \sqrt{Rh}$ согласно (4.42), (4.43) получим

$$w = w^k + w^0, \quad (4.44)$$

где $w^k = e^{-k\alpha} (C_1 \cos k\alpha + C_2 \sin k\alpha)$

— составляющая прогиба, соответствующая краевому эффекту,

$$a \quad w^0 = \frac{\rho R^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2} \right)$$

— составляющая прогиба, соответствующая безмоментному состоянию.

Краевой эффект возникает в том случае, когда на краю оболочка нагружается моментным образом (поперечными силами, моментами), соединяется с другой оболочкой шпангоутом и т. п. или закрепляется в отношении поперечного перемещения w и угла поворота ϑ_α . Угол поворота нормали, изгибающие моменты и перерезывающая сила согласно формулам (4.35), (4.37) и (4.44) имеют вид:

$$\begin{aligned} \vartheta_\alpha &= -w' = ke^{-k\alpha} [C_1 (\cos k\alpha + \sin k\alpha) - C_2 (\cos k\alpha - \sin k\alpha)], \\ M_\alpha &= -Dw'' = -2Dk^2 e^{-k\alpha} (C_1 \sin k\alpha - C_2 \cos k\alpha), \\ M_\beta &= \mu M_\alpha, \\ Q_\alpha &= -Dw''' = -2Dk^3 e^{-k\alpha} [C_1 (\cos k\alpha - \sin k\alpha) + \\ &\quad + C_2 (\cos k\alpha + \sin k\alpha)]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Определим постоянные C_1 , C_2 для различных типов граничных условий.

Для защемленного края (см. рис. 4.5, б) на основании условий (4.23) при $\alpha = 0$ следует принять $w = \vartheta_\alpha = 0$. При этом согласно (4.44), (4.45) $C_1 = C_2 = -w^0$ и

$$w = w^0 [1 - e^{-k\alpha} (\cos k\alpha - \sin k\alpha)]. \quad (4.46)$$

Если на торце оболочка закреплена шарнирно, то в соответствии с (4.24) при $\alpha = 0$ $w = M_\alpha = 0$. Тогда $C_1 = -w^0$, $C_2 = 0$ и

$$w = w^0 (1 - e^{-k\alpha} \cos k\alpha). \quad (4.47)$$

Из равенств (4.46), (4.47) следует, что при увеличении α прогиб приближается к безмоментной составляющей, т. е. на достаточном удалении от края $w = w^0$ (см. рис. 4.5, б, в).

Если оболочка не закреплена в отношении радиального перемещения w и угла поворота ϑ_α (см. рис. 4.5, а), то при $\alpha = 0$ $M_\alpha = Q_\alpha = 0$ и из равенств (4.44), (4.45) следует, что $C_1 = C_2 = 0$ и $w = w^0$, т. е. при таком закреплении краевой эффект отсутствует и прогиб полностью определяется безмоментным решением.

Таким образом, достаточно длинная цилиндрическая оболочка почти всюду (за исключением быть может узких участков вблизи краев) находится в безмоментном состоянии, а в окрестности краев при соответствующих граничных условиях реализуется локальное изгибное состояние — краевой эффект. Эта особенность напряжен-

ного состояния характерна не только для цилиндрической, но и для более широкого класса оболочек и позволяет в ряде случаев значительно упростить расчет.

4.3. БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

4.3.1. Геометрия оболочки вращения

Срединная поверхность оболочки вращения получается в результате вращения плоской кривой относительно оси, лежащей в плоскости этой кривой (рис. 4.6). Такая кривая называется меридианом. Меридианы являются линиями главных кривизн и их принимают в качестве координатных линий. Параллели — окружности, образованные пересечением срединной поверхности оболочки с плоскостями, перпендикулярными ее оси, — представляют семейство других координатных линий. В качестве криволинейных координат, отсчитываемых вдоль меридианов и параллелей, возьмем углы α и β : α — угол, который нормаль образует с осью оболочки, β — угол, отсчитываемый вдоль параллели от некоторой заданной меридиональной плоскости (см. рис. 4.6).

Первый главный радиус кривизны поверхности вращения R_1 равен радиусу кривизны меридиана (рис. 4.7). Второй главный радиус R_2 равен отрезку нормали к поверхности до оси вращения, т. е. согласно рис. 4.7

$$R_2 = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad (4.48)$$

где r — радиус параллели. Радиусы R_1 и R_2 не являются независимыми. Действительно, из рис. 4.7 следует, что, с одной стороны, $ds_\alpha = R_1 d\alpha$, а с другой — $ds_\alpha = dr / \cos \alpha$, т. е. $R_1 \cos \alpha d\alpha = dr$. Подставляя сюда dr согласно (4.48), получим

$$R_1 \cos \alpha = \frac{dr}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} (R_2 \sin \alpha). \quad (4.49)$$

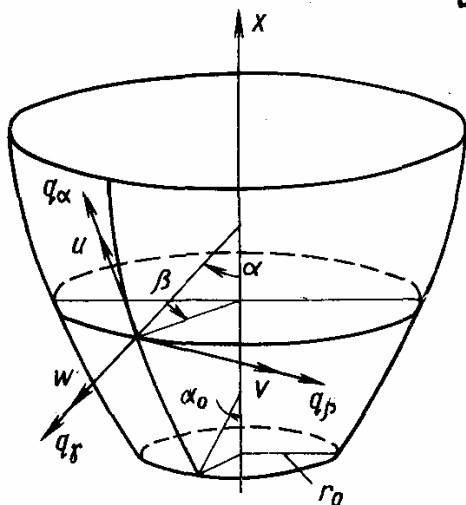


Рис. 4.6. Оболочка вращения

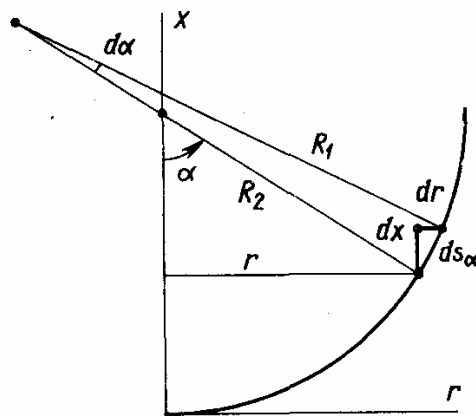


Рис. 4.7. Геометрия меридиана оболочки вращения

Формула типа (4.1) для линейного элемента поверхности вращения имеет вид $ds^2 = ds_\alpha^2 + ds_\beta^2 = R_1^2 d\alpha^2 + r^2 d\beta^2$, т. е.

$$A = R_1, B = r. \quad (4.50)$$

Осевая координата x связана с углом α следующим соотношением, вытекающим из рис. 4.7:

$$dx = ds_\alpha \sin \alpha = R_1 \sin \alpha d\alpha. \quad (4.51)$$

4.3.2. Основные соотношения для безмоментной оболочки вращения

Уравнения безмоментной теории могут быть получены из общих уравнений, приведенных в разд. 4.1, если принять, что изгибная жесткость оболочки $D = 0$. Однако, учитывая практическую важность безмоментной теории, ниже эти уравнения выводятся традиционным путем в результате непосредственного анализа равновесия и геометрии деформирования оболочки.

Итак, рассмотрим тонкую оболочку вращения (см. рис. 4.6), считая, что она находится в безмоментном напряженном состоянии. Выделим бесконечно малый элемент оболочки (рис. 4.8), находящийся под действием безмоментных усилий N_α , N_β , $N_{\alpha\beta}$ и заданной поверхностной нагрузки с компонентами q_α , q_β , q_γ , направленными вдоль координатных линий α , β и нормали γ .

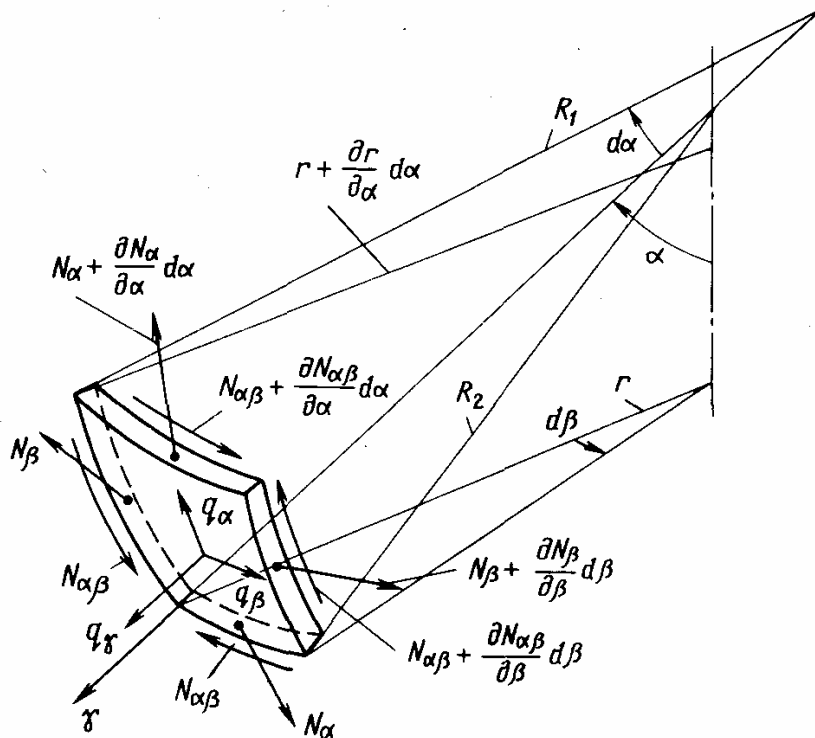


Рис. 4.8. Усилия, действующие в безмоментной оболочке вращения

Составим уравнения равновесия, т. е. приравняем нулю суммы проекций сил, действующих на элемент. В направлении касательной к меридиану получим

$$-N_{\alpha}r d\beta + \left(N_{\alpha} + \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \alpha} d\alpha\right) \left(r + \frac{dr}{d\alpha} d\alpha\right) d\beta - N_{\alpha\beta}R_1 d\alpha + \\ + \left(N_{\alpha\beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} d\beta\right) R_1 d\alpha - N_{\beta}R_1 d\alpha \cos \alpha d\beta + q_{\alpha}R_1r d\alpha d\beta = 0;$$

в направлении касательной к параллели

$$-N_{\alpha\beta}r d\beta + \left(N_{\alpha\beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} d\alpha\right) \left(r + \frac{dr}{d\alpha} d\alpha\right) d\beta - N_{\beta}R_1 d\alpha + \\ + \left(N_{\beta} + \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \beta} d\beta\right) R_1 d\alpha + N_{\alpha\beta}R_1 d\alpha \cos \alpha d\beta + q_{\beta}R_1r d\alpha d\beta = 0.$$

В обоих этих уравнениях появление предпоследних членов обусловлено наличием малого угла $\cos \alpha d\beta$ между боковыми гранями элементов.

Сумма проекций действующих сил на нормаль к поверхности

$$-N_{\alpha}rd\beta d\alpha - N_{\beta}R_1d\alpha \sin \alpha d\beta + q_{\gamma}R_1 r d\alpha d\beta = 0,$$

где учитывается угол между усилиями N_{α} на нижней и верхней гранях, равный $\pi - d\alpha$, и угол между усилиями N_{β} на боковых гранях, равный $\pi - \sin \alpha d\beta$.

В результате уравнения равновесия оболочки вращения при безмоментном напряженном состоянии записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (rN_{\alpha}) + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} R_1 - N_{\beta}R_1 \cos \alpha + q_{\alpha}R_1r = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (rN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \beta} R_1 + N_{\alpha\beta}R_1 \cos \alpha + q_{\beta}R_1r = 0, \quad (4.52)$$

$$\frac{N_{\alpha}}{R_1} + \frac{N_{\beta}}{R_2} = q_{\gamma}.$$

Эти уравнения могут быть получены из общих уравнений (4.17), если принять $Q_{\alpha} = Q_{\beta} = 0$ и учесть формулы (4.49), (4.50). Из трех уравнений (4.52) могут быть найдены три неизвестных усилия $N_{\alpha}(\alpha, \beta)$, $N_{\beta}(\alpha, \beta)$, $N_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)$ с точностью до произвольных постоянных или функций, которые должны быть определены из граничных условий.

Примечательно, что безмоментное напряженное состояние оболочки является локально статически определимым. Однако в целом для оболочки задача может оказаться статически неопределимой, если для определения произвольных функций интегрирования или произвольных констант потребуется использовать геометрические граничные условия.

Выведем теперь геометрические соотношения, связывающие относительные деформации с перемещениями.

Рассмотрим элементы меридиана и параллели (рис. 4.9, а). До деформации их длины равны $ds_{\alpha} = R_1 d\alpha$ и $ds_{\beta} = r d\beta$. После

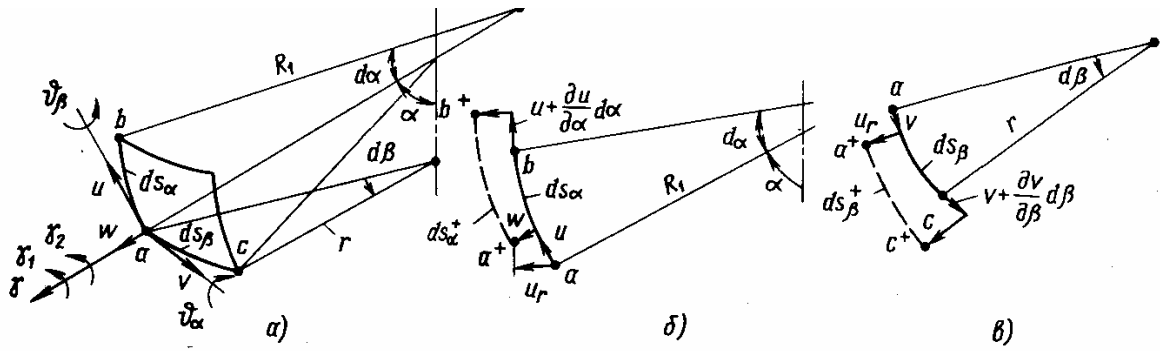


Рис. 4.9. К выводу геометрических соотношений безмоментной теории оболочек вращения

деформации, которая характеризуется перемещениями u , v , w , длины этих элементов будут (см. рис. 4.9, б, в):

$$ds_{\alpha}^{+} = (R_1 + w) d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha,$$

$$ds_{\beta}^{+} = (r + u_r) d\beta + \frac{\partial v}{\partial \beta} d\beta,$$

где $u_r = u \cos \alpha + w \sin \alpha$ (4.53) — радиальное перемещение точек оболочки (см. рис. 4.9, б).

Углы поворота относительно нормали элементов меридиана и параллели (см. рис. 4.9, а) соответственно имеют вид

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial s_{\alpha}}, \quad \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial s_{\beta}} - \frac{v}{r} \cos \alpha.$$

В выражении для γ_2 первое слагаемое представляет собой угол поворота элемента параллели за счет разности перемещений его концов; второе слагаемое обусловлено поворотом этого элемента относительно оси оболочки на угол v/r .

Деформации вводятся следующим образом:

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{ds_{\alpha}^{+} - ds_{\alpha}}{ds_{\alpha}}, \quad \epsilon_{\beta} = \frac{ds_{\beta}^{+} - ds_{\beta}}{ds_{\beta}}, \quad \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_2 - \gamma_1$$

и определяются равенствами

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + w \right); \quad \epsilon_{\beta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + u \cos \alpha + w \sin \alpha \right), \quad (4.54)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - v \cos \alpha \right) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha}.$$

Углы поворота нормали к срединной поверхности имеют вид (см. рис. 4.9, а)

$$\vartheta_{\alpha} = \frac{1}{R_1} \left(u - \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right), \quad \vartheta_{\beta} = \frac{v}{R_2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \beta}. \quad (4.55)$$

Формулы (4.54), (4.55) могут быть получены и из общих соотношений (4.12), (4.10) с учетом равенств (4.48)—(4.50). Индекс «0» в (4.12) для безмоментной оболочки, естественно, опускается.

Перемещение точек оболочек в осевом направлении определяется соотношением

$$u_x = u \sin \alpha - w \cos \alpha. \quad (4.56)$$

Усилия связаны с деформациями законом Гука (4.16), т. е.

$$N_\alpha = \bar{E}h(\epsilon_\alpha + \mu\epsilon_\beta), \quad N_\beta = \bar{E}h(\epsilon_\beta + \mu\epsilon_\alpha), \quad N_{\alpha\beta} = \frac{1-\mu}{2}\bar{E}h\gamma_{\alpha\beta}. \quad (4.57)$$

Поскольку моменты в рассматриваемой оболочке отсутствуют, напряжения связаны с усилиями следующим образом:

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{h}, \quad \sigma_\beta = \frac{N_\beta}{h}, \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{h}. \quad (4.58)$$

Соотношения (4.52), (4.54), (4.57) являются основными уравнениями безмоментной теории оболочек вращения. Девять уравнений включают столько же неизвестных — три усилия N_α , N_β , $N_{\alpha\beta}$, три деформации ϵ_α , ϵ_β , $\gamma_{\alpha\beta}$ и три перемещения u , v , w . Уравнения равновесия (4.52) могут быть проинтегрированы независимо от остальных, по найденным из них усилиям с помощью равенств (4.57) могут быть определены деформации и в результате интегрирования геометрических соотношений (4.54) — перемещения. На практике вместо перемещений u и w часто используются радиальное и осевое перемещения u_r и u_x , которые выражаются через u и v формулами (4.53), (4.56).

Далее в разд. 4.4 и 4.5 полученные соотношения будут использованы при анализе напряженно-деформированного состояния оболочек вращения для наиболее распространенных случаев нагружения.

4.4. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

4.4.1. Осесимметричная деформация

Одним из наиболее распространенных случаев нагружения оболочек вращения является осесимметричное нагружение, при котором поверхностные и краевые силы не зависят от окружной координаты β и $q_\beta = 0$. При этом в оболочке вращения отсутствует окружное перемещение v , а u и w так же, как и ненулевые силовые факторы N_α , N_β , Q_α , M_α , M_β , зависят только от переменной α . В условиях осесимметричного нагружения работают баки, баллоны давления, резервуары и т. д. Метод расчета таких оболочек строится по аналогии с решением для цилиндрической оболочки, полученным в разд. 4.2, т. е. напряженное состояние разделяется на безмоментное и изгибный краевой эффект, локализующийся вблизи краев. Такое разделение для оболочки вращения произвольной формы является приближенным, однако

для удлиненных в осевом направлении оболочек оно позволяет построить решение, обладающее приемлемой для практических расчетов точностью.

4.4.2. Безмоментное напряженное состояние

Основная система уравнений (4.52), (4.54), (4.57) безмоментной теории оболочек для случая осесимметричной деформации принимает следующий вид:

$$(rN_\alpha)' - N_\beta R_1 \cos \alpha + qR_1 r = 0, \quad (4.59)$$

$$\frac{N_\alpha}{R_1} + \frac{N_\beta}{R_2} = p, \quad (4.60)$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{R_1} (u' + w), \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{r} (u \cos \alpha + w \sin \alpha), \quad (4.61)$$

$$N_\alpha = \bar{E}h (\varepsilon_\alpha + \mu \varepsilon_\beta), \quad N_\beta = \bar{E}h (\varepsilon_\beta + \mu \varepsilon_\alpha). \quad (4.62)$$

Радиальное и осевое перемещения определяются по-прежнему равенствами (4.53), (4.56)

$$u_r = u \cos \alpha + w \sin \alpha, \quad u_x = u \sin \alpha - w \cos \alpha, \quad (4.63)$$

а угол поворота нормали к срединной поверхности — первой формулой (4.55), т. е.

$$\vartheta_\alpha = \frac{1}{R_1} (u - w'). \quad (4.64)$$

В уравнениях (4.59), (4.60) принято $q_\alpha = q$, $q_\gamma = p$; ()' обозначает производную по α . Уравнение (4.60) часто называется уравнением Лапласа.

Найдем усилия N_α и N_β . Из (4.60) имеем

$$N_\beta = pR_2 - N_\alpha \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.65)$$

Подставим N_β в (4.59). Непосредственной проверкой с помощью равенства (4.48) можно убедиться в том, что уравнение (4.59) после подстановки (4.65) может быть записано в следующей форме:

$$(rN_\alpha \sin \alpha)' = (p \cos \alpha - q \sin \alpha) r R_1.$$

Интегрируя, получим

$$N_\alpha = \frac{1}{r \sin \alpha} \left[\int_{\alpha_0}^{\alpha} (p \cos \alpha - q \sin \alpha) r R_1 d\alpha - \frac{X_0}{2\pi} \right]. \quad (4.66)$$

Постоянная интегрирования найдена из статического условия при $\alpha = \alpha_0$ (рис. 4.10), согласно которому $2\pi r_0 N_\alpha^0 \sin \alpha_0 = -X_0$, где X_0 — осевая сила, приложенная в сечении $\alpha = \alpha_0$. Отметим, что соотношение (4.66) может быть получено непосредственно из рассмотрения равновесия отсеченной части оболочки, показанной

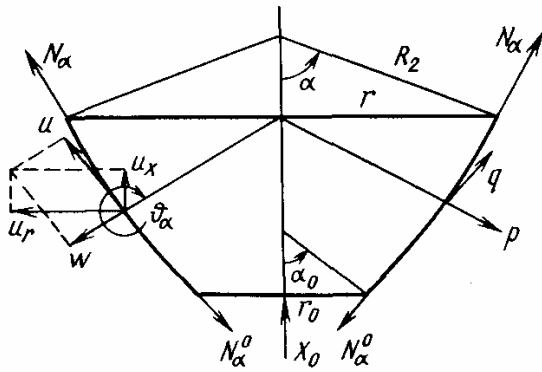


Рис. 4.10. Усилия и нагрузки, действующие на отсеченную часть оболочки вращения

на рис. 4.10. Действительно, проектируя действующие силы на ось оболочки, имеем

$$2\pi r N_{\alpha} \sin \alpha = 2\pi \int_{\alpha_0}^{\alpha} (p \cos \alpha - q \sin \alpha) r R_1 d\alpha - X_0.$$

Отсюда сразу следует (4.66).

Таким образом, усилия в осесимметрично нагруженной безмоментной оболочке вращения определяются равенствами (4.65), (4.66).

Наиболее распространенным случаем осесимметричного нагружения является воздействие равномерного внутреннего давления. Полагая в (4.66) $q = 0$, $p = \text{const}$ и учитывая, что согласно (4.49) $R_1 \cos \alpha d\alpha = dr$, получим

$$N_{\alpha} = \frac{1}{r \sin \alpha} \left(p \frac{r^2 - r_0^2}{2} - \frac{X_0}{2\pi} \right). \quad (4.67)$$

Для замкнутой в вершине оболочки $r_0 = 0$. При отсутствии осевой силы ($X_0 = 0$) из равенств (4.65), (4.67) с учетом соотношения $r = R_2 \sin \alpha$ окончательно будем иметь

$$N_{\alpha} = \frac{p R_2}{2}, \quad N_{\beta} = \frac{p R_2}{2} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right). \quad (4.68)$$

Формулы (4.68) определяют усилия в замкнутых баллонах давления. В частности, для цилиндрической части баллона $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R$ и $N_{\alpha} = pR/2$, $N_{\beta} = pR$; для сферического баллона $R_1 = R_2 = R$ и $N_{\alpha} = N_{\beta} = pR/2$.

Деформации безмоментной оболочки вращения определяются из закона Гука (4.62)

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{1}{Eh} (N_{\alpha} - \mu N_{\beta}), \quad \epsilon_{\beta} = \frac{1}{Eh} (N_{\beta} - \mu N_{\alpha}). \quad (4.69)$$

Для определения перемещений воспользуемся геометрическими соотношениями (4.61). Из второго соотношения с учетом (4.48) имеем

$$w = R_2 \epsilon_{\beta} - u \operatorname{ctg} \alpha. \quad (4.70)$$

Подставляя (4.70) в первое равенство (4.61), получим

$$u' - u \operatorname{ctg} \alpha = f(\alpha) R_1,$$

где $f(\alpha) = \epsilon_{\alpha} - \frac{R_2}{R_1} \epsilon_{\beta}$.

Решение этого уравнения имеет вид

$$u = [F(\alpha) + C_0] \sin \alpha, \quad (4.71)$$

где $F(\alpha) = \int \frac{f(\alpha)}{\sin \alpha} R_1 d\alpha$,

C_0 — произвольная постоянная. Из (4.70) и (4.71) получим

$$w = -\cos \alpha [F(\alpha) + C_0] + \varepsilon_\beta R_2. \quad (4.72)$$

Радиальное и осевое перемещения, а также угол поворота (см. рис. 4.10) согласно (4.63), (4.64) и (4.71), (4.72) имеют вид

$$\begin{aligned} u_r &= \varepsilon_\beta r, \\ u_x &= C_0 + F(\alpha) - u_r \operatorname{ctg} \alpha, \\ \vartheta_\alpha &= \frac{1}{R_1} [f(\alpha) \operatorname{ctg} \alpha - (\varepsilon_\beta R_2)']. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Для оболочки постоянной толщины выражение для угла поворота преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \vartheta_\alpha &= -\frac{R_2}{Eh} \left\{ \frac{R_2}{R_1} \frac{dp}{d\alpha} + 2p \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \operatorname{ctg} \alpha + \left(\frac{R_2}{R_1} + \mu \right) q - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - 2\frac{R_2}{R_1^2} \right) + \frac{R_2}{R_1} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{R_1} \right) \right] N_\alpha \right\}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Постоянная C_0 определяется из геометрического граничного условия на закрепленном крае оболочки, которое в соответствии с безмоментной теорией может быть задано только для тангенциального перемещения u .

Если безмоментная оболочка вращения в виде пояса закреплена по тангенциальным смещениям на обоих торцах (рис. 4.11, а), то в этом случае продольная реакция на одном из торцов, например на нижнем X_0 , является статически неопределимой и определяется совместно с константой C_0 из заданных геометрических граничных условий $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$. Если сила X_0 задана (см. рис. 4.11, б), постоянная C_0 определяется из условия $u_x|_{x=l} = 0$. В случае, когда оболочка является незакрепленной, например баллон под действием внутреннего давления, константа C_0 является неопределенной — она представляет перемещение оболочки вдоль оси как недеформируемого твердого тела.

Безмоментное решение является точным только в определенных случаях. Обычно же оно используется как приближенное решение на большей части поверхности оболочки вращения при осесимметричном нагружении, если радиус $r(\alpha)$ и нагрузки $q(\alpha)$, $p(\alpha)$ являются достаточно плавными функциями.

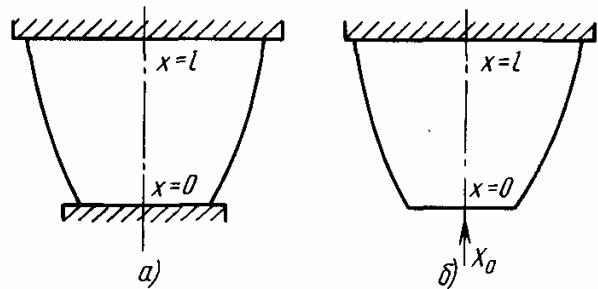


Рис. 4.11. Схемы закрепления безмоментной оболочки вращения

4.4.3. Краевой эффект

На краях оболочки, где она сопрягается с другими оболочками вращения, круговыми шпангоутами или нагружается осесимметричными нагрузками, граничные условия на практике редко соответствуют безмоментным условиям. Поэтому вблизи таких краев оболочка обычно подвергается изгибу.

Дифференциальные уравнения изгиба произвольной оболочки вращения при осесимметричном нагружении имеют переменные коэффициенты и их точные решения могут быть получены только в некоторых частных случаях в специальных функциях (например, для сферы и конуса).

В случае тонких непологих оболочек при плавном изменении радиуса R_1 и нагрузок q, p изгиб в основном происходит вблизи края и по мере удаления от края напряженное состояние приближается к безмоментному. Поэтому безмоментное решение приближенно используется в качестве частного решения неоднородной задач, и по аналогии с w^0 в решении (4.44) для цилиндрической оболочки. При этом однородное решение, описывающее изгиб оболочки, имеет характер затухающего краевого эффекта типа w^* в (4.44). В работах [10, 11] дано строгое обоснование упрощений уравнений краевого эффекта для произвольной оболочки вращения и построены соответствующие приближенные решения.

Для простоты и краткости изложения краевой эффект для тонкой непологой оболочки вращения рассмотрим на основе упрощающих допущений, которые примем, опираясь на аналогию с краевым эффектом для рассмотренной ранее цилиндрической оболочки.

Общее решение вблизи края оболочки представляется в виде суммы безмоментного решения (обозначаем его верхним индексом «0») и однородного решения в виде краевого эффекта (с индексом «к»):

$$\begin{aligned} u &= u^0 + u^*, \quad w = w^0 + w^*, \\ N_\alpha &= N_\alpha^0 + N_\alpha^*, \quad N_\beta = N_\beta^0 + N_\beta^*, \\ M_\alpha &= M_\alpha^*, \quad M_\beta = M_\beta^*, \quad Q_\alpha = Q_\alpha^*. \end{aligned} \quad (4.75)$$

В изгибных силовых факторах $M_\alpha, M_\beta, Q_\alpha$, естественно, фигурируют только составляющие краевого эффекта.

При описании краевого эффекта в качестве координаты будем рассматривать расстояние s , отсчитываемое от края оболочки вдоль меридиана (рис. 4.12). Вместо угла α введем угол ψ , отсчитываемый от края, при этом $ds = R_1 d\psi$. Введение координаты s и угла ψ вместо s_α и α позволяет одинаковым образом описать краевой эффект как на нижнем, так и на верхнем краях, причем на нижнем крае $ds = ds_\alpha, \psi = \alpha$, а на верхнем крае $ds = -ds_\alpha, \psi = \pi - \alpha$.

Оболочку в районе рассматриваемого края будем считать непологой, если $|\operatorname{ctg} \psi| < 3$.

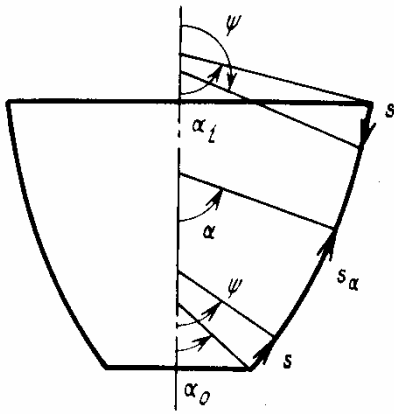


Рис. 4.12. Координаты оболочки вращения

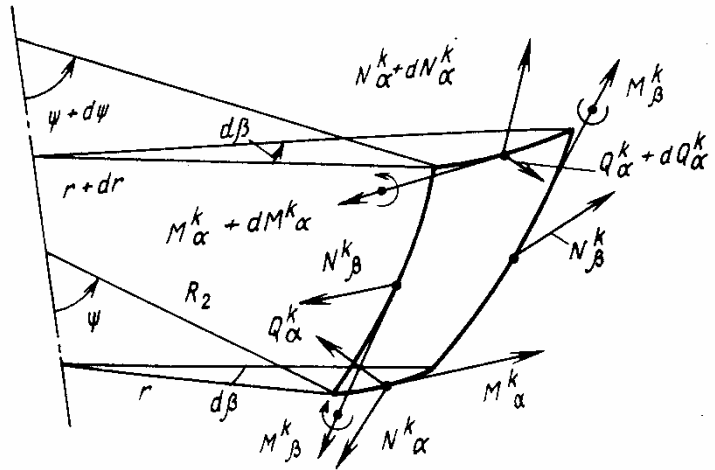


Рис. 4.13. Напряженное состояние элемента оболочки в зоне краевого эффекта

У тонкой непологой оболочки зона краевого эффекта является достаточно узкой, и поэтому изменением радиусов кривизны оболочки и угла ψ в пределах этой зоны можно пренебрегать, принимая их значения равными значениям на крае.

В случае оболочки типа пояса, имеющей два края (рис. 4.11), краевые эффекты на этих краях будем рассматривать независимо как затухающие, считая, что ширина зоны каждого из них меньше расстояния между краями вдоль меридиана.

Получим уравнения равновесия. Составим уравнения проекций сил в направлении нормали и моментов относительно касательной к верхней грани элемента, выделенного из оболочки в зоне краевого эффекта (рис. 4.13):

$$\left(Q_{\alpha}^k + \frac{dQ_{\alpha}^k}{ds} ds \right) \left(r + \frac{dr}{ds} ds \right) d\beta - Q_{\alpha}^k r d\beta - N_{\alpha}^k r d\beta d\psi - N_{\beta}^k ds \sin \psi d\beta = 0, \quad (4.76)$$

$$\left(M_{\alpha}^k + \frac{dM_{\alpha}^k}{ds} ds \right) \left(r + \frac{dr}{ds} ds \right) d\beta - M_{\alpha}^k r d\beta - M_{\beta}^k ds \cos \psi d\beta - Q_{\alpha}^k r d\beta ds = 0.$$

Здесь внешние нагрузки q , p и безмоментные усилия N_{α}^0 , N_{β}^0 не учитываются, так как они находятся в равновесии. Разделив уравнения (4.76) на $r d\beta ds$ и учитывая, что $r = R_2 \sin \psi$, $dr/ds = \cos \psi$, $ds = R_1 d\psi$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{\alpha}^k}{ds} + Q_{\alpha}^k \frac{\operatorname{ctg} \psi}{R_2} - \frac{N_{\alpha}^k}{R_1} - \frac{N_{\beta}^k}{R_2} &= 0, \\ \frac{dM_{\alpha}^k}{ds} + (M_{\alpha}^k - M_{\beta}^k) \frac{\operatorname{ctg} \psi}{R_2} - Q_{\alpha}^k &= 0. \end{aligned} \quad (4.77)$$

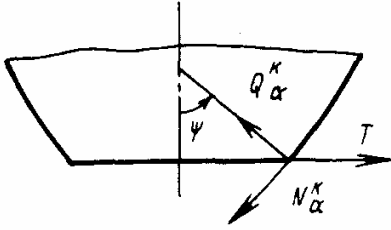


Рис. 4.14. Усилия, действующие на крае оболочки

Из уравнения равновесия отсеченной части оболочки (рис. 4.14), учитывая, что внешняя нагрузка уравновешивается усилиями N_α^0 , найдем

$$Q_\alpha^k \sin \psi - N_\alpha^k \sin \psi = 0,$$

откуда

$$N_\alpha^k = \operatorname{ctg} \psi Q_\alpha^k. \quad (4.78)$$

В случае непологий оболочки ($|\operatorname{ctg} \psi| < 3$) из (4.78) следует, что N_α^k и Q_α^k являются величинами одного порядка. Поперечная сила Q_α^k на основании второго уравнения (4.77) выражается через изгибающие моменты, в результате чего она зависит от изгибной жесткости оболочки D , пропорциональной h^3 . Напомним, что толщина h считается малой. Поэтому для тонких оболочек усилия N_α^k , так же как и Q_α^k , можно считать пренебрежимо малым по сравнению с N_β^k , которое пропорционально h . Кроме того, при изгибе края достаточно гладкой, тонкой, непологий оболочки можно предположить, что тангенциальное перемещение u^k является пренебрежимо малым по сравнению с нормальным перемещением w^k . На основании этого примем следующие допущения:

$$N_\alpha^k \ll N_\beta^k, \quad w^k \gg u^k \approx 0. \quad (4.79)$$

Определим угол поворота в плоскости меридиана и изменения главных кривизн при изгибной деформации оболочки:

$$\begin{aligned} \vartheta_\alpha^k &= - \frac{dw^k}{ds}, \\ \kappa_\alpha^k &= \frac{1}{R_1^+} - \frac{1}{R_1} = \frac{d(\psi + \vartheta^k)}{ds} - \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\vartheta_\alpha^k}{ds} = - \frac{d^2 w^k}{ds^2}, \\ \kappa_\beta^k &= \frac{1}{R_2^+} - \frac{1}{R_2} = \frac{\sin(\psi + \vartheta^k)}{r + u_r} - \frac{\sin \psi}{r} \approx \frac{\sin \psi + \vartheta^k \cos \psi}{r} - \\ &\quad - \frac{\sin \psi}{r} = \vartheta^k \frac{\operatorname{ctg} \psi}{R_2} = - \frac{dw^k}{ds} \frac{\operatorname{ctg} \psi}{R_2}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

где R_1^+ , R_2^+ — радиусы кривизн деформированной срединной поверхности оболочки с учетом поворота нормали на малый угол ϑ_α^k . Изменением этих радиусов за счет деформаций удлинения срединной поверхности пренебрегаем. Соотношения (4.80) могут быть получены из общих геометрических соотношений теории оболочек (4.10), (4.13), если принять в них $Ad\alpha = ds$, $u \ll w$, и учесть равенства (4.48), (4.49).

Введем весьма существенное для теории краевого эффекта допущение, вытекающее из быстрой изменяемости решения по переменной s . Из выражения (4.44) следует, что для цилиндрической оболочки составляющая w^k пропорциональна $e^{-k\alpha}$, т. е. при диф-

ференцировании по α она умножается на $-k$. Если k велико, то можно утверждать, что функции, описывающие краевой эффект, при дифференцировании существенно возрастают по абсолютной величине, т. е. в уравнениях краевого эффекта можно пренебречь низшими производными по сравнению с высшими. Из этого, в частности, следует, что согласно (4.80) $\kappa_\alpha^k \gg \kappa_\beta^k$ и общие соотношения между моментами и изменениями кривизн (4.16) можно приближенно записать с учетом (4.80) в виде

$$M_\alpha^k = D\kappa_\alpha^k = -D \frac{d^2 w^k}{ds^2}, \quad M_\beta^k = D\mu\kappa_\alpha^k = \mu M_\alpha^k. \quad (4.81)$$

Выведем теперь уравнение краевого эффекта. В соответствии с принятыми выше допущениями ($N_\alpha^k \ll N_\beta^k$) в первом уравнении (4.77) пренебрегаем членами, содержащими Q_α^k и N_α^k ; при этом считаем, что у непологой оболочки $\text{ctg } \psi$ не является большой величиной, а радиус R_1 не является малым по сравнению с радиусом R_2 . Во втором уравнении (4.77) пренебрегаем вторым членом, содержащим M_α^k и $M_\beta^k = \mu M_\alpha^k$ по сравнению с первым членом, представляющим производную от быстроизменяющейся функции. Тогда с учетом (4.81) из второго уравнения (4.77) будем иметь

$$Q_\alpha^k = \frac{dM_\alpha^k}{ds} = -D \frac{d^3 w^k}{ds^3}, \quad (4.82)$$

а из первого —

$$D \frac{d^4 w^k}{ds^4} + \frac{N_\beta^k}{R_2} = 0. \quad (4.83)$$

Запишем выражения для окружной деформации ϵ_β^k . Из равенств (4.61) и (4.69) с учетом принятых допущений и формулы (4.48) имеем

$$\epsilon_\beta^k = \frac{1}{R_2} (u^k \text{ctg } \alpha + w^k) \approx \frac{w^k}{R_2},$$

$$\epsilon_\beta^k = \frac{1}{Eh} (N_\beta^k - \mu N_\alpha^k) \approx \frac{N_\beta^k}{Eh}.$$

Таким образом

$$N_\beta^k \approx \frac{Eh}{R_2} w^k. \quad (4.84)$$

Подставляя (4.84) в (4.83), получим уравнение краевого эффекта

$$D \frac{d^4 w^k}{ds^4} + \frac{Eh}{R_2^2} w^k = 0$$

или

$$\frac{d^4 w^k}{ds^4} + 4k^4 w^k = 0, \quad (4.85)$$

$$\text{где } k^4 = \frac{Eh}{4DR_2^2} = \frac{3(1-\mu^2)}{R_2^2 h^2}.$$

Здесь радиус R_2 в пределах зоны краевого эффекта можно считать постоянным и равным его значению на рассматриваемом крае.

Отметим, что уравнение (4.85) аналогично однородному уравнению, соответствующему уравнению (4.40) для цилиндрической оболочки. Затухающая часть решения (4.85) аналогичная (4.42), т. е.

$$w^k = e^{-ks} (C_1 \cos ks + C_2 \sin ks). \quad (4.86)$$

По формулам (4.78), (4.80)—(4.82), (4.84) и (4.86) получим

$$\begin{aligned} \vartheta^k &= -\frac{dw^k}{ds} = -ke^{-ks} [C_1 (\cos ks + \sin ks) - C_2 (\cos ks - \sin ks)], \\ M_\alpha^k &= -D \frac{d^2 w^k}{ds^2} = -2Dk^2 e^{-ks} (C_1 \sin ks - C_2 \cos ks), \\ Q_\alpha^k &= -D \frac{d^3 w^k}{ds^3} = -2Dk^3 e^{-ks} [C_1 (\cos ks - \sin ks) + \\ &\quad + C_2 (\cos ks + \sin ks)], \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$M_\beta^k = \mu M_\alpha^k, \quad N_\alpha^k = \operatorname{ctg} \psi Q_\alpha^k, \quad N_\beta^k = \frac{Eh}{R_2} w^k.$$

На крае оболочки усилия N_α^k и Q_α^k приводятся к радиальной силе T^k (см. рис. 4.14)

$$T^k = -(N_\alpha^k \cos \psi + Q_\alpha^k \sin \psi) = -\frac{Q_\alpha^k}{\sin \psi}. \quad (4.88)$$

Последнее равенство получено с учетом (4.78). Радиальное перемещение за счет краевого изгиба определяется приближенной формулой, следующей из первого равенства (4.63)

$$u_r^k \approx w^k \sin \psi. \quad (4.89)$$

Положительные направления кинематических и силовых факторов на краях оболочки показаны на рис. 4.15.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 , входящие в равенства (4.86), (4.87), удобно выразить через радиальное перемещение и угол поворота на крае оболочки $s=0$. Полагая в (4.86) ... (4.89) $s=0$, $\psi = \bar{\psi}$, получим

$$C_1 = \frac{\bar{u}_r^k}{\sin \bar{\psi}}, \quad C_2 = \frac{\bar{u}_r^k}{\sin \bar{\psi}} - \frac{\bar{\vartheta}^k}{k}$$

и далее

$$\bar{T}^k = c_{11} \bar{u}_r^k - c_{12} \bar{\vartheta}_\alpha^k, \quad (4.90)$$

$$\bar{M}_\alpha^k = c_{21} \bar{u}_r^k - c_{22} \bar{\vartheta}_\alpha^k,$$

$$\begin{aligned} \text{где } c_{11} &= \frac{4Dk^3}{\sin^2 \bar{\psi}}, \quad c_{12} = c_{21} = \\ &= \frac{2Dk^2}{\sin \bar{\psi}}, \quad c_{22} = 2Dk. \end{aligned} \quad (4.91)$$

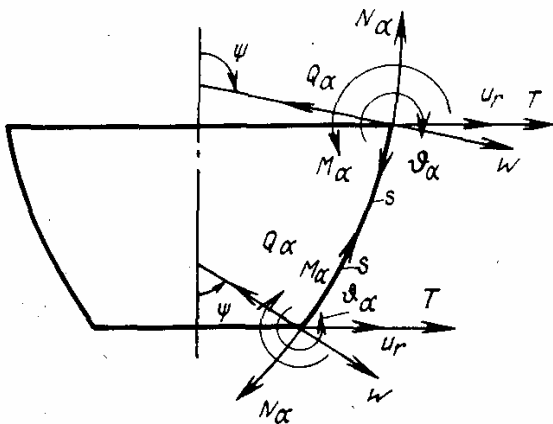


Рис. 4.15. Положительные направления краевых кинематических и силовых факторов

Здесь все величины с чертой относятся к краю оболочки. Коэффициенты c_{ij} ($i, j = 1, 2$) называются коэффициентами жесткости края оболочки. Для безмоментной оболочки $D = 0$, $c_{ij} = 0$, $\bar{T}^k = \bar{M}_\alpha^k = 0$.

Погрешность формул (4.87), полученных на основе приближенного решения для краевого эффекта, зависит от величины $\sqrt{R_2/h} \operatorname{tg} \psi$ и не превышает 5 %, если на рассматриваемом крае $\sqrt{R_2/h} \operatorname{tg} \psi > 5$. В случае цилиндрической оболочки ($\psi = \pi/2$) формулы (4.87) являются точными. Практически для тонких оболочек ($R_2/h > 100$) построенным приближенным решением можно пользоваться при значениях краевого угла ψ в пределах $20^\circ < \psi < 160^\circ$. Ширина зоны краевого эффекта примерно равна π/k , что при $\mu = 0,3$ составляет $2,5\sqrt{R_2h}$.

4.4.4. Граничные условия и условия сопряжения

Общее решение задачи об осесимметричной деформации оболочки вращения записывается в виде суммы (4.75) безмоментного решения (4.65), (4.66), (4.71) ... (4.73) и краевого эффекта (4.86) ... (4.89). Оно содержит три произвольные постоянные C_0 , C_1 , C_2 , которые должны быть определены из граничных условий или условий сопряжения на крае оболочки. В качестве граничных условий на крае должны быть заданы две компоненты перемещений и угол поворота в меридиональной плоскости или соответствующие им распределенные силы и момент, например, u или N_α , w или Q_α , ϑ_α или M_α .

Приведем основные типы граничных условий: жесткое защемление — $u = w = \vartheta_\alpha = 0$; шарнирное закрепление — $u = w = M_\alpha = 0$, при этом вместо условий $u = w = 0$ можно использовать условия $u_r = u_x = 0$.

Условия жесткого соединения оболочек по краям записываются в виде трех геометрических условий совместности перемещений и углов поворота и трех статических условий, на основании которых реакции (две силы и момент) на соединяемых краях должны быть равны по величине и противоположны по направлению.

В случае, если оболочки соединяются через упругий шпангоут, то статические условия записываются в виде уравнений равновесия соединительного шпангоута под действием сил и моментов, в число которых включаются реакции со стороны оболочек N_α , T и M . Реакции $\bar{T}$ и $\bar{M}_\alpha$ можно выразить через радиальное перемещение $\bar{u}_r$ и угол поворота $\bar{\vartheta}_\alpha$ края оболочки по формулам, аналогичным (4.90). Суммарные величины $\bar{u}_r$ и $\bar{\vartheta}_\alpha$ складываются из слагаемых, представляющих безмоментное решение ($\bar{u}_r^0$, $\bar{\vartheta}_\alpha^0$) и краевой эффект ($\bar{u}_r^k$, $\bar{\vartheta}_\alpha^k$)

$$\bar{u}_r = \bar{u}_r^0 + \bar{u}_r^k, \quad \bar{\vartheta}_\alpha = \pm \bar{\vartheta}_\alpha^0 + \bar{\vartheta}_\alpha^k. \quad (4.92)$$

Значения $\bar{u}_r^0, \bar{\vartheta}_\alpha^0$ определяются по формулам безмоментного решения (4.73), они не зависят от константы C_0 и поэтому являются известными. В формулах (4.92) за положительное направление принимается направление от края оболочки. В связи с тем, что оно совпадает с координатой s_α , соответствующей безмоментному решению только для нижнего края (см. рис. 4.12), во втором равенстве (4.92) для нижнего края следует принять знак «+», а для верхнего края — знак «—» (см. рис. 4.15). В результате аналогично (4.90) получим

$$C_1 = \frac{\bar{u}_r - \bar{u}_r^0}{\sin \bar{\psi}}, \quad C_2 = \frac{\bar{u}_r - \bar{u}_r^0}{\sin \psi} - \frac{\bar{\vartheta}_\alpha \mp \bar{\vartheta}_\alpha^0}{k} \quad (4.93)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{T} &= c_{11} (\bar{u}_r - \bar{u}_r^0) - c_{12} (\bar{\vartheta}_\alpha \mp \bar{\vartheta}_\alpha^0), \\ \bar{M}_\alpha &= c_{21} (\bar{u}_r - \bar{u}_r^0) - c_{22} (\bar{\vartheta}_\alpha \mp \bar{\vartheta}_\alpha^0). \end{aligned} \quad (4.94)$$

Здесь c_{ij} определяется равенствами (4.91), знак «—» при $\bar{\vartheta}_\alpha$ соответствует нижнему, а знак «+» — верхнему краю оболочки (см. рис. 4.15).

Радиальное перемещение $\bar{u}_r$ и угол поворота $\bar{\vartheta}_\alpha$ на крае оболочки, связанной со шпангоутом, исходя из геометрических условий сопряжения выражают через радиальное перемещение в центре тяжести поперечного сечения шпангоута $w_{\text{ш}}$ и угол поворота этого сечения $\bar{\vartheta}_{\text{ш}}$. В итоге при любом числе сопрягаемых со шпангоутом оболочек, если они являются статически определимыми относительно безмоментных усилий N_α^0 , задача сводится к двум линейным алгебраическим уравнениям относительного $w_{\text{ш}}, \bar{\vartheta}_{\text{ш}}$. После их определения находятся $\bar{u}_r, \bar{\vartheta}_\alpha$ и константы C_1, C_2 (4.93) для каждой из сопрягаемых оболочек.

Для определения константы C_0 ставится граничное условие или условие сопряжения для осевого перемещения u_x , которое на основании (4.73) равно

$$u_x = C_0 + F(\alpha) - u_r \operatorname{ctg} \alpha, \quad (4.95)$$

где $u_r = u_r^0 + u_r^k$ — полное радиальное перемещение.

Запишем условия сопряжения для системы двух оболочек, соединенных через упругий шпангоут, который свободно оперт по контуру радиуса r_0 (рис. 4.16). Будем считать, что на опорном контуре вертикальное смещение равно нулю, т. е. $u_0 = 0$. Распределенную вертикальную силу P_0 находим из уравнения равновесия всей системы. Затем для каждой из оболочек 1 и 2 записываются решения по безмоментной теории и теории краевого эффекта.

Геометрические условия жесткого сопряжения оболочек со шпангоутом (см. рис. 4.16, б) имеют вид:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \quad \bar{u}_{x,1} = \bar{\vartheta}_{\text{ш}} (b_0 - b_1), \quad \bar{u}_{x,2} = \bar{\vartheta}_{\text{ш}} (b_0 + b_2), \\ \bar{\vartheta}_{\alpha,1} &= -\bar{\vartheta}_{\text{ш}}, \quad \bar{\vartheta}_{\alpha,2} = \bar{\vartheta}_{\text{ш}}, \quad \bar{u}_{r,1} = w_{\text{ш}} + \bar{\vartheta}_{\text{ш}} a_1, \\ \bar{u}_{r,2} &= w_{\text{ш}} - \bar{\vartheta}_{\text{ш}} a_2. \end{aligned} \quad (4.96)$$

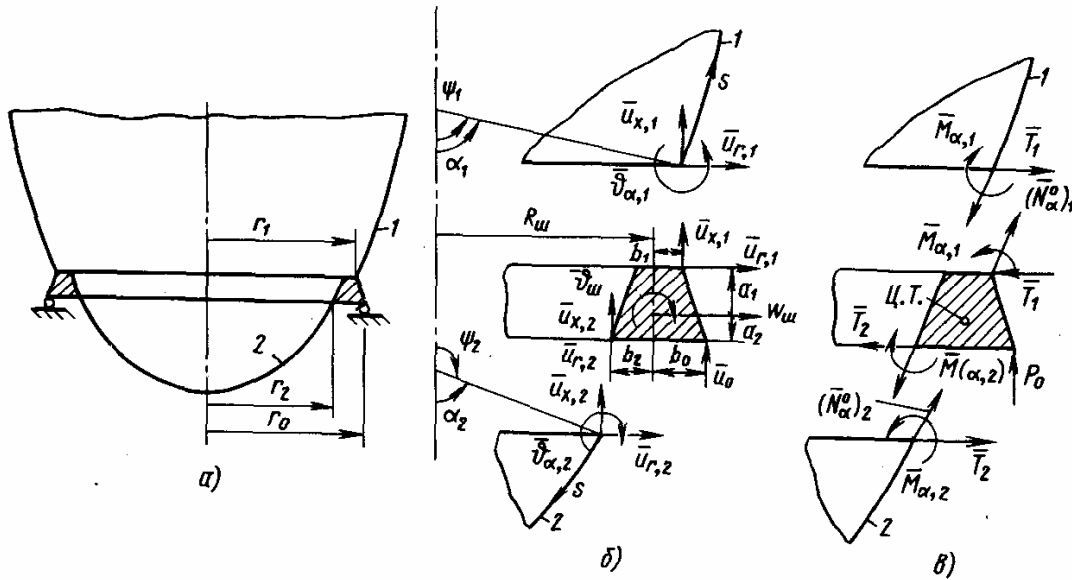


Рис. 4.16. Оболочки вращения, соединенные через упругий шпангоут (а); кинематические (б) и силовые (в) контактные параметры

Уравнения равновесия радиальных сил и моментов, действующих на шпангоут, записываются в форме (см. рис. 4.16, в)

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{ш}} F_{\text{ш}}}{R_{\text{ш}}^2} w_{\text{ш}} &= -\bar{T}_1 \frac{r_1}{R_{\text{ш}}} - \bar{T}_2 \frac{r_2}{R_{\text{ш}}} + \bar{T}_0, \\ \frac{E_{\text{ш}} I_{\text{ш}}}{R_{\text{ш}}^2} \vartheta_{\text{ш}} &= -(\bar{M}_{\alpha,1} + \bar{T}_1 a_1) \frac{r_1}{R_{\text{ш}}} + (\bar{M}_{\alpha,2} + \bar{T}_2 a_2) \frac{r_2}{R_{\text{ш}}} + \bar{M}_0. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Здесь $F_{\text{ш}}$ и $I_{\text{ш}}$ — площадь и момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно радиальной оси, проходящей через его центр тяжести; множители в виде отношения радиусов ($r_1/R_{\text{ш}}$ и другие) вошли в уравнения (4.97) в силу того, что соответствующие распределенные силы и моменты ($\bar{T}_1$ и другие) отнесены к единице длины тех линий, на которых они приложены.

В уравнениях (4.97) $\bar{T}_0$ и $\bar{M}_0$ представляют собой распределенную радиальную нагрузку и распределенный момент, которые возникают за счет реакций безмоментных оболочек (от известных меридиональных усилий N_{α}^0) и внешней нагрузки, действующей на шпангоут. В рассматриваемом случае имеем (см. рис. 4.16, в):

$$\begin{aligned} \bar{T}_0 &= (\bar{N}_{\alpha}^0)_1 \frac{r_1}{R_{\text{ш}}} \cos \alpha_1 - (\bar{N}_{\alpha}^0)_2 \frac{r_2}{R_{\text{ш}}} \cos \alpha_2, \\ -\bar{M}_0 &= (\bar{N}_{\alpha}^0)_1 \frac{r_1}{R_{\text{ш}}} (b_1 \sin \alpha_1 - a_1 \cos \alpha_1) + \\ &+ (\bar{N}_{\alpha}^0)_2 \frac{r_2}{R_{\text{ш}}} (b_2 \sin \alpha_2 - a_2 \cos \alpha_2) + P_0 \frac{r_{\text{ш}}}{R_{\text{ш}}} a_0. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Уравнение проекций сил в направлении оси оболочки

$$(\bar{N}_1^0) \frac{r_1}{R_m} \sin \alpha_1 - (\bar{N}_1^0) \frac{r_2}{R_m} \sin \alpha_2 + P_0 \frac{r_0}{R_m} = 0$$

позволяет определить реакцию P_0 .

Уравнения равновесия (4.97) с учетом зависимостей (4.94) для каждой из оболочек и геометрических соотношений (4.96) приводятся к виду

$$\begin{aligned} B_{11}w_m + B_{12}\vartheta_m &= B_{10}, \\ B_{21}w_m + B_{22}\vartheta_m &= B_{20}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Коэффициенты уравнений (4.99) в рассматриваемом случае (см. рис. 4.16) будут

$$\begin{aligned} B_{11} &= c_{11}^{(1)} \frac{r_1}{R_m} + c_{11}^{(2)} \frac{r_2}{R_m} + \frac{E_m F_m}{R_m^2}, \\ B_{12} = B_{21} &= (c_{12}^{(1)} + c_{11}^{(1)} a_1) \frac{r_1}{R_m} - (c_{12}^{(2)} + c_{11}^{(2)} a_2) \frac{r_2}{R_m}, \\ B_{22} &= (c_{22}^{(1)} + 2c_{12}^{(1)} a_1 + c_{11}^{(1)} a_1^2) \frac{r_1}{R_m} + \\ &+ (c_{22}^{(2)} + 2c_{12}^{(2)} a_2 + c_{11}^{(2)} a_2^2) \frac{r_2}{R_m} + \frac{E_m I_m}{R_m^2}, \\ B_{01} &= (c_{11}^{(1)} \bar{u}_{r,1}^0 - c_{12}^{(1)} \bar{\vartheta}_{\alpha,1}^0) \frac{r_1}{R_m} + (c_{11}^{(2)} \bar{u}_{r,2}^0 + c_{12}^{(2)} \bar{\vartheta}_{\alpha,2}^0) \frac{r_2}{R_m} + \bar{T}_0, \\ B_{02} &= [(c_{12}^{(1)} + c_{11}^{(1)} a_1) \bar{u}_{r,1}^0 - (c_{22}^{(1)} + c_{12}^{(1)} a_1) \bar{\vartheta}_{\alpha,1}^0] \frac{r_1}{R_m} - \\ &- [(c_{12}^{(2)} + c_{11}^{(2)} a_2) \bar{u}_{r,2}^0 + (c_{22}^{(2)} + c_{12}^{(2)} a_2) \bar{\vartheta}_{\alpha,2}^0] \frac{r_2}{R_m} + \bar{M}_0. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Здесь B_{11} , $B_{12} = B_{21}$ и B_{22} представляют собой коэффициенты жесткости шпангоута с учетом присоединенных оболочек. Эти коэффициенты легко обобщаются путем суммирования на случай произвольного числа оболочек (в формулах (4.100) коэффициенты жесткости c_{ij} (4.91) различных оболочек отмечаются верхним индексом).

Во многих случаях размеры поперечного сечения шпангоута малы по сравнению с его радиусом. В таких случаях при приближенных расчетах можно пренебречь всеми эксцентриситетами, положив в уравнениях (4.95)–(4.97) $r = r_1 = r_2 = R_m$, $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$. Шпангоут при таком упрощении по существу рассматривается как упругая линия в виде окружности радиуса R_m .

После решения уравнений (4.99) по формулам (4.93) с учетом зависимостей (4.95) для каждой из оболочек определяются константы C_1 , C_2 и C_0 .

4.4.5. Примеры расчета

Пример 1. Рассмотрим коническую оболочку постоянной толщины h , полностью заполненную жидкостью с удельной плотностью γ (рис. 4.17). При этом массой оболочки будем пренебрегать. Гидростатическое давление на глубине $H - x$ от свободной поверхности равно $p = \gamma (H - x)$.

Рассмотрим безмоментное напряженное состояние. Полагая в формуле (4.66) $\alpha = \pi/2 - \varphi$; $q = 0$; $r = x \operatorname{tg} \varphi$; $R_1 d\alpha = ds_\alpha = dx/\cos \varphi$; $X_0 = 0$, получим

$$N_\alpha^0 = \frac{\gamma \sin \varphi}{x \cos^2 \varphi} \int_0^x (H - x) x dx = \frac{\gamma \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} x \left(\frac{H}{2} - \frac{x}{3} \right).$$

Из равенства (4.65) при $R_1 \rightarrow \infty$ и $R_2 = r/\sin \alpha$ имеем

$$N_\beta^0 = p x \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\gamma \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} x (H - x).$$

По формулам (4.69) найдем деформации

$$\varepsilon_\alpha^0 = \frac{\gamma}{Eh} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} x \left[\left(\frac{H}{2} - \frac{x}{3} \right) - \mu (H - x) \right],$$

$$\varepsilon_\beta^0 = \frac{\gamma}{Eh} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} x \left[(H - x) - \mu \left(\frac{H}{2} - \frac{x}{3} \right) \right].$$

Из равенств (4.71), (4.72) получим перемещения безмоментной оболочки

$$u^0 = \frac{\gamma}{Eh} \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \left[\left(\frac{Hx^2}{4} - \frac{x^3}{9} \right) - \mu \left(\frac{Hx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right] + C_0 \cos \varphi,$$

$$w^0 = \frac{\gamma}{Eh} \frac{\sin^3 \varphi}{\cos^4 \varphi} \left(\frac{3H}{4} - \frac{8x}{9} \right) x^2 - C_0 \sin \varphi.$$

С учетом краевого эффекта у закрепленного края $x = H$ перемещения имеют вид

$$u = u^0, \quad w = w^0 + e^{-ks} (C_1 \cos ks + C_2 \sin ks),$$

где $k = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)\sin^2 \varphi}{H^2 h^3}}$, $s = \frac{H-x}{\cos \varphi}$.

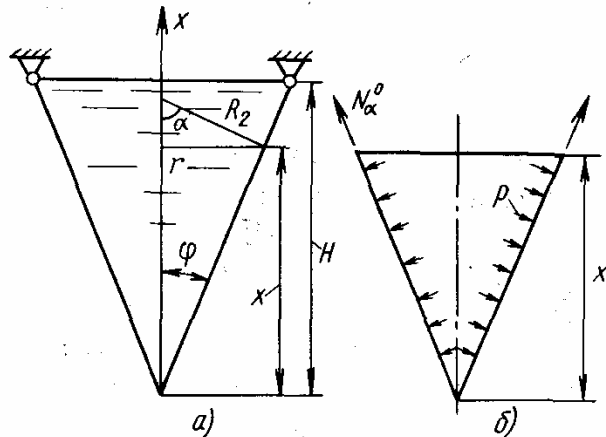
При шарнирном закреплении из граничных условий $u = 0$, $w = 0$, $M_\alpha = 0$ при $x = H$ ($s = 0$) находим

$$C_0 = - \frac{\gamma}{Eh} \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} \frac{H^3}{6} \left(\frac{5}{6} - \mu \right),$$

$$C_1 = -w^0(H), \quad C_2 = 0.$$

Усилия и моменты, обусловленные краевым изгибом оболочки, определяются по формулам (4.87); усилия N_α^k , N_β^k затем складываются с

Рис. 4.17. Коническая оболочка, заполненная жидкостью (а), и ее отсеченная часть (б)



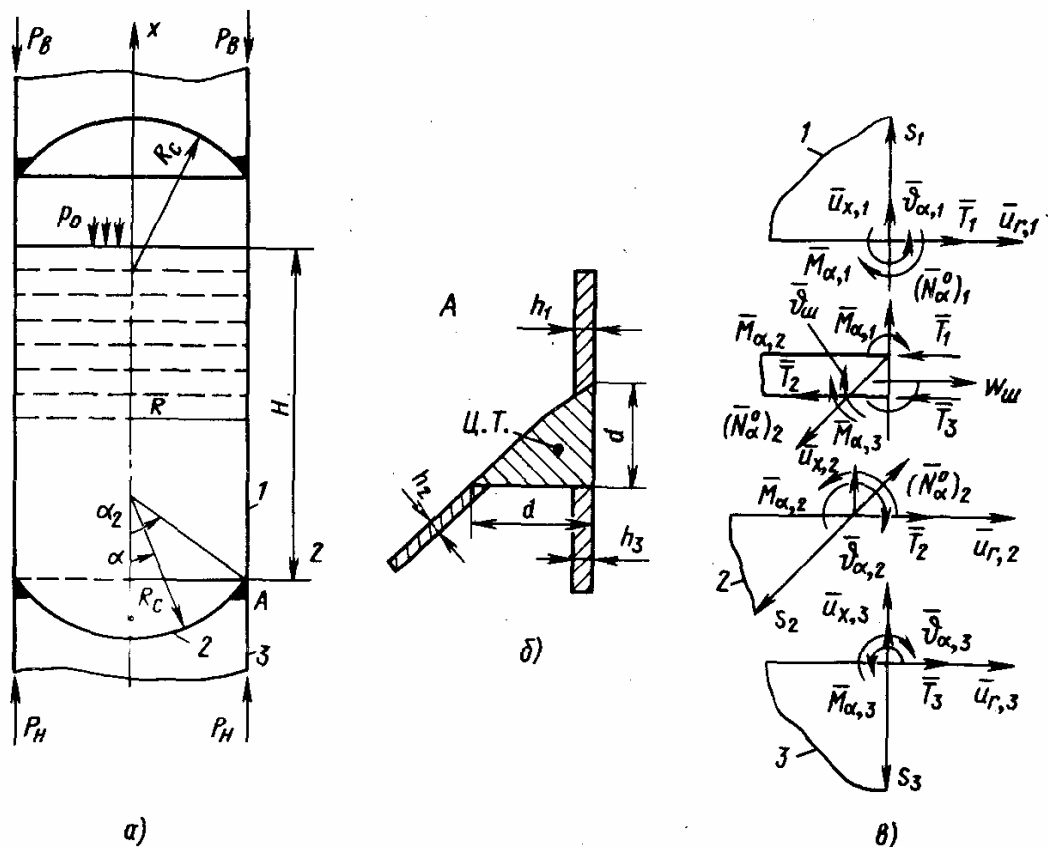


Рис. 4.18. Цилиндрический бак со сферическими днищами (а), присоединенными через шпангоуты (б), и его контактные параметры (в)

безмоментными усилиями $N_{\alpha}^0, N_{\beta}^0$. Напряжения $\sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}$ могут быть найдены по формулам (4.21).

Пример 2. Определим напряженно-деформированное состояние оболочек цилиндрического бака со сферическими днищами с учетом краевого эффекта в районе нижнего шпангоута (зона А), (рис. 4.18, а). Массой оболочки пренебрегаем по сравнению с массой жидкости. Примем следующие параметры: $R_c/R = \sqrt{2}$; $R/h_1 = 250$; $R_c/h_2 = 400$; $R/h_3 = 150$; $H/R = 4$; $R/d = 20$; $\gamma H = p_0/2$; $P_B = p_0 R/2$.

Рассмотрим безмоментное напряженное состояние.

1. Цилиндрическая оболочка 1; $R_1 \rightarrow \infty, R_2 = R, \alpha = \pi/2$. Давление на оболочку $p = p_0$ при $x > H$ и $p = p_0 + \gamma(H - x)$ при $x \leq H$. Усилия в срединной поверхности

$$N_{\alpha}^0 = \frac{p_0 \pi R^2 - P_B 2\pi R}{2\pi R} = 0;$$

$$N_{\beta}^0 = p_0 R \text{ при } x > H,$$

$$N_{\beta}^0 = [p_0 + \gamma(H - x)] R = 0,5 p_0 R (3 - x/H) \text{ при } x < H.$$

Нормальные перемещения определим по формуле

$$w^0 = \frac{R}{E h_1} (N_{\beta}^0 - \mu N_{\alpha}^0).$$

Имеем

$$\begin{aligned} w^0 &= 250 p_0 R / E & \text{при } x > H, \\ w^0 &= 125 (3 - x/H) p_0 R / E & \text{при } x \leq H. \end{aligned}$$

Радиальное перемещение u_r и угол поворота на крае $x = 0$:

$$\bar{u}_r^0 = w^0|_{x=0} = 375 \frac{p_0 R}{E}, \quad \bar{\vartheta}_\alpha^0 = - \frac{R^2}{E h_1} \frac{dp}{dx} \Big|_{x=0} = 31,25 \frac{p_0}{E}.$$

2. Сферическая оболочка 2; $R_1 = R_2 = R_c = \sqrt{2}R$, $\alpha_2 = \pi/4$. Давление на оболочку — $p = p + \gamma(H + R_c \cos \alpha - R_c \cos \alpha_2)$.
Усилия в оболочке

$$\begin{aligned} N_\alpha^0 &= \frac{1}{R_c \sin^2 \alpha} \int_0^\alpha p R_c^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \\ &= \frac{R_c}{2} (p_0 + \gamma H - \gamma R_c \cos \alpha_2) + \gamma \frac{R_c^3}{3} \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha}, \\ N_\beta^0 &= p R_c - N_\alpha^0. \end{aligned}$$

На крае оболочки при $\alpha = \alpha_2 = 45^\circ$ получим $N_\alpha^0 = 1,080 p_0 R$, $N_\beta^0 = 1,040 p_0 R$ и в центре днища при $\alpha \rightarrow 0$ $N_\alpha^0 = N_\beta^0 = 1,108 p_0 R$.

Вычислим далее

$$\begin{aligned} \varepsilon_\beta^0 R_2 &= \varepsilon_\beta^0 R_c = \frac{R_c}{E h_2} (N_\beta^0 - \mu N_\alpha^0), \\ f(\alpha) &= \varepsilon_\alpha^0 - \varepsilon_\beta^0 \frac{R_2}{R_1} = \varepsilon_\alpha^0 - \varepsilon_\beta^0 = \frac{1 + \mu}{E h_2} (2N_\alpha^0 - p R_c) = \\ &= \frac{1 + \mu}{E h_2} \gamma R_c^2 \left(\frac{2}{3} \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right), \\ F(\alpha) &= \int \frac{f(\alpha)}{\sin \alpha} R_1 d\alpha = \frac{1 + \mu}{E h_2} \gamma R_c^3 \left[\frac{2}{3} \left(-\frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \ln \sin \alpha \right) - \ln \sin \alpha \right] = -\gamma R_c^3 \frac{1 + \mu}{3 E h_2} \times \\ &\quad \times \left[\frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} + \ln(1 + \cos \alpha) \right]. \end{aligned}$$

Радиальное перемещение и угол поворота

$$u_r^0 = \varepsilon_\beta^0 R_c \sin \alpha, \quad \vartheta_\alpha^0 = - \frac{R_c}{E h_2} \frac{dp}{d\alpha} = \frac{\gamma R_c^2}{E h_2} \sin \alpha;$$

на крае оболочки при $\alpha = \alpha_2 = 45^\circ$ имеем $(\bar{u}_r^0)_2 = u_r^0|_{\alpha=\alpha_2} = 202,9 \frac{p_0 R}{E}$ и

$$(\bar{\vartheta}_\alpha^0)_2 = \vartheta_\alpha^0|_{\alpha=\alpha_2} = 50,0 \frac{p_0}{E}.$$

3. Цилиндрическая оболочка 3; $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, $\alpha = \pi/2$. Уравнение равновесия всего отсека (см. рис. 4.18, а) имеет вид

$$2\pi R (P_B - P_H) + \gamma V_{ж} = 0,$$

где объем жидкости

$$V_{ж} = \pi R^2 H + \pi R_c^3 (2 - 3 \cos \alpha_2 + \cos^3 \alpha_2)/3 = 4,22 \pi R^3.$$

Из этого уравнения находим P_H и затем — усилия в оболочке:

$$N_\alpha^0 = -P_H = -0,7637 p_0 R, \quad N_\beta^0 = 0.$$

Радиальное перемещение и угол поворота

$$u_r^0 = -\mu R N_\alpha^0 / (E h_3) = 34,4 p_0 R / E, \quad \vartheta_\alpha^0 = 0.$$

Рассмотрим краевой эффект в районе нижнего шпангоута (зона А, см. рис. 4.18, б). Вычислим цилиндрические жесткости D , параметры k и коэффициенты жесткости c_{11} , $c_{12} = c_{21}$, c_{22} на сопрягаемых краях оболочек, а также — коэффициенты жесткости шпангоута.

1. Цилиндрическая оболочка 1; $\psi_1 = 90^\circ$:

$$D^{(1)} = 5,86 \cdot 10^{-9} ER^3, \quad k_1 R = 20,32, \quad c_{11}^{(1)} = 1,968 \cdot 10^{-4} E,$$

$$c_{12}^{(1)} = c_{21}^{(1)} = 4,840 \cdot 10^{-6} ER, \quad c_{22}^{(1)} = 2,382 \cdot 10^{-7} ER^2.$$

2. Сферическая оболочка 2; $\psi_2 = \pi - \alpha_2 = 135^\circ$; $R_0 = \sqrt{2}R$;

$$D^{(2)} = 4,05 \cdot 10^{-9} ER^3, \quad k_2 R = 18,18, \quad c_{11}^{(2)} = 1,922 \cdot 10^{-4} E,$$

$$c_{12}^{(2)} = c_{21}^{(2)} = 3,740 \cdot 10^{-6} ER, \quad c_{22}^{(2)} = 1,452 \cdot 10^{-7} ER^2.$$

3. Цилиндрическая оболочка 3; $\psi_3 = 90^\circ$:

$$D^{(3)} = 27,1 \cdot 10^{-9} ER^3, \quad k_3 R = 15,74, \quad c_{11}^{(3)} = 4,214 \cdot 10^{-4} E,$$

$$c_{12}^{(3)} = c_{21}^{(3)} = 13,38 \cdot 10^{-6} ER, \quad c_{22}^{(3)} = 8,500 \cdot 10^{-7} ER^2.$$

4. Шпангоут; $E_{\text{ш}} = E$:

$$F_{\text{ш}} = d^3/2, \quad I_{\text{ш}} = d^4/36, \quad E_{\text{ш}} F_{\text{ш}}/R^3 = 1,250 \cdot 10^{-3} E,$$

$$E_{\text{ш}} I_{\text{ш}}/R^3 = 1,740 \cdot 10^{-7} ER^3.$$

Уравнения равновесия шпангоута записываются в виде (4.99), где

$$B_{11} = 2,107 \cdot 10^{-3} E, \quad B_{12} = B_{21} = 1,584 \cdot 10^{-6} ER,$$

$$B_{22} = 2,722 \cdot 10^{-6} ER^2, \quad B_{01} = -0,6057 p_0 R,$$

$$B_{02} = 20,97 \cdot 10^{-3} p_0 R^2.$$

Решая эти уравнения, находим $w_{\text{ш}} = -361 p_0 R/E$, $\vartheta_{\text{ш}} = -9820 p_0/E$ и далее $\bar{u}_{r,1} = -688 p_0 R/E$, $\bar{u}_{r,2} = \bar{u}_{r,3} = -197 p_0 R/E$.

Если пренебречь всеми эксцентриситетами (рассматривая шпангоут как упругую линию с теми же жесткостями $E_{\text{ш}} F_{\text{ш}}$ и $E_{\text{ш}} I_{\text{ш}}$), то получим

$$B_{11} = 2,06 \cdot 10^{-3} E, \quad B_{12} = B_{21} = 1,228 \cdot 10^{-6} ER,$$

$$B_{22} = 1,407 \cdot 10^{-6} ER^2, \quad B_{01} = -0,6362 p_0 R,$$

$$B_{02} = -0,582 \cdot 10^{-3} p_0 R^2;$$

$$w_{\text{ш}} = -322,7 p_0 R/E, \quad \vartheta_{\text{ш}} = -2405 p_0/E.$$

Эксцентриситеты в данном случае, в первую очередь, влияют на величину момента $\bar{M}_0$, который образуется за счет безмоментных усилий $\bar{N}_\alpha^0$, действующих на шпангоут со стороны оболочек и выворачивающих его (без учета эксцентриситетов $\bar{M}_0 = 0$). Приведенные результаты показывают, что при принятой форме поперечного сечения шпангоута и его расположении (см. рис. 4.17, б), пренебрегать эксцентриситетами нельзя.

По формулам (4.93) определяем константы C_1 и C_2 для каждой из сопрягаемых оболочек:

$$C_1^{(1)} = -1063 p_0 R/E, \quad C_2^{(1)} = -581 p_0 R/E,$$

$$C_1^{(2)} = -566 p_0 R/E, \quad C_2^{(2)} = -28 p_0 R/E,$$

$$C_1^{(3)} = -231 p_0 R/E, \quad C_2^{(3)} = 392 p_0 R/E.$$

По формулам (4.87) найдем перемещения, усилия и изгибающие моменты, обусловленные краевым изгибом оболочек в районе шпангоута. После этого определяются суммарные перемещения w и усилия N_α , N_β с учетом безмоментного решения. При определении перемещений будем считать, что осевое перемещение шпангоута на линии сопряжения его с цилиндрическими оболочками (см. рис. 4.18) равно нулю.

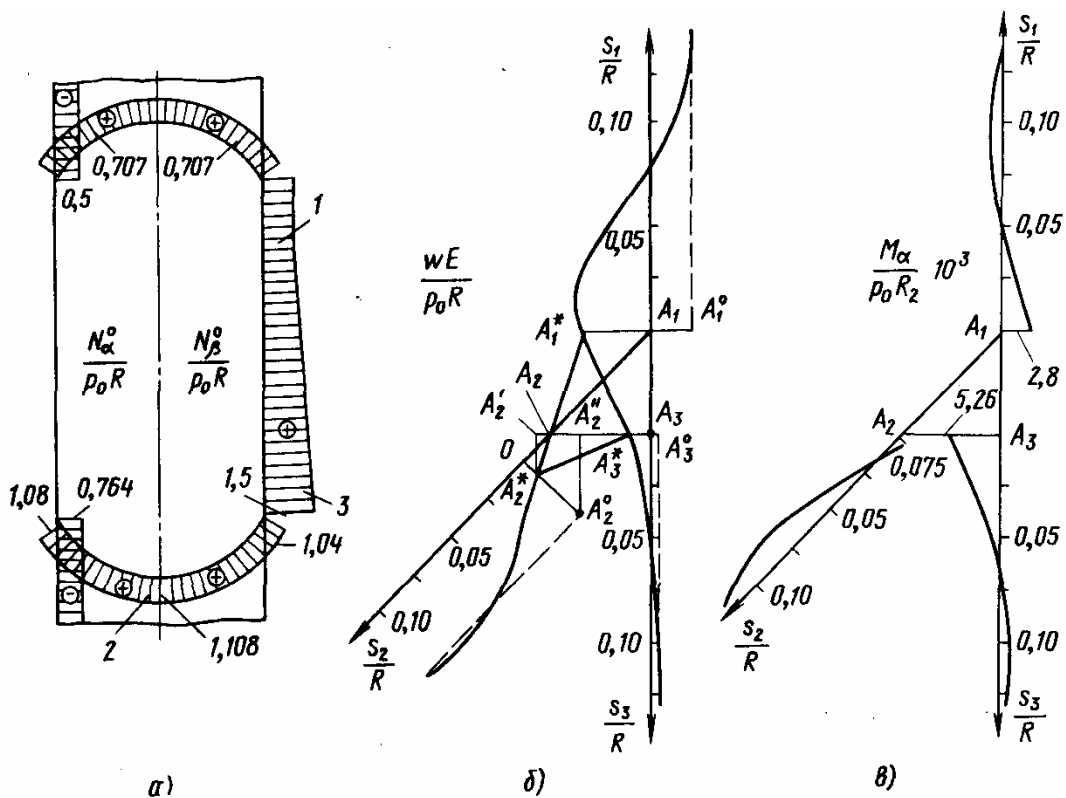


Рис. 4.19. Безмоментные усилия, возникающие в баке (а), прогиб (б) и изгибающий момент (в) в зоне краевого эффекта

Тогда

$$\bar{u}_{x,1} = \bar{u}_{x,3} = 0, \bar{u}_{x,2} = \bar{\phi}_{ш} d = -491 p_0 R / E.$$

Используя формулу (4.95) для перемещения u_x сферической оболочки при $\alpha = \alpha_2 = 45^\circ$ с учетом $\bar{u}_{r,2} = -197 p_0 R / E$, $\bar{u}_{x,2} = -491 p_0 R / E$, $F(\alpha) |_{\alpha=45^\circ} = -41,2 p_0 R / E$, получим $C_0^2 = -647 p_0 R / E$. Найдем нормальное перемещение сферической оболочки в полюсе при $\alpha = 0$ по формуле (4.72). Учитывая, что $F(\alpha) |_{\alpha=0} = -51,7 p_0 R / E$, $e_\beta^0 R_c |_{\alpha=0} = 310 p_0 R / E$, получим

$$w |_{\alpha=0} = [-(-51,7 - 647) + 310] p_0 R / E = 1008,7 p_0 R / E.$$

На рис. 4.19, а приведены эпюры усилий N_α^0 и N_β^0 , полученных по безмоментной теории.

На рис. 4.19, б сплошными линиями показаны изменения нормальных перемещений оболочек в районе нижнего шпангоута. Пунктирными линиями показаны нормальные перемещения, вычисленные по безмоментной теории. Безразмерные перемещения краев оболочек, показанные на рис. 4.18, б, равны: $A_1 A_1^0 = 375$; $A_2 A_2^0 = 202,9$; $A_3 A_3^0 = 34,4$; $A_1 A_1^* = 688$; $A_2 A_2^* = A_3 A_3^* = 197$; $A_2^* A_2^* = 491$; $A_3^* A_3^* = 566$.

На рис. 4.19, в показаны эпюры изгибающих моментов в оболочках. Максимальные значения моментов возникают на линиях сопряжения со шпангоутом

$$\bar{M}_{\alpha,1} = -2,8 \cdot 10^{-3} p_0 R^2, \bar{M}_{\alpha,2} = -7,51 \cdot 10^{-5} p_0 R^2, \bar{M}_{\alpha,3} = 5,26 \cdot 10^{-3} p_0 R^2.$$

Определим максимальные напряжения в оболочках.

1. Цилиндрическая оболочка I. Максимальные растягивающие напряжения возникают вблизи нижнего шпангоута вне зоны краевого эффекта при $s_1 \approx \approx 2,5 \sqrt{R h_1} = 0,158 R$.

$$\sigma_\beta = \frac{1}{h_1} N_\beta^0 |_{x=0,158 R} \approx \frac{1}{h_1} N_\beta^0 |_{x=0} = 375 p_0.$$

Максимальные меридиональные и окружные напряжения в зоне краевого эффекта при $s_1 = 0$ и $\gamma = \pm h_1/2$:

$$\bar{\sigma}_\alpha = \frac{\bar{N}_{\alpha,1}}{h_1} \pm \frac{6\bar{M}_{\alpha,1}}{h_1^2} = \mp \frac{6}{h_1^2} 2,8 \cdot 10^{-3} p_0 R^2 = \mp 1050 p_0,$$

$$\bar{\sigma}_\beta = \frac{\bar{N}_{\beta,1}}{h_1} \pm \mu \frac{6\bar{M}_{\beta,1}}{h_1^2} = -688 p_0 \mp 315 p_0.$$

2. Сферическая оболочка 2. Напряжения в полюсе оболочки при $\alpha = 0$ равны $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1,108 p_0 R/h_2 = 314 p_0$. Усилия на крае оболочки при $s_2 = 0$ ($\psi_2 = 135^\circ$) за счет краевого эффекта:

$$\bar{N}_\alpha^\kappa = -2D_2 k_2^3 (C_1^{(2)} + C_2^{(2)}) \operatorname{ctg} \psi_2 = -0,029 p_0 R,$$

$$\bar{N}_\beta^\kappa = (Eh_2/R_c) C_1^{(2)} = -1,42 p_0 R.$$

Максимальные меридиональные и окружные напряжения на крае оболочки при $s_2 = 0$, $\gamma = \pm h_2/2$:

$$\bar{\sigma}_\alpha = (1,08 - 0,029) p_0 R/h_2 \mp 6 \cdot 7,51 \cdot 10^{-5} p_0 R^2/h_2^2 = 297 p_0 \mp 36 p_0,$$

$$\bar{\sigma}_\beta = (1,04 - 1,42) p_0 R/h_2 \mp 0,3 \cdot 6 \cdot 7,51 \cdot 10^{-5} p_0 R^2/h_2^2 = -108 p_0 \mp 10,8 p_0.$$

3. Цилиндрическая оболочка 3. Максимальные меридиональные и окружные напряжения на крае оболочки $s_3 = 0$, $\gamma = \pm h_3/2$:

$$\bar{\sigma}_\alpha = -0,7637 p_0 R/h_3 \pm 6 \cdot 5,26 \cdot 10^{-3} p_0 R^2/h_3^2 = -104 p_0 \pm 712 p_0,$$

$$\bar{\sigma}_\beta = \pm 0,3 \cdot 7,12 p_0 = \pm 213,7 p_0.$$

Приведенные результаты показывают, что в рассмотренном случае изгибные напряжения в цилиндрических оболочках значительно превышают безмоментные напряжения. Изгибные напряжения могут быть уменьшены за счет соответствующего выбора площади, формы и расположения шпангоута.

4.5. АНТИСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

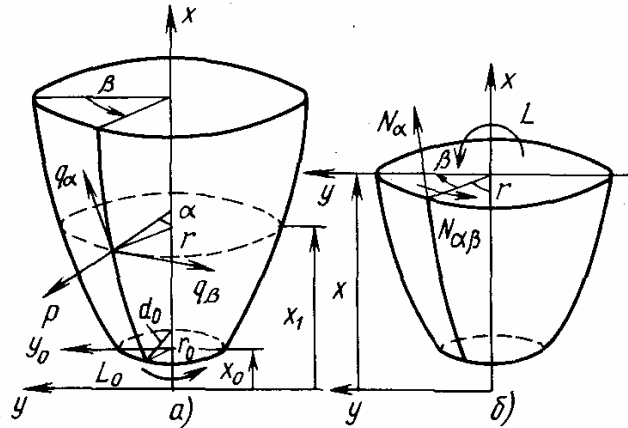
Помимо осесимметричного нагружения, рассмотренного в разд. 4.4, распространенным расчетным случаем является антисимметричное нагружение, вызывающее общий изгиб оболочки. Такое нагружение характерно, например, для отсеков летательных аппаратов.

Рассмотрим тонкую оболочку вращения (рис. 4.20, а), находящуюся под действием поверхностных нагрузок вида

$$q_\alpha = q_\alpha^{(1)}(\alpha) \cos \beta, \quad q_\beta = q_\beta^{(1)}(\alpha) \sin \beta, \quad p = p^{(1)}(\alpha) \cos \beta. \quad (4.101)$$

Пусть распределенные нагрузки (или реакции) на краях оболочки заданы аналогичным образом, т. е. меридиональные усилия, поперечные усилия и изгибающие моменты распределены вдоль краев по закону $\cos \beta$, а окружные усилия — по закону $\sin \beta$. Все эти нагрузки в каждом поперечном сечении $x = \text{const}$ приводятся к равнодействующей поперечной силе Y и изги-

Рис. 4.20. Антисимметрично нагруженная оболочка вращения (а) и ее отсеченная часть (б)



бающему моменту L , вызывающим общий изгиб и сдвиг оболочки как балки (см. рис. 4.20, б). Если нагрузки, радиусы кривизны и толщина оболочки изменяются в меридиональном направлении достаточно плавно, то при антисимметричном нагружении так же, как и при осесимметричном, оболочка в основном испытывает безмоментное напряженное состояние. На краях, где оболочка нагружается распределенными поперечными силами и изгибающими моментами, а также в местах сопряжения различных оболочек возникает быстро затухающее моментное напряженное состояние типа краевого эффекта, который изменяется в окружном направлении пропорционально $\cos \beta$.

На основании этого приближенное решение задачи при антисимметричном нагружении оболочки вращения может быть получено так же, как и при осесимметричном нагружении, в виде суммы безмоментного решения и моментного решения в виде краевого эффекта.

4.5.1. Безмоментное решение

При действии антисимметричных поверхностных нагрузок (4.101), как следует из уравнений равновесия безмоментной оболочки вращения (4.52), распределенные усилия изменяются в окружном направлении следующим образом:

$$N_\alpha = N_\alpha^1(\alpha) \cos \beta, \quad N_\beta = N_\beta^1(\alpha) \cos \beta, \quad N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^1(\alpha) \sin \beta, \quad (4.102)$$

где N_α^1 , N_β^1 и $N_{\alpha\beta}^1$ — неизвестные функции, которые можно определить, интегрируя уравнения равновесия (4.52) по α . Однако проще составить уравнения равновесия отсеченной части оболочки, показанной на рис. 4.20, б.

Равнодействующая поперечная сила и равнодействующий момент внешних нагрузок, действующих на отсеченную часть оболочки (см. рис. 4.20), имеют вид

$$Y = Y_0 + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\int_0^{2\pi} (q_\alpha \cos \alpha \cos \beta - q_\beta \sin \beta + p \sin \alpha \cos \beta) r d\beta \right] R_1 d\alpha,$$

$$L = [L_0 - Y_0(x - x_0) - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\int_0^{2\pi} (q_\alpha \sin \alpha - p \cos \alpha) r^2 \cos \beta d\beta \right] R_1 d\alpha -$$

$$- \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\int_0^{2\pi} (q_\alpha \cos \alpha \cos \beta - q_\beta \sin \beta) + p \sin \alpha \cos \beta) r d\beta \right] (x - x_1) R_1 d\alpha,$$

где Y_0 и L_0 — равнодействующие распределенных нагрузок, приложенных на нижнем крае оболочки; x — координата рассматриваемого сечения; x_1 — текущая координата ($x_0 < x_1 < x$, $dx_1 = R_1 \sin \alpha d\alpha$).

Уравнения равновесия отсеченной части оболочки (см. рис. 4.20, б):

$$\begin{aligned} Y + \int_0^{2\pi} (N_\alpha \cos \alpha \cos \beta - N_{\alpha\beta} \sin \beta) r d\beta &= 0, \\ L - \int_0^{2\pi} N_\alpha \sin \alpha r^2 \cos \beta d\beta &= 0. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Эти уравнения являются интегралами первых двух дифференциальных уравнений (4.52). Выполняя интегрирование по β с учетом (4.102), получим

$$\begin{aligned} Y + \pi r (N_\alpha^1 \cos \alpha - N_{\alpha\beta}^1) &= 0, \\ L - \pi r^2 N_\alpha^1 \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Отсюда определяются амплитудные функции распределенных усилий $N_\alpha^1(\alpha)$ и $N_{\alpha\beta}^1(\alpha)$ в выражениях (4.102). Усилие N_β затем находится из третьего уравнения равновесия (4.52)

$$N_\beta = N_\beta^1 \cos \beta = \left(\rho^1 - \frac{N_\alpha^1}{R_1} \right) R_2 \cos \beta. \quad (4.105)$$

Деформации оболочки определяем из закона Гука (4.57) в форме, аналогичной (4.102),

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_\alpha^1(\alpha) \cos \beta, \quad \epsilon_\beta = \epsilon_\beta^1(\alpha) \cos \beta, \quad \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^1(\alpha) \sin \beta, \quad (4.106)$$

где $\epsilon_\alpha^1 = \frac{1}{Eh} (N_\alpha^1 - \mu N_\beta^1)$, $\epsilon_\beta^1 = \frac{1}{Eh} (N_\beta^1 - \mu N_\alpha^1)$, $\gamma_{\alpha\beta}^1 = \frac{N_{\alpha\beta}^1}{Gh}$.

Из геометрических соотношений (4.54), связывающих деформации и перемещения, получим

$$\begin{aligned} u &= u^1(\alpha) \cos \beta, \quad v = v^1(\alpha) \sin \beta, \quad w = w^1(\alpha) \cos \beta, \\ \frac{du^1}{d\alpha} + w^1 &= R_1 \epsilon_\alpha^1, \\ \frac{v^1}{\sin \alpha} + u^1 \operatorname{ctg} \alpha + w^1 &= R_2 \epsilon_\beta^1, \\ \frac{R_2}{R_1} \frac{dv^1}{d\alpha} - v^1 \operatorname{ctg} \alpha - \frac{u^1}{\sin \alpha} &= R_2 \gamma_{\alpha\beta}^1. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Из первого уравнения (4.107) определим w^1 , подставим w^1 во второе уравнение и поделим его на $\sin \alpha$; третье уравнение продифференцируем по α . В результате этих преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{v^1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \frac{du^1}{d\alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} u^1 &= \frac{1}{\sin \alpha} (R_2 \varepsilon_\beta^1 - R_1 \varepsilon_\alpha^1), \\ \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{R_2}{R_1} \frac{dv^1}{d\alpha} \right) - \operatorname{ctg} \alpha \frac{dv^1}{d\alpha} + \frac{v^1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \frac{du^1}{d\alpha} + \\ &+ \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} u^1 = \frac{d}{d\alpha} (R_2 \gamma_{\alpha\beta}^1). \end{aligned}$$

Вычитая из второго уравнения первое, будем иметь

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{R_2}{R_1} \frac{dv^1}{d\alpha} \right) - \operatorname{ctg} \alpha \frac{dv^1}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} (R_2 \gamma_{\alpha\beta}^1) - \frac{R_2 \varepsilon_\beta^1 - R_1 \varepsilon_\alpha^1}{\sin \alpha}$$

$$\text{или } \sin \alpha R_2 \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \frac{dv^1}{d\alpha} \right) = \frac{d}{d\alpha} (R_2 \gamma_{\alpha\beta}^1) - \frac{R_1}{\sin \alpha} \left(\frac{R_2}{R_1} \varepsilon_\beta^1 - \varepsilon_\alpha^1 \right).$$

Так как $R_1 \sin \alpha d\alpha = dx$, то последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{d^2 v^1}{dx^2} = F_1, \quad (4.108)$$

$$\text{где } F_1 = \frac{1}{R_2 \sin \alpha} \left[\frac{d}{dx} (R_2 \gamma_{\alpha\beta}^1) - \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{R_2}{R_1} \varepsilon_\beta^1 - \varepsilon_\alpha^1 \right) \right].$$

Интегрируя уравнение (4.108), получим

$$v^1 = \int_0^x \int_0^x F_1 dx dx + A_1 x + A_2. \quad (4.109)$$

После этого из третьего и первого уравнений (4.107) найдем

$$\begin{aligned} u^1 &= -R_2 \gamma_{\alpha\beta}^1 \sin \alpha - \cos \alpha \left(\int_0^x \int_0^x F_1 dx dx + A_1 x + A_2 \right) + \\ &+ r \sin \alpha \left(\int_0^x F_1 dx + A_1 \right), \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$w^1 = R_1 \varepsilon_\alpha^1 - R_1 \sin \alpha \frac{du^1}{dx}.$$

Нетрудно заметить, что решения, содержащие произвольные константы A_1 и A_2 , представляют перемещения недеформированной оболочки как твердого тела за счет поворота на угол A_1 и смещения A_2 в сечении $x = 0$.

Если оболочка закреплена на крае безмоментным образом (только по тангенциальным перемещениям), то константы A_1 и A_2 определяются из условий $v^1 = 0$, $u^1 = 0$ на этом крае. В общем случае, когда условия закрепления или сопряжения не являются безмоментными, константы A_1 и A_2 определяются совместно с произвольными константами, входящими в моментную часть решения.

4.5.2. Краевой эффект

Поскольку антисимметричное напряженно-деформированное состояние оболочки меняется в окружном направлении медленно (по закону $\cos \beta$), то антисимметричное (моментное) состояние по характеру его изменения в меридиональном направлении очень близко к осесимметричному краевому эффекту. На основании этого в районе края, где при антисимметричной деформации оболочка испытывает изгиб, приближенное общее решение представляется в виде суммы безмоментного решения и краевого эффекта, т. е.

$$\begin{aligned} u &\approx u^1 \cos \beta, \quad v \approx v^1 \sin \beta, \\ w &= w^1 \cos \beta + w^k \cos \beta, \end{aligned} \quad (4.111)$$

где w^k берется в таком же виде, как и при осесимметричной деформации, аналогично (4.86),

$$w^k = e^{-ks} (C_1 \cos ks + C_2 \sin ks).$$

Дуга s отсчитывается от рассматриваемого края ($ds = R_1 d\psi$, $\psi = \alpha$ — на нижнем крае и $\psi = \pi - \alpha$ — на верхнем крае).

Изгибающие моменты и усилия в зоне краевого эффекта

$$\begin{aligned} M_\alpha &= M_\alpha^k \cos \beta, \quad M_\beta = \mu M_\alpha^k \cos \beta, \quad Q_\alpha = Q_\alpha^k \cos \beta, \\ N_\alpha &= (N_\alpha^1 + N_\alpha^k) \cos \beta, \quad N_\beta = (N_\beta^1 + N_\alpha^k) \cos \beta, \\ N_{\alpha\beta} &= N_{\alpha\beta}^1 \sin \beta, \end{aligned} \quad (4.112)$$

где M_α^k , Q_α^k , N_α^k , N_β^k определяются по формулам (4.87).

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются совместно с константами A_1 , A_2 , входящими в безмоментное решение, из граничных условий на крае. При этом константы A_1 , A_2 определяются для оболочки в целом, а константы C_1 , C_2 — только на рассматриваемом крае. Всего на каждом крае должно быть задано четыре граничных условия, например, для u или N_α , v или $N_{\alpha\beta}$, w или Q_α , ϑ_α или M_α .

В качестве примера запишем граничные условия на краях оболочки, жестко закрепленной при $x = l$ и нагруженной при $x = 0$:

а) тангенциальной сдвигающей нагрузкой $q_0 \sin \beta$ и б) радиальной нагрузкой $q_0 \cos \beta$ (рис. 4.21). В обоих случаях эти нагрузки приводятся к одной и той же равнодействующей силе $Y_0 = \pi r_0 q_0$. Следовательно, вдали от края $x = 0$ напряженное состояние оболочки будут одинаковыми.

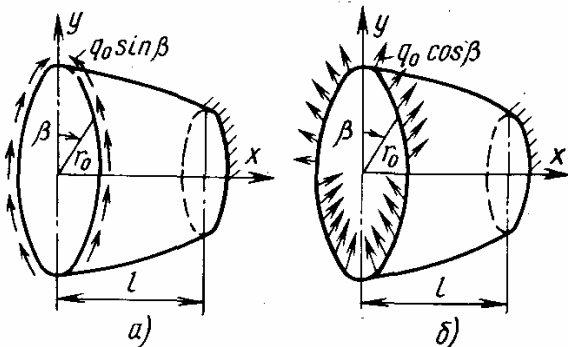


Рис. 4.21. Оболочка, нагруженная касательными (а) и радиальными (б) краевыми усилиями

Граничные условия на краях оболочки записываются в виде: при $x = l$: $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $\vartheta_\alpha = 0$; при $x = 0$ в случае (а): $N_\alpha = 0$, $N_{\alpha\beta} = q_0 \sin \beta$, $Q_\alpha = 0$, $M_\alpha = 0$ и в случае (б): $N_\alpha = -q_0 \cos \alpha_0 \cos \beta$, $N_{\alpha\beta} = 0$, $Q_\alpha = q_0 \sin \alpha_0 \cos \beta$, $M_\alpha = 0$.

В случае «а» напряженное состояние оболочки является безмоментным, за исключением зоны краевого эффекта вблизи закрепленного края $x = l$. В случае «б» возникает также изгибный краевой эффект вблизи края $x = 0$.

При формулировке условий сопряжения оболочек вращения с упругим шпангоутом или друг с другом так же, как и при осесимметричной деформации, вместо перемещений u , w удобнее рассматривать радиальное и осевое перемещения u_r и u_x , которые связаны с u и w формулами (4.53), (4.56). При этом вместо усилий N_α^k и Q_α^k вводится их равнодействующая — радиальное усилие T^k , которое наряду с моментом M_α выражается через перемещение и угол поворота на рассматриваемом крае оболочки по формулам (4.94), где $\bar{u}_r^0$ и $\bar{\vartheta}_\alpha^0$ при антисимметричной деформации заменяется на $\bar{u}_r^1$ и $\bar{\vartheta}_\alpha^1$.

4.6. ТЕОРИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

4.6.1. Основные гипотезы и исходные соотношения

Теория пологих оболочек является упрощенным вариантом общей теории оболочек, изложенной в разд. 4.1. *Пологой будем называть оболочку, на поверхности которой можно ввести некоторую систему криволинейных координат, такую, что расстояние между двумя точками и угол между двумя направлениями на поверхности можно приближенно отождествить с расстояниями между точками и углами между линиями, лежащими на некоторой плоскости.* Типичная форма пологой оболочки или искривленной панели показана на рис. 4.22, а. Криволинейный элемент $abcd$ поверхности такой оболочки в координатах x , y можно приближенно отождествить с его проекцией на плоскость $ABCD$, а криволинейные координаты x , y — с декартовыми координатами. Основное упрощение, вытекающее из этого предположения, заключается в том, что метрическое соотношение (4.1) $ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$ общей теории в координатах x , y можно

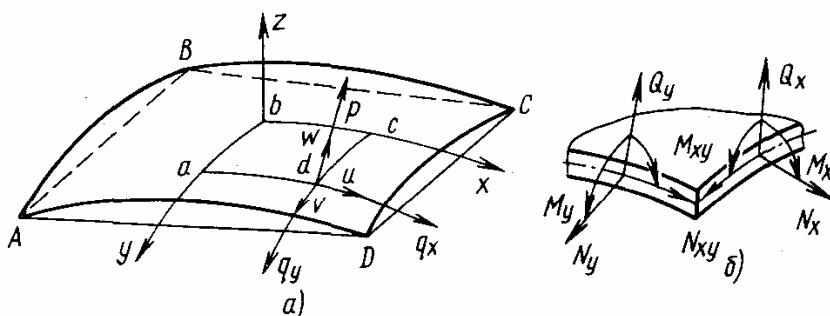


Рис. 4.22. Пологая оболочка (а) и действующие в ней усилия и моменты (б)

приближенно заменить следующим: $ds^2 = dx^2 + dy^2$, т. е. принять $A = B = 1$. Помимо этого, в теории пологих оболочек принимается, что при проектировании действующих на элемент сил на оси x и y можно в силу малой кривизны оболочки не учитывать составляющие от перерезывающих сил Q_x и Q_y (см. рис. 4.22, б), а в геометрических соотношениях, определяющих изменения кривизн, учитывать только нормальное перемещение w . В результате уравнения общей теории оболочек (4.17), (4.18), (4.16), (4.12), (4.13), (4.10) упрощаются следующим образом.

Уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + q_y = 0, \quad (4.113)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{N_x}{R_1} - \frac{N_y}{R_2} + p = 0, \quad (4.114)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (4.115)$$

Соотношения упругости сохраняются без изменения:

$$N_x = \bar{E}h(\epsilon_x^0 + \mu\epsilon_y^0), \quad N_y = \bar{E}h(\epsilon_y^0 + \mu\epsilon_x^0), \quad N_{xy} = \frac{h}{2} \bar{E}(1 - \mu)\gamma_{xy}, \quad (4.116)$$

$$M_x = D(\kappa_x + \mu\kappa_y), \quad M_y = D(\kappa_y + \mu\kappa_x), \quad M_{xy} = \frac{D}{2}(1 - \mu)\kappa_{xy}.$$

Геометрические соотношения записываются в форме

$$\epsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}, \quad \epsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4.117)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x}, \quad (4.118)$$

$$\text{где } \vartheta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \vartheta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (4.119)$$

Полученные уравнения отличаются от соответствующих уравнений теории пластин (3.20)—(3.22), (3.14)—(3.18) наличием членов N_x/R_1 , N_y/R_2 в уравнении (4.114) и членов w/R_1 , w/R_2 в соотношениях (4.117). Соответственно упрощаются и выражения для перерезывающих сил (4.19). Из (4.115) имеем

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (4.120)$$

Обобщенные перерезывающие силы согласно (4.26) имеют вид

$$Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y^* = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (4.121)$$

С учетом (4.121) граничные условия определяются равенствами (4.23) ... (4.25). Полученные уравнения в силу своей простоты по

сравнению с уравнениями общей теории широко применяются для решения самых разнообразных задач по расчету оболочек. Остановимся на некоторых приложениях.

4.6.2. Расчет пологих оболочек

Совокупность сделанных выше упрощений не приводит к существенным погрешностям при расчете пологих оболочек двойной кривизны (рис. 4.22), если выполняется неравенство

$$\frac{AB}{R_1 R_2} \ll 1. \quad (4.122)$$

Ввиду того, что построенная система уравнений является приближенной, при расчете пологих оболочек, как правило, не учитывается переменность радиусов кривизны R_1, R_2 . В частности, для оболочки, показанной на рис. 4.22, R_1 и R_2 можно считать постоянными и равными их значениям в вершине оболочки.

Система (4.113)—(4.119) может быть преобразована к трем уравнениям типа (4.20) относительно перемещений u, v, w . Исключая из уравнений (4.113) (4.114) Q_x и Q_y с помощью (4.120) и выражая в них далее усилия и моменты через перемещения согласно равенствам (4.116)—(4.119), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{1-\mu^2}{Eh} q_x, \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1} \right) \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{1-\mu^2}{Eh} q_y; \\ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{2\mu}{R_1 R_2} \right) w + \\ + \frac{h^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 w &= \frac{1-\mu^2}{Eh} p, \end{aligned} \quad (4.123)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Если на оболочку не действуют касательные поверхностные нагрузки, т. е. $q_x = q_y = 0$, система (4.113)—(4.119) может быть приведена к двум уравнениям.

Введем функцию напряжений φ так, как это было сделано в теории пластин (см. разд. 3.2.1):

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (4.124)$$

Тогда уравнения (4.113) (при $q_x = q_y = 0$) удовлетворяются тождественно, а уравнение (4.114) после исключения Q_x, Q_y и замены M_x, M_y, M_{xy} через w , а N_x, N_y — через φ с помощью (4.124) примет вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = p. \quad (4.125)$$

Используя выражения для деформаций $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ (4.117) и путем их дифференцирования исключая функции u и v , получим

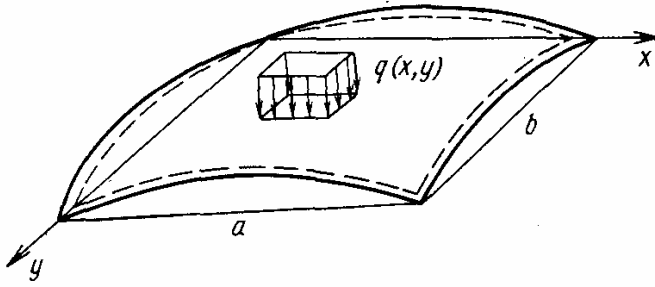


Рис. 4.23. Шарнирно опертая по краям пологая оболочка

уравнение совместности деформаций, аналогичное (3.32) в теории пластин,

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Заменяя ϵ_x^0 , ϵ_y^0 и γ_{xy}^0 через N_x , N_y , N_{xy} с по-

мощью (4.116) и вводя функцию напряжений φ по формулам (4.124), получим

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.126)$$

Таким образом, теория пологих оболочек сводится к двум уравнениям (4.125) и (4.126) относительно прогиба w и функции напряжений φ . Эти уравнения можно привести к одному уравнению относительно w . Действуя оператором $\nabla^2 \nabla^2$ на уравнение (4.125) и исключая $\nabla^2 \nabla^2 \varphi$ с помощью (4.126), можно записать одно уравнение восьмого порядка

$$D \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + Eh \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \nabla^2 \nabla^2 p. \quad (4.127)$$

Для шарнирно опертой по краям прямоугольной в плане полой оболочки (рис. 4.23) решение может быть построено путем разложения искомых функций в двойные тригонометрические ряды типа (3.79), использованные в разд. 3.3.2 для расчета шарнирно опертых прямоугольных пластин. Граничные условия (4.24) в рассматриваемом случае записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \text{ и } x = a \quad w = v = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \\ \text{при } y = 0 \text{ и } y = b \quad w = u = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Для того чтобы удовлетворить эти граничные условия, искомые функции w и φ достаточно представить рядами вида

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \varphi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (4.129)$$

где w_{mn} , φ_{mn} — постоянные коэффициенты разложений, которые и необходимо определить. Представляя внешнюю нагрузку $p(x, y)$ таким же рядом

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad (4.130)$$

где p_{mn} — известные коэффициенты (более подробный вывод изложен в разд. 3.3.2), и подставляя ряды (4.129), (4.130) в уравнения (4.125), (4.126), получим алгебраическую систему уравнений для определения w_{mn} и φ_{mn} :

$$\begin{aligned} D \left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right]^2 w_{mn} - \left[\frac{1}{R_1} \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + \frac{1}{R_2} \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right] \times \\ \times \varphi_{mn} = p_{mn}, \\ \frac{1}{Eh} \left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right]^2 \varphi_{mn} + \left[\frac{1}{R_1} \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{R_2} \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right] w_{mn} = 0. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Определяя из системы (4.131), например, w_{mn} для оболочки, показанной на рис. 4.23, окончательно получим

$$\begin{aligned} w(x, y) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}}{D \left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right]^4 + Eh \left[\frac{1}{R_1} \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + \frac{1}{R_2} \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2}. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Решение (4.132) может быть получено и в результате подстановки разложений для w и p (4.129) в уравнение (4.127). Ряд (4.132) сходится значительно медленнее соответствующего разложения (3.79) для пластины, так как первое слагаемое знаменателя, обеспечивающее его сходимость, содержит малый коэффициент D , пропорциональный h^3 .

В случае, когда граничные условия не соответствуют условиям шарнирного опирания (4.128), решение может быть получено методами, изложенными в разд. 3.3.2 применительно к расчету пластин. Значение полученных уравнений (4.123) или (4.125), (4.126) не исчерпывается возможностью расчета пологих оболочек. Теория пологих оболочек в силу простоты ее уравнений и достаточной точности в большинстве практических случаев находит также широкое применение при решении задач локальной деформации оболочек при действии сосредоточенных нагрузок и задач устойчивости оболочек, когда на ее поверхности образуются местные складки [12]. Основанием для этого является то, что на относительно малом участке поверхности оболочка практически всегда может считаться полой и соответствующее локальное напряженное состояние может быть описано полученными выше уравнениями.

4.6.3. Техническая теория цилиндрических оболочек

Для цилиндрической оболочки $R_1 \rightarrow \infty$ и левая часть неравенства (4.122) обращается в нуль. Как известно, цилиндрическая поверхность может быть развернута на плоскость и в координатах x и $y = R\beta$ (рис. 4.24), отсчитываемых вдоль образующей и параллели, метрическое соотношение (4.1) принимает вид $ds^2 = dx^2 + dy^2$, т. е. основное допущение теории пологих оболочек ($A = B = 1$) для цилиндрических оболочек выполняется точно. Что касается двух других допущений, связанных с отсутствием перерезывающих сил в уравнениях (4.113) и тангенциальных перемещений в соотношениях (4.119), то их введение определяет упрощенную, так называемую техническую теорию цилиндрических оболочек, использующуюся для решения широкого круга задач.

В рамках технической теории цилиндрические оболочки описываются уравнениями (4.123) или (4.125), (4.126), в которых следует принять $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R$ (см. рис. 4.24). Если по краям оболочка шарнирно оперта, решение так же, как и в разд. 4.6.2, может быть построено в двойных тригонометрических рядах.

В качестве примера рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку радиуса R , шарнирно опертую на краях $x = 0$ и $x = l$. Граничные условия на этих краях имеют вид

$$N_x = 0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \right); \quad v = 0; \quad w = 0; \quad M_x = 0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \right). \quad (4.133)$$

Пусть на оболочку действует нормальное давление $p(x, \beta)$, распределенное симметрично относительно радиальной плоскости $\beta = 0$, а тангенциальные нагрузки отсутствуют ($q_x = q_y = 0$)

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n y}{R}. \quad (4.134)$$

Подставляя разложения u , v , w и p в уравнения (4.123) и приравнявая по отдельности члены левых и правых частей уравнений, содержащие одинаковые тригонометрические функции, для каждой тройки неизвестных коэффициентов u_{mn} , v_{mn} , w_{mn} получим по три линейных алгебраических уравнения:

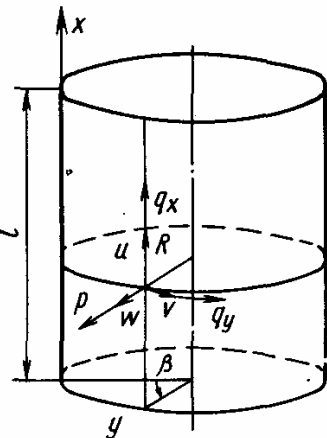


Рис. 4.24. Цилиндрическая оболочка

$$\begin{aligned} & - \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] u_{mn} + \\ & + \frac{1+\mu}{2} \frac{m\pi}{l} \frac{n}{R} v_{mn} + \frac{\mu}{R} \frac{m\pi}{l} w_{mn} = 0, \\ & \frac{1+\mu}{2} \frac{m\pi}{l} \frac{n}{R} u_{mn} - \left[\left(\frac{n}{R} \right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right] v_{mn} + \frac{1}{R} \frac{n}{R} w_{mn} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\mu}{R} \frac{m\pi}{l} u_{mn} + \frac{1}{R} \frac{n}{R} v_{mn} + \frac{1}{R^2} w_{mn} + \frac{h^2}{12} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 w_{mn} = \frac{1-\mu^2}{Eh} p_{mn}.$$

Решая эти уравнения, можно найти u_{mn} , v_{mn} , w_{mn} в зависимости от коэффициентов разложения нагрузки p_{mn} .

Аналогичным образом решаются и уравнения (4.125), (4.126). В результате получается система типа (4.131), из которой находятся w_{mn} и φ_{mn} .

4.7. ПОЛУБЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

4.7.1. Основные гипотезы и исходные соотношения

Цилиндрическая оболочка является распространенным элементом конструкций самого разнообразного назначения и методы расчета цилиндрических оболочек разработаны наиболее полно. Уравнения теории цилиндрических оболочек могут быть получены из уравнений общей теории оболочек, приведенных в разд. 4.1, если принять $A = B = 1$, $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R$. Путем введения некоторых упрощающих предположений в разд. 4.6 были получены уравнения технической теории цилиндрических оболочек. Для иллюстрации необходимости дальнейших упрощений запишем уравнение типа (4.127) для цилиндрической оболочки, на которую не действуют поверхностные нагрузки, т. е. $q_x = q_y = p = 0$ (см. рис. 4.24). При $R_1 \rightarrow \infty$ и $R_2 = R$ уравнение (4.127) принимает вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \quad (4.135)$$

В случае шарнирного опирания по краям решение этого уравнения может быть получено в виде двойного тригонометрического ряда типа (4.132). Для других граничных условий решение (4.135) в силу его периодичности по окружной координате y может быть представлено, например, в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \cos \frac{ny}{R}. \quad (4.136)$$

Подставляя (4.136) в (4.135) и приравнявая нулю коэффициенты при $\cos(ny/R)$, получим для (w_n/y) обыкновенное дифференциальное уравнение восьмого порядка

$$w_n^{VIII} - 4 \frac{n^2}{R^2} w_n^{VI} + \left(6 \frac{n^4}{R^4} + \frac{Eh}{R^2 D} \right) w_n^{IV} - \frac{n^6}{R^6} w_n'' + \frac{n^8}{R^8} w_n = 0. \quad (4.137)$$

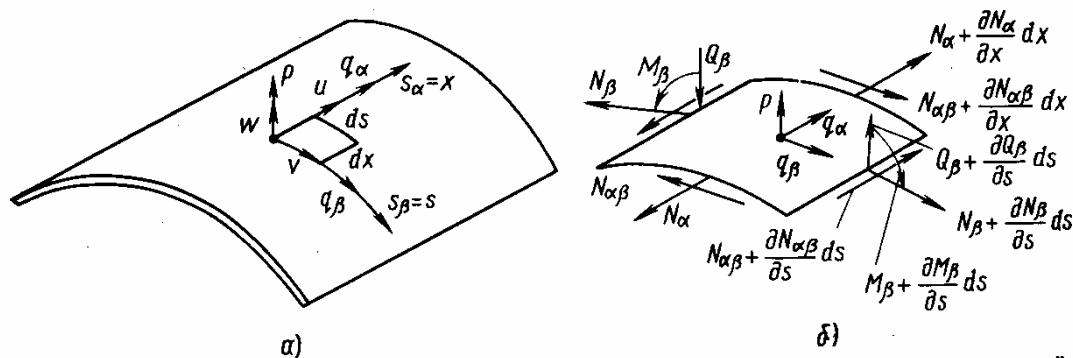


Рис. 4.25. Полубезмоментная модель оболочки (а) и действующие в ней усилия и моменты (б)

В принципе решение уравнения (4.137)

$$w_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_{ni} F_{ni}(x),$$

содержащее восемь произвольных постоянных C_{in} для каждого n , позволяет удовлетворить любые граничные условия на краях $x = 0$ и $x = l$ (см. рис. 4.24). Однако практическое определение частных решений $F_{ni}(x)$ уравнения восьмого порядка связано с большими трудностями, что и вызывает потребность в дальнейшем упрощении теории для снижения порядка уравнения (4.137).

Именно такой упрощенной теорией и является рассматриваемая ниже полубезмоментная теория цилиндрических оболочек, широко используемая при решении конкретных задач [9, 11, 13], в частности, для расчета цилиндрических оболочек средней длины, нагруженных таким образом, что их деформированное состояние меняется медленно в продольном направлении. В этой теории наряду с гипотезами Кирхгофа используются дополнительные упрощающие статические и кинематические допущения. Если через $s_\alpha = x$ и $s_\beta = s$ обозначить координаты точки срединной поверхности оболочки, отсчитываемые в продольном и поперечном направлениях (рис. 4.25, а), то допущения полубезмоментной теории можно записать в виде

$$\epsilon_\beta^0 = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R_2} = 0, \quad \gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (4.138)$$

$$M_\alpha \approx 0, \quad Q_\alpha \approx 0, \quad M_{\alpha\beta} \approx 0.$$

Согласно (4.138) в продольном направлении оболочка ведет себя как безмоментная, а в кольцевом — как система нерастяжимых рам. Полубезмоментная теория особенно эффективна для расчета оболочек, подкрепленных системой часто расположенных шпангоутов, которые «размазываются» по длине оболочки, создавая высокую изгибную жесткость в кольцевом направлении.

Три компоненты перемещения u , v , w связаны между собой двумя кинематическими условиями (4.138), и поэтому при любой

форме направляющей они могут быть представлены через одну разрешающую функцию $\Phi(x, s)$:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad w = R_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}. \quad (4.139)$$

Справедливость представления (4.139) может быть проверена непосредственной подстановкой в (4.138).

Усилие N_α и изгибающий момент M_β определяются по закону Гука:

$$N_\alpha = E_\alpha h \varepsilon_\alpha^0 = E_\alpha h \frac{\partial u}{\partial x} = E_\alpha h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad (4.140)$$

$$M_\beta \approx D_\beta \kappa_\beta = D_\beta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{R_2} - \frac{\partial w}{\partial s} \right) = -D_\beta \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + R_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^4} \right).$$

Здесь в силу сделанного выше замечания о возможности применения полубезмоментной теории для расчета оболочек, подкрепленных шпангоутами, введены различные обозначения для жесткостей $E_\alpha h$ и D_β . При этом в полубезмоментной теории влиянием коэффициента Пуассона пренебрегают, полагая $\mu = 0$. Сдвигающее усилие (поток касательных напряжений) в срединной поверхности оболочки определяется из уравнения равновесия в продольном направлении (см. рис. 4.25, б) с учетом (4.140):

$$\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial s} = -\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} - q_\alpha = -E_\alpha h \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} - q_\alpha. \quad (4.141)$$

Уравнение для неизвестной функции Φ можно получить рассматривая равновесие элемента, показанного на рис. 4.25, б или с помощью вариационного принципа Лагранжа (см. разд. 1.3). Ниже будет реализован второй способ. Потенциальная энергия деформации полубезмоментной оболочки (4.27) с учетом (4.138), (4.140) будет иметь вид

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iint [N_\alpha \varepsilon_\alpha^0 + M_\beta \kappa_\beta] dx ds = \\ &= \frac{1}{2} \iint \left[E_\alpha h \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 + D_\beta \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + R_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^4} \right)^2 \right] dx ds. \end{aligned} \quad (4.142)$$

Вариация работы поверхностных нагрузок определяется равенством (4.28), т. е.

$$\begin{aligned} \delta A &= \iint [q_\alpha \delta u + q_\beta \delta v + p \delta w] dx ds = \\ &= \iint \left[q_\alpha \frac{\partial (\delta \Phi)}{\partial x} - q_\beta \frac{\partial (\delta \Phi)}{\partial s} + p R_2 \frac{\partial^2 (\delta \Phi)}{\partial s^2} \right] dx ds. \end{aligned} \quad (4.143)$$

Подставляя полученные выражения в уравнение $\delta U - \delta A = 0$ и преобразуя его интегрированием по частям таким образом, чтобы под поверхностным интегралом в качестве общего множителя была вариация $\delta \Phi$, получим дифференциальное уравнение для функции Φ и естественные граничные условия.

4.7.2. Круговая цилиндрическая оболочка

Рассмотрим прямую замкнутую круговую цилиндрическую оболочку, для которой $R_2 = R = \text{const}$ и $x = R\alpha$, $s = R\beta$ (см. рис. 4.24). После интегрирования по частям интегралов по α и β с учетом периодичности Φ и ее производных в окружном направлении получим

$$\begin{aligned} \delta U - \delta A = & \int_0^l \oint_{2\pi} \left[\frac{E_{\alpha} h}{R^4} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{D_{\beta}}{R^6} \left(\frac{\partial^8 \Phi}{\partial \beta^8} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial q_{\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{\partial q_{\beta}}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 p}{\partial \beta^2} \right) \right] (\delta \Phi) R^2 d\alpha d\beta + \\ & + \oint_{2\pi} \left\{ \left[\frac{E_{\alpha} h}{R^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3} \frac{\partial (\delta \Phi)}{\partial \alpha} - \left(\frac{E_{\alpha} h}{R^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3} + q_{\alpha} \right) \delta \Phi \right]_{\alpha=0}^{\alpha=l} \right\} d\beta = 0, \end{aligned} \quad (4.144)$$

где $l = l/R$, l — длина оболочки.

Отсюда следует дифференциальное уравнение для функции Φ , которое запишем в виде

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{D_{\beta}}{R^2 E_{\alpha} h} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 \Phi = \frac{R^3 q}{E_{\alpha} h}, \quad (4.145)$$

где $q = \frac{\partial^2 p}{\partial \beta^2} + \frac{\partial q_{\beta}}{\partial \beta} - \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial \alpha}$.

На торцах полубезмоментной оболочки граничные условия формулируются так же, как и для безмоментной оболочки — на каждом торце должны быть заданы или тангенциальные перемещения, или соответствующие им тангенциальные усилия, т. е. u или N_{α} , v или $N_{\alpha\beta}$. Аналогичный результат следует и из вариационного уравнения (4.144). Контурный интеграл в (4.144) представляет вариацию работы реакций на торцах; он с учетом (4.139) ... (4.141) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} & \oint \left\{ \left[N_{\alpha} \delta u + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{R \partial \beta} \delta \Phi \right]_{\alpha=0}^{\alpha=l} \right\} R d\beta = \\ & = \oint \left\{ \left[N_{\alpha} \delta u + N_{\alpha\beta} \delta v \right]_{\alpha=0}^{\alpha=l} \right\} R d\beta. \end{aligned}$$

Чтобы этот интеграл обращался в нуль, на каждом торце должны быть заданы перемещения (тогда $\delta u = 0$, $\delta v = 0$) или должны быть равны нулю соответствующие им усилия $N_{\alpha} = 0$, $N_{\alpha\beta} = 0$. Поверхностные нагрузки, действующие на круговую цилиндрическую оболочку, могут быть представлены в форме тригонометрического ряда по окружной координате β . Например, при нагрузках,

симметричных относительно образующей $\beta = 0$, правая часть уравнения (4.145) может быть записана в виде ряда

$$\frac{R^3}{E_\alpha h} q(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha) \cos n\beta. \quad (4.146)$$

Разрешающая функция $\Phi(\alpha, \beta)$ в этом случае находится в виде ряда

$$\Phi = \sum_n \Phi_n(\alpha) \cos n\beta, \quad (4.147)$$

где $\Phi_n(\alpha)$ — неизвестные функции.

В силу ортогональности тригонометрических функций решение распадается на отдельные составляющие. При этом в случае $n = 0$, представляющем осесимметричное напряженно-деформированное состояние, полубезмоментная теория неприменима (так как $\epsilon_\beta = 0$) и это состояние рассчитывается отдельно по безмоментной теории с учетом краевых эффектов. Для первой гармоники ($n = 1$), представляющей изгиб оболочки как балки, полубезмоментная теория не учитывает сдвиг ($\gamma_{\alpha\beta} = 0$), и поэтому более точное решение можно получить на основе общей безмоментной теории (здесь также можно учесть краевые эффекты изгиба).

Подставляя разложения (4.146), (4.147) в уравнение (4.145), получим для каждой гармоники ($n = 2, 3, \dots$) обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 \Phi_n}{d\alpha^4} + 4k_n^4 \Phi_n = f_n(\alpha), \quad (4.148)$$

где $4k_n^4 = \frac{D_\beta}{R^2 E_\alpha h} n^4 (n^2 - 1)^2$.

Уравнение (4.148) в отличие от уравнения (4.137) имеет уже четвертый порядок и по виду совпадает с уравнением осесимметричного краевого эффекта. Его решение можно записать в форме, аналогичной (4.41),

$$\begin{aligned} \Phi_n = & e^{-k_n \alpha} (C_1 \cos k_n \alpha + C_2 \sin k_n \alpha) + \\ & + e^{k_n \alpha} (C_3 \cos k_n \alpha + C_4 \sin k_n \alpha) + \Phi_n^0(\alpha), \end{aligned} \quad (4.149)$$

где $\Phi_n^0(\alpha)$ — частное решение неоднородного уравнения.

Параметр k_n в случае гладкой оболочки ($E_\alpha = E$, $D_\beta = Eh^3/12$) пропорционален величине $\sqrt{h/R}$ и при небольших значениях n является достаточно малым. Вследствие этого деформированное состояние тонкой оболочки при малых n меняется вдоль образующей медленно. В этом случае удобнее решение записать через функции А. Н. Крылова:

$$\begin{aligned} \Phi_n = & A_1 K_1(k_n \alpha) + A_2 K_2(k_n \alpha) + A_3 K_3(k_n \alpha) + \\ & + A_4 K_4(k_n \alpha) + \Phi_n^0(\alpha). \end{aligned} \quad (4.150)$$

Функции А. Н. Крылова имеют вид [11]:

$$\begin{aligned} K_1(x) &= \operatorname{ch} x \cos x, \quad K_2(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} x \sin x + \operatorname{sh} x \cos x), \\ K_3(x) &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} x \sin x, \quad K_4(x) = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x). \end{aligned} \quad (4.151)$$

Они делятся на симметричные (K_1 и K_3) и антисимметричные (K_2 и K_4) относительно $x = 0$ и их производные выражаются через эти же функции в виде: $K_1'(x) = -4K_4(x)$, $K_2'(x) = K_1(x)$, $K_3'(x) = K_2(x)$, $K_4'(x) = K_3(x)$.

Произвольные постоянные C_i в (4.149) или A_i в (4.150) определяются из четырех граничных условий на торцах оболочки. В случае необходимости решение, полученное по полубезмоментной теории, при не слишком больших n может быть дополнено решением в виде осесимметричного краевого эффекта.

Полубезмоментная теория применима для расчета деформаций, медленно изменяющихся вдоль образующей; для гладкой оболочки это ограничение определяется неравенством $1 < n < \sqrt{R/h}$ [10].

ГЛАВА 5

РАСЧЕТ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПО БАЛОЧНОЙ ТЕОРИИ

5.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ГИПОТЕЗЫ

При создании летательных аппаратов широкое применение получили тонкостенные конструкции, обеспечивающие сочетание высокой прочности и жесткости при относительно небольшой массе и представляющие собой удлиненные оболочки цилиндрической и конической формы типа крыла, фюзеляжа или корпуса летательного аппарата с произвольным контуром поперечного сечения (рис. 5.1). В большинстве случаев обшивка 1 подкрепляется продольным силовым набором (стрингерами 3, поясами лонжеронов 2). Жесткость контура поперечного сечения оболочки в своей плоскости обеспечивается поперечным набором (нервюрами 4, шпангоутами).

Введем срединную поверхность, т. е. поверхность, делящую толщину оболочки пополам. *Кривая, которая получается при пересечении срединной поверхности плоскостью, перпендикулярной к продольной оси оболочки, называется контуром поперечного сечения.* Положение любой точки M оболочки характеризуется криволинейной координатой s , отсчитываемой по контуру поперечного сечения от некоторой начальной образующей, и продольной координатой z (см. рис. 5.1).

В зависимости от типа сечения оболочки разделяются на системы с открытым (рис. 5.2, а), замкнутым (см. рис. 5.2, б) или многократно замкнутым — многозамкнутым (см. рис. 5.2, в) контуром поперечного сечения.

В настоящей главе рассматривается балочная теория подкрепленных оболочек. Предполагается, что оболочки воспринимают изгибающие моменты, поперечные силы и крутящие моменты, работая как тонкостенные балки. Такая расчетная модель, часто называемая балочной, справедлива для удлиненных оболочек регулярной конструкции, т. е. для оболочек, размер которых вдоль оси z значительно больше размеров поперечного сечения, причем отсутствуют вырезы и резкое изменение жесткости обшивки и подкрепляющих элементов по координате z . Балочная теория оболочек основана на следующих гипотезах, совокупность которых позволяет достаточно просто рассчитывать весьма сложные пространственные конструкции:

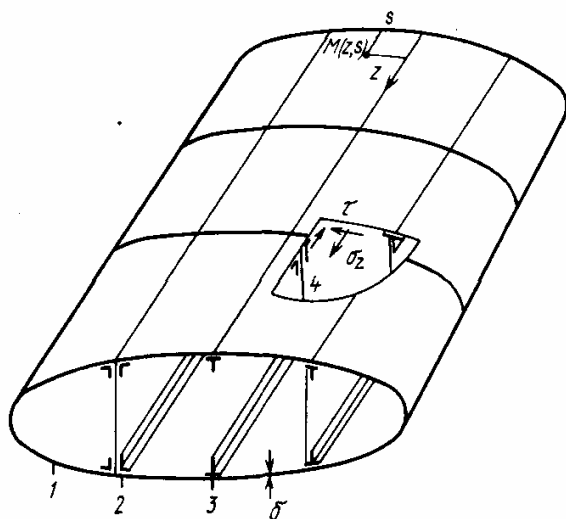


Рис. 5.1. Подкрепленная оболочка

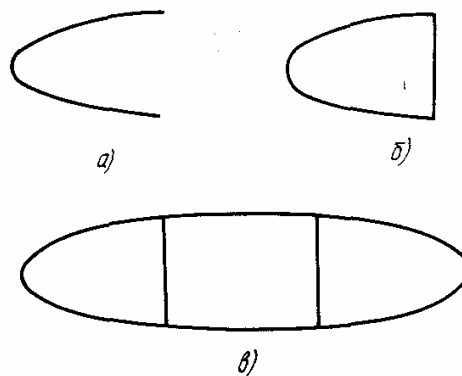


Рис. 5.2. Открытый (а), однозамкнутый (б) и многозамкнутый (в) контур поперечного сечения

1. Контур поперечного сечения оболочки $z = \text{const}$ считается недеформируемым в своей плоскости, т. е. $\epsilon_s = 0$. Это предположение обусловлено тем, что в конструкциях рассматриваемого класса (крыло большого удлинения или корпус летательного аппарата), как правило, имеется система часто расположенных поперечных подкрепляющих элементов (нервюр или шпангоутов).

2. Предполагается, что относительные удлинения по оси z в любом сечении оболочки распределяются по закону плоскости. Вводя в плоскости сечения координаты x и y (рис. 5.3), получим

$$\epsilon_z = ax + by + c, \quad (5.1)$$

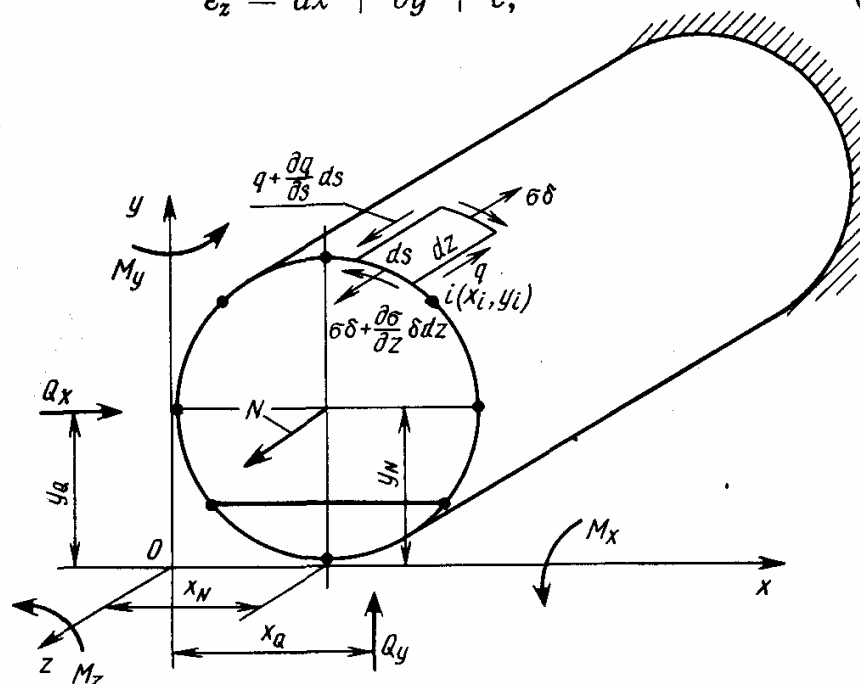


Рис. 5.3. Усилия, моменты и напряжения, действующие в сечении оболочки

где a, b, c — некоторые функции переменной z . В сечении $z = \text{const}$ (5.1) является уравнением плоскости. Соотношение (5.1) аналогично закону плоских сечений теории изгиба балок, однако, поскольку оно записывается для относительных деформаций, в балочной теории подкрепленных оболочек сечения не обязательно остаются плоскими. Действительно, интегрируя геометрическое соотношение $\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ с учетом (5.1), получим следующее распределение осевых перемещений:

$$u_z = x \int a dz + y \int b dz + \int c dz + f(x, y). \quad (5.2)$$

Первые три слагаемых в (5.2) соответствуют закону плоских сечений, а последнее (произвольная функция интегрирования) определяет постоянное по оси z отклонение сечения от плоскости (депланацию сечения). Нормальные напряжения σ_z с учетом того, что $\epsilon_z = 0$, определяются законом Гука в форме

$$\sigma_z = E\epsilon_z = E(ax + by + c) \quad (5.3)$$

и, если модули упругости обшивки и подкрепляющих элементов одинаковы, распределяются в сечении по закону плоскости. Функция $f(x, y)$ не влияет на нормальные напряжения, т. е. имеет место свободная депланация сечения оболочки. Отметим, что в ряде случаев депланация сечения (если она имеет место при свободном изгибе или кручении незакрепленной оболочки) ограничивается условиями закрепления края $z = \text{const}$. В этих случаях в окрестности закрепленного края возникают дополнительные нормальные напряжения σ_z . Эти напряжения, естественно, не могут быть выявлены в результате расчета по балочной теории. Для их определения необходима более общая расчетная модель оболочки, которая будет описана в следующей главе.

3. Ввиду малой толщины δ оболочка считается безмоментной, т. е. предполагается, что нормальные σ_z и касательные τ напряжения (см. рис. 5.1) по толщине обшивки и стенок распределяются равномерно. При этом удобно ввести поток касательных сил

$$q = \tau\delta. \quad (5.4)$$

Размеры сечений продольных элементов считаются малыми по сравнению с размерами сечения оболочки. Предполагается, что элементы подкрепления (стрингеры, пояса лонжеронов) воспринимают только нормальные напряжения σ_z , которые равномерно распределены по сечению элемента.

4. Предполагается, что действующие на оболочку нагрузки в каждом сечении $z = \text{const}$ сводятся к изгибающим моментам $M_x(z)$, $M_y(z)$, крутящему моменту $M_z(z)$, осевой силе — $N(z)$ и поперечным силам $Q_x(z)$, $Q_y(z)$ (см. рис. 5.3). Эти нагрузки могут быть найдены в результате анализа оболочки как консольно закрепленной балки. Например, для крыла, показанного на

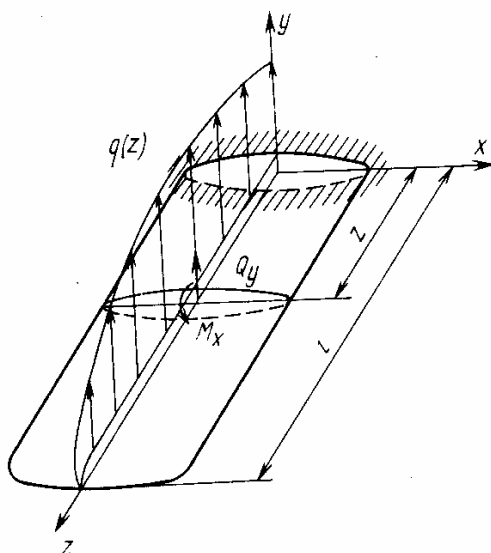


Рис. 5.4. К определению поперечной силы и изгибающего момента в сечениях оболочки типа крыла

рис. 5.4, поперечная сила и момент, передающиеся на сечение z от мысленно отделенной этим сечением части консоли, имеют вид

$$Q_y = \int_z^l q(z) dz, \quad M_x = - \int_z^l q(z) z dz.$$

Положительными считаются моменты, действующие против часовой стрелки, если смотреть с конца соответствующей оси; положительные усилия совпадают с направлениями соответствующих координатных осей (см. рис. 5.3). Методы определения моментов и сил, действующих в сечениях, и соотношения, связывающие их с аэродинамическими и другими

характеристиками летательных аппаратов, рассматриваются в курсах прочности летательных аппаратов [32, 25, 5].

Поскольку оболочка рассматривается как балка, действующие в сечении изгибающие моменты и поперечные силы связаны известными соотношениями сопротивления материалов, которые для принятого правила знаков имеют вид

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y, \quad \frac{dM_y}{dz} = -Q_x. \quad (5.5)$$

5. Напряжения в конструкции определяются законом Гука, т. е. не превосходят предела пропорциональности; считается, что стенки и обшивка не теряют устойчивости (см. гл. 9). Отметим, что расчет оболочек по балочной теории может проводиться при напряжениях, превышающих предел пропорциональности, и после потери устойчивости стенок и обшивки. В этих случаях расчет осуществляется методом последовательных приближений и рассматривается в курсах прочности летательных аппаратов [32, 29] (см. также гл. 9, 11).

5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

5.2.1. Редуцирование сечения по материалу

В случае, когда все элементы оболочки изготовлены из одного материала с модулем упругости E , напряжения σ_z распределяются по сечению по закону плоскости в соответствии с равенством (5.3). Однако реальные тонкостенные конструкции часто выполняются из различных материалов. В таких оболочках при расчете все элементы обычно приводятся к одному материалу,

т. е. осуществляется операция редуцирования сечения по материалу. Естественно, что такое редуцированное сечение должно быть эквивалентно действительному. Пусть в i -й точке сечения с координатами x_i, y_i (5.3) находится элемент набора с площадью сечения F_i , модулем упругости E_i или элемент обшивки с площадью $dF_i = \delta_i ds$ (δ — толщина обшивки) и модулем упругости E_i . Заменим истинный элемент фиктивным (редуцированным) с площадью сечения F_{ip} или $dF_{ip} = \delta_{ip} ds$ и модулем упругости E_p , одинаковым для всех элементов. Очевидно, для эквивалентной замены необходимо, чтобы, во-первых, усилия в действительном и редуцированном элементах должны быть равны

$$\sigma_i F_i = \sigma_{ip} F_{ip}, \quad \sigma_i \delta_i ds = \sigma_{ip} \delta_{ip} ds, \quad (5.6)$$

где σ_i и σ_{ip} — напряжения соответственно в действительном и редуцированном элементах, а во-вторых, деформации истинного и редуцированного элемента должны быть одинаковы, т. е.

$$\frac{\sigma_i}{E_i} = \frac{\sigma_{ip}}{E_p}. \quad (5.7)$$

Введем редукционный коэффициент, учитывающий различие материалов действительного и редуцированного элементов сечения, иначе, редукционный коэффициент по материалу

$$\varphi_i = \frac{E_i}{E_p}. \quad (5.8)$$

Тогда согласно равенству (5.7)

$$\sigma_i = \varphi_i \sigma_{ip} \quad (5.9)$$

и из соотношений (5.6) найдем

$$F_{ip} = \varphi_i F_i, \quad \delta_{ip} = \varphi_i \delta_i. \quad (5.10)$$

Таким образом, для приведения сечения к одному материалу следует площади сечений элементов и толщину обшивки изменить пропорционально отношению модулей упругости действительного и фиктивного материалов.

Поскольку все элементы редуцированного сечения имеют одинаковый модуль упругости E_p , напряжение в точке i определяется равенством (5.3)

$$\sigma_{ip} = E_p (ax_i + by_i + c). \quad (5.11)$$

Истинные напряжения в соответствии с (5.9) и (5.11) имеют вид

$$\sigma_i = \varphi_i (Ax_i + By_i + C), \quad (5.12)$$

где $A = E_p a$, $B = E_p b$, $C = E_p c$.

В качестве материала приведения может быть выбран материал любого элемента оболочки или некоторый гипотетический материал. Часто материал стрингеров приводится к материалу обшивки. Если соответствующие модули упругости обозначить через E_c и E_0 , то для точек обшивки $\varphi_i = 1$, а для стрингеров $\varphi_i =$

$= E_c/E_0$. При $E_c > E_0$ напряжения в стрингерах будут согласно (5.12) в E_c/E_0 раз больше, чем в прилегающих элементах обшивки, т. е. в сечении, включающем элементы из разных материалов, распределение напряжений не будет соответствовать закону плоскости.

5.2.2. Вывод формулы для нормальных напряжений

Найдем коэффициенты A, B, C , входящие в равенство (5.12). Поскольку распределение напряжений (5.12) в сечении $z = \text{const}$ оболочки должно быть статически эквивалентным действующим в этом сечении моментам M_x, M_y и осевой силе N (рис. 5.3), получим

$$\oint \sigma y \delta ds + \sum_j \sigma_j F_j y_j = M_x + N y_N,$$

$$\oint \sigma x \delta ds + \sum_j \sigma_j F_j x_j = -M_y + N x_N, \quad (5.13)$$

$$\oint \sigma \delta ds + \sum_j \sigma_j F_j = N.$$

Здесь, как и ранее, δ — толщина обшивки; F_j — площадь сечения j -го продольного элемента. Первые слагаемые в левых частях равенств (5.13) соответствуют моментам и силе от напряжений в обшивке (суммирование по элементам обшивки заменено интегрированием по контуру), а вторые — моментам и силе от напряжений σ_j в подкрепляющих элементах с координатами сечений x_j, y_j . Отметим, что (x, y) — произвольная система декартовых координат, заданная в сечении.

Подставляя (5.12) в (5.13), получим

$$A I_{xy} + B I_x + C S_x = M_x + N y_N,$$

$$A I_y + B I_{xy} + C S_y = -M_y + N x_N, \quad (5.14)$$

$$A S_y + B S_x + C F = N,$$

где $I_{xy} = \oint x y \delta ds + \sum_j \varphi_j F_j x_j y_j$,

$$I_x = \oint \varphi y^2 \delta ds + \sum_j \varphi_j F_j y_j^2, \quad (5.15)$$

$I_y = \oint \varphi x^2 \delta ds + \sum_j \varphi_j F_j x_j^2$ — центробежный и осевые моменты инерции редуцированного сечения в координатах x, y ;

$$\begin{aligned} S_x &= \oint \varphi y \delta ds + \sum_j \varphi_j F_j y_j, \\ S_y &= \oint \varphi x \delta ds + \sum_j \varphi_j F_j x_j, \\ F &= \oint \varphi \delta ds + \sum_j \varphi_j F_j \end{aligned} \quad (5.16)$$

— статические моменты и площадь редуцированного сечения.

Три уравнения (5.14) включают три неизвестных A, B, C . Равенство числа неизвестных коэффициентов имеющимся уравнениям статики указывает на статическую определенность задачи определения нормальных напряжений в тонкостенных конструкциях. Найдем A, B и C из полученных уравнений. Из последнего уравнения системы (5.14) имеем

$$C = \frac{N}{F} - Ax_0 - By_0.$$

Здесь

$$x_0 = \frac{S_y}{F}, \quad y_0 = \frac{S_x}{F} \quad (5.17)$$

— координаты центра тяжести редуцированного сечения.

Представляя коэффициент C в первые два уравнения системы (5.14), после преобразований получим

$$\begin{aligned} AI_{0xy} + BI_{0x} &= M_{0x}, \\ AI_{0y} + BI_{0xy} &= -M_{0y}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

В этих уравнениях обозначено

$$\begin{aligned} I_{0x} &= I_x - y_0^2 F, \\ I_{0y} &= I_y - x_0^2 F, \\ I_{0xy} &= I_{xy} - x_0 y_0 F \end{aligned} \quad (5.19)$$

— осевые I_{0x}, I_{0y} и центробежный I_{0xy} моменты инерции редуцированного сечения оболочки относительно центральных осей, параллельных первоначально выбранным осям x и y ;

$$\begin{aligned} M_{0x} &= M_x + N(y_N - y_0), \\ M_{0y} &= M_y - N(x_N - x_0) \end{aligned} \quad (5.20)$$

— изгибающие моменты от действующих внешних нагрузок, включающие моменты от продольных сил относительно центральных осей, параллельных исходным.

Решая уравнения (5.18), найдем

$$A = \frac{1}{1 - \frac{I_{0xy}^2}{I_{0x}I_{0y}}} \left(-\frac{M_{0y}}{I_{0y}} - \frac{M_{0x}}{I_{0x}} \frac{I_{0xy}}{I_{0y}} \right),$$

$$B = \frac{1}{1 - \frac{I_{0xy}^2}{I_{0x}I_{0y}}} \left(\frac{M_{0x}}{I_{0x}} + \frac{M_{0y}}{I_{0y}} \frac{I_{0xy}}{I_{0x}} \right).$$

Подставляя коэффициенты A , B и C в выражение (5.12), получим нормальные напряжения для i -й точки сечения тонкостенной системы

$$\sigma_i = \varphi_i \left[k \left(\frac{M_{0x}}{I_{0x}} \tilde{y}_i - \frac{M_{0y}}{I_{0y}} \tilde{x}_i \right) + \frac{N}{F} \right]. \quad (5.21)$$

Здесь

$$k = \frac{1}{1 - \frac{I_{0xy}^2}{I_{0x}I_{0y}}} \quad (5.22)$$

— коэффициент несимметрии сечения оболочки;

$$\tilde{x}_i = x_i - x_0 - (y_i - y_0) \frac{I_{0xy}}{I_{0x}},$$

$$\tilde{y}_i = y_i - y_0 - (x_i - x_0) \frac{I_{0xy}}{I_{0y}} \quad (5.23)$$

— обобщенные координаты i -й точки сечения оболочки.

Отметим, что нормальные напряжения (5.21) получены для произвольно выбранной системы координат. Если сечение имеет ось симметрии, например ось y , которая проходит через центр тяжести, то

$$x_0 = 0, y_0 \neq 0, I_{0xy} = I_{xy} = 0, k = 1, \tilde{x}_i = x_i,$$

$$\tilde{y}_i = y_i - y_0, I_{0x} = I_x - y_0^2 F, I_{0y} = I,$$

$$M_{0x} = M_x + N(y_N - y_0), M_{0y} = M_y - Nx_N.$$

Для сечения с двумя осями симметрии, являющимися одновременно центральными

$$x_0 = y_0 = 0, I_{0xy} = I_{xy} = 0, k = 1, \tilde{x}_i = x_i, \tilde{y}_i = y_i,$$

$$I_{0x} = I_x, I_{0y} = I_y, M_{0x} = M_x + Ny_N,$$

$$M_{0y} = M_y - Nx_N.$$

В заключение сделаем некоторые замечания. Чем больше число и площади поперечных сечений продольных элементов, тем значительнее роль их по сравнению с обшивкой в передаче нормальных напряжений от изгибающих моментов и продольной силы. Поэтому в отдельных конструкциях, особенно с тонкими обшивками, продольные пояса являются основными элементами, пере-

дающими моменты M_x , M_y и силу N . В таких системах допускается, что обшивки совсем не воспринимают нормальные напряжения и работают только на сдвиг. Обшивка, не воспринимающая нормальные напряжения, естественно, не учитывается при вычислении моментов инерции, обобщенных статических моментов и других геометрических характеристик оболочки. В этом случае нужно учесть только сосредоточенные элементы — пояса лонжеронов, стрингеры или внеинтегральные члены в формулах (5.15), (5.16).

Работу обшивки значительной толщины на нормальные напряжения можно учесть путем приведения ее к продольным элементам. В этом случае при вычислении нормальных напряжений сечение оболочки заменяется системой сосредоточенных площадей, включающих площади сечений продольных элементов с присоединенной обшивкой.

Применяется и другая расчетная схема, при которой работающая на нормальные напряжения обшивка не приводится к подкрепляющим элементам, а стрингеры равномерно распределяются по контуру сечения и в результате получается гладкая оболочка. При этом следует иметь в виду, что при определении нормальных напряжений учитывается приведенная толщина обшивки, а при вычислении касательных напряжений — только действительная толщина, так как стрингеры воспринимают только нормальные напряжения.

Обе описанные расчетные модели широко используются в практических расчетах конструкций летательных аппаратов.

5.2.3. Примеры определения нормальных напряжений

Пример 1. Найти нормальные напряжения в сечении оболочки, нагруженной изгибающим моментом $M_x = -M$ (рис. 5.5). Материал сечения оболочки — алюминиевый сплав. Обшивка δ_1 работает на нормальные напряжения, а стенка δ_2 воспринимает только сдвиг.

Для данной оболочки редуционный коэффициент $\varphi = 1$, ось x является центральной и главной, т. е. $k = 1$, $\tilde{y}_i = y_i$, $I_{0x} = I_x$ и формула для нормальных напряжений (5.21) принимает вид

$$\sigma_i = \frac{M_x}{I_x} y_i,$$

где $I_x = \int y^2 \delta ds$.

Здесь интеграл вычисляется только по участкам 1—2 и 1—3, воспринимающим нормальные напряжения. Учитывая, что $ds = \frac{dx}{\cos \alpha}$, получим

$$I_x = 2 \int_0^B \left(\frac{H}{2B} x \right)^2 \delta_1 \frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{\delta H^2 B}{6 \cos \alpha},$$

$$\sigma_i = - \frac{6M}{\delta H^2 B} \cos \alpha y_i = \mp \frac{3M \cos \alpha}{\delta H B^2} x_i.$$

Распределение напряжений показано на рис. 5.6.

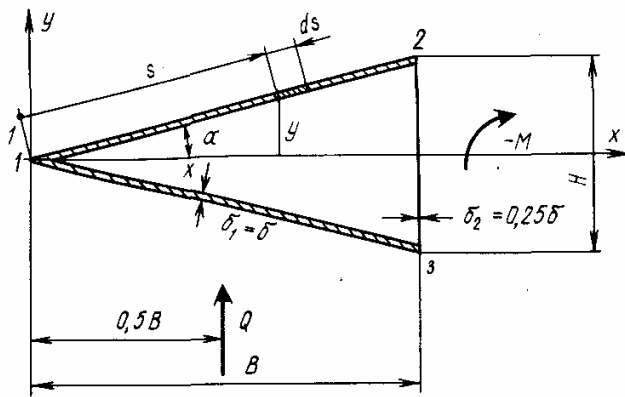


Рис. 5.5. Геометрические характеристики сечения оболочки и действующие нагрузки

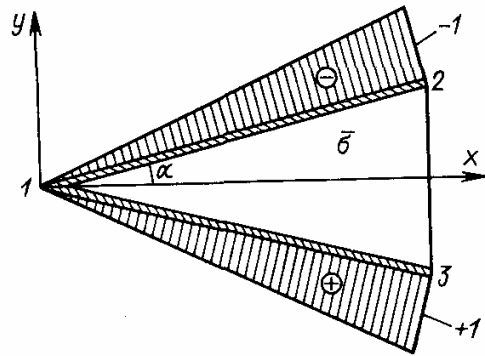


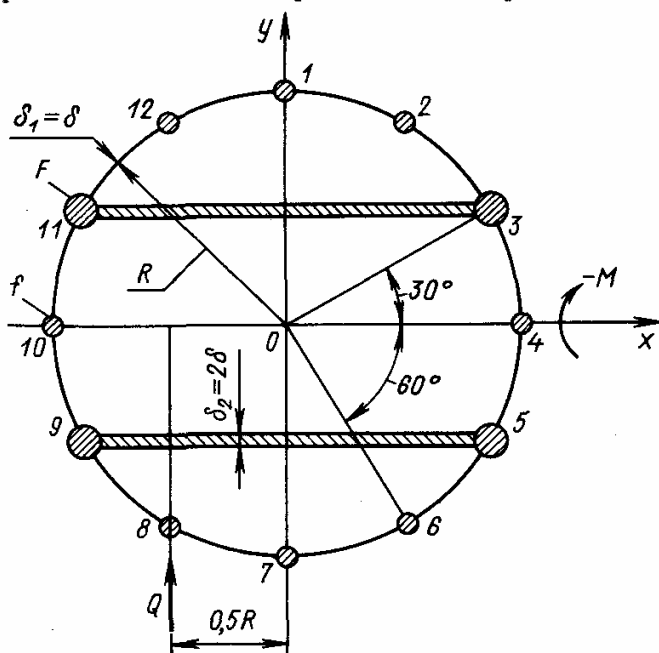
Рис. 5.6. Распределение нормальных напряжений $\bar{\sigma} = \sigma \frac{\delta H B}{3 M \cos \alpha}$ по контуру сечения

Пример 2. Определить нормальные напряжения в сечении трехзамкнутой оболочки (рис. 5.7) от действия изгибающего момента $M_x = -M$ при условии, что стенки 11—3 и 9—5 воспринимают нормальные напряжения, а обшивка работает только на сдвиг. Материал поясов лонжеронов 3, 5, 9, 11 — сталь; стрингеров, стенок и обшивки — алюминиевый сплав (принимается $E_{ст}/E_{д} = 3$). Площади поясов лонжеронов $F = 2f = \delta R$, стрингеров $f = 0,5\delta R$, толщина стенок $\delta_2 = 2\delta$, обшивки — $\delta_1 = \delta$.

Приведем материал сечения оболочки к алюминиевому сплаву. Тогда для поясов лонжеронов $\varphi_3 = \varphi_5 = \varphi_9 = \varphi_{11} = \varphi_{II} = 3$, а для остальных элементов $\varphi_j = 1$. Рассматриваемая конструкция имеет две оси симметрии. Выбранная система координат x, y (см. рис. 5.7) является центральной и главной. В этом случае $k = 1$, $\bar{y}_i = y_i$ и $I_{0x} = I_x$. Поэтому

$$\sigma_i = \varphi_i \frac{M_x}{I_x} y_i.$$

Момент инерции относительно оси x определяется вторым равенством (5.15), причем интегрирование проводится по участкам сечения, работающим на нормальные напряжения, а суммирование распространяется на все продольные элементы, т. е.



$$I_x = 4 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} R \int_0^{\pi/2} y_3^2 2\delta ds + \varphi_{II} y_3^2 F + y_2^2 f \right] + 2y_1^2 f.$$

Здесь $y_1 = R$, $y_2 = R \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_3 = 0,5R$. В результате получим $I_x = 7,232\delta R^3$.

Рис. 5.7. Геометрические характеристики сечения и действующие нагрузки

Подсчитаем нормальные напряжения в отдельных элементах сечения оболочки.

В поясах лонжеронов:

$$\begin{aligned}\sigma_3 = \sigma_{11} = -\sigma_5 = -\sigma_9 = \\ = -\varphi_{II} \frac{M}{(5,5 + \sqrt{3}) \delta R^3} \frac{1}{2} R = \\ = -0,20742 \frac{M}{\delta R^3}.\end{aligned}$$

В стрингерах 2, 6, 8, 12:

$$\begin{aligned}\sigma_2 = -\sigma_6 = -\sigma_8 = \sigma_{12} = \\ = -\frac{M}{(5,5 + \sqrt{3}) \delta R^3} \frac{\sqrt{3}}{2} R = \\ = -0,11975 \frac{M}{\delta R^3}.\end{aligned}$$

В стрингерах 1, 7:

$$\sigma_1 = -\sigma_7 = -\frac{M}{(5,5 + \sqrt{3}) \delta R^3} R = -0,13828 \frac{M}{\delta R^3}.$$

В стенках 11—3, 9—5:

$$\sigma_{11-3} = -\sigma_{9-5} = -\frac{M}{(5,5 + \sqrt{3}) \delta R^3} \frac{1}{2} R = -0,06914 \frac{M}{\delta R^3}.$$

Распределение нормальных напряжений показано на рис. 5.8.

Пример 3. На оболочку (рис. 5.9) действует изгибающий момент $M_x = -M$. Определить нормальные напряжения в элементах поперечного сечения, считая, что обшивки и стенки не работают на нормальные напряжения. Пояса лонжеронов 5, 8, 9, 12 выполнены из стали, стрингеры — из алюминиевого сплава ($E_{ст}/E_{д} = 3$). Площадь сечений поясов переднего лонжерона $F_5 = F_{12} = 3\delta b$, поясов заднего лонжерона $F_8 = F_9 = \frac{4}{3}\delta b$, стрингеров $2\delta b$ (δ — толщина обшивки).

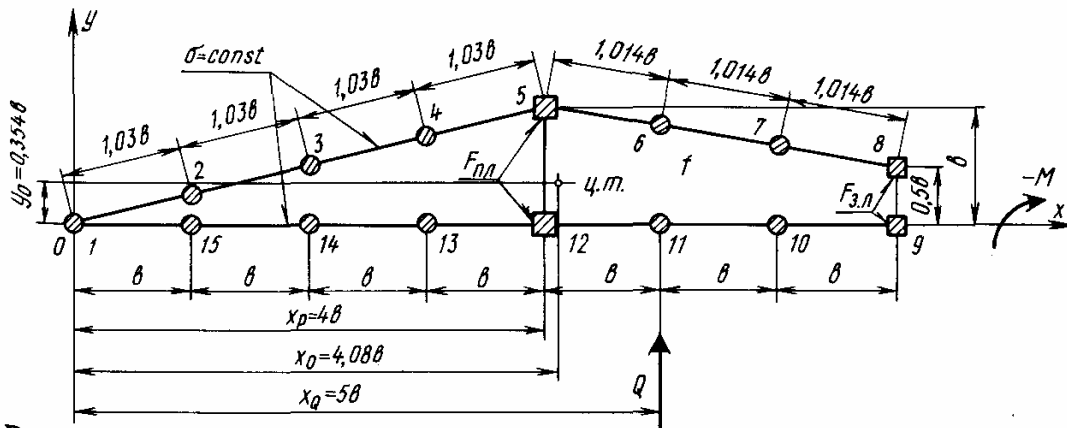


Рис. 5.9. Геометрические характеристики сечения и действующие нагрузки

Таблица 5.1

Геометрические характеристики сечения. Нормальные напряжения в элементах оболочки

i	$\frac{F_i}{\delta b}$	φ_i	$\frac{F_{ip}}{\delta b}$	$\frac{x_i}{b}$	$\frac{y_i}{b}$	$\frac{F_{ip}x_i}{\delta b^2}$	$\frac{F_{ip}y_i}{\delta b^2}$	$\frac{x_i^2}{b^2}$	$\frac{F_{ip}x_i^2}{\delta b^3}$	$\frac{y_i^2}{b^2}$	$\frac{F_{ip}y_i^2}{\delta b^3}$	$\frac{x_i y_i}{b^2}$	$\frac{F_{ip}x_i y_i}{\delta b^3}$	$\frac{y_i}{b}$	$\delta_i = \frac{\sigma_i}{-M/\delta b^2}$	$\frac{\sigma_i y_i F_i}{M}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	2	0,333	0,667	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,266	+0,0335	-0,0178
2	2	0,333	0,667	1	0,250	0	0,167	1	0,667	0,0625	0,0417	0,250	0,167	-0,037	+0,0047	-0,00035
3	2	0,333	0,667	2	0,500	1,333	0,333	4	2,667	0,250	0,167	1	0,667	+0,191	-0,0241	-0,0092
4	2	0,333	0,667	3	0,750	2	0,500	9	6	0,562	0,375	2,25	1,500	+0,419	-0,0528	-0,0442
5	3	1	3	4	1,000	12	3	16	48	1	3	4	12	+0,648	-0,2449	-0,4760
6	2	0,333	0,667	5	0,833	3,333	0,556	25	16,667	0,694	0,463	4,17	2,778	+0,458	-0,0577	-0,0528
7	2	0,333	0,667	6	0,667	4	0,444	36	24	0,444	0,296	4	2,667	+0,271	-0,0341	-0,0185
8	1,33	1	1,333	7	0,500	9,333	0,667	49	65,333	0,250	0,333	3,5	4,667	+0,083	-0,0314	-0,0348
9	1,33	1	1,333	7	0	9,333	0	49	65,333	0	0	0	0	-0,417	+0,1576	-0,0875
10	2	0,333	0,667	6	0	4	0	36	24	0	0	0	0	-0,396	+0,0499	-0,0394
11	2	0,333	0,667	5	0	3,333	0	25	16,667	0	0	0	0	-0,375	+0,0472	-0,0354
12	3	1	3	4	0	12	0	16	48	0	0	0	0	-0,352	+0,1330	-0,1400
13	2	0,333	0,667	3	0	2	0	9	6	0	0	0	0	-0,331	+0,0417	-0,0276
14	2	0,333	0,667	2	0	1,333	0	4	2,667	0	0	0	0	-0,309	+0,0389	-0,0240
15	2	0,333	0,667	1	0	0,667	0	1	0,667	0	0	0	0	-0,287	+0,0362	-0,0208
			$F = \sum F_{ip} = 16\delta b$			$S_y = \sum F_{ip} x_i = 65,33\delta b^2$	$S_x = \sum F_{ip} y_i = 5,667\delta b^2$		$I_y = \sum F_{ip} x_i^2 = 326,7\delta b^4$		$I_x = \sum F_{ip} y_i^2 = 4,67\delta b^4$		$I_{xy} = \sum F_{ip} x_i y_i = 24,44\delta b^4$			$\sum \frac{\sigma_i y_i F_i}{M} = -0,9970$

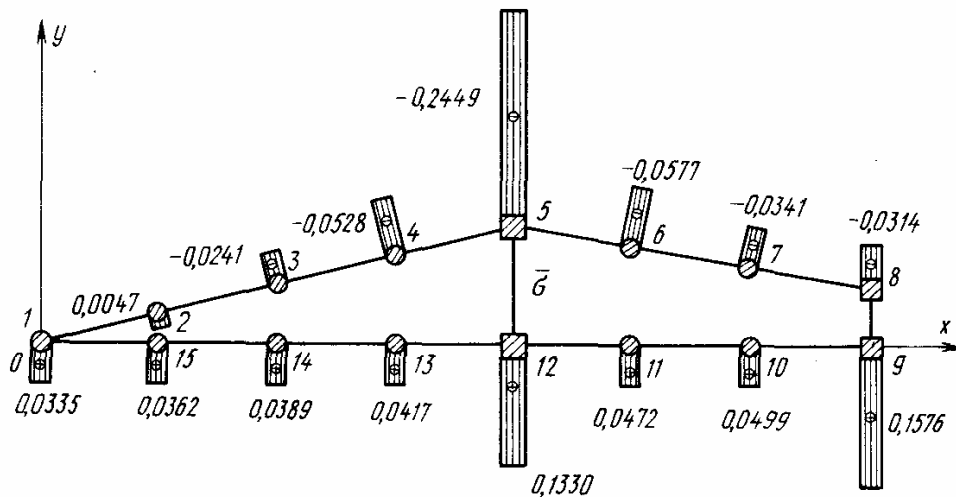


Рис. 5.10. Распределение нормальных напряжений $\bar{\sigma} = \sigma \frac{\delta b^3}{M}$ по контуру сечения

В качестве материала приведения принимается сталь, т. е. для поясов лонжеронов $\varphi = 1$, а для стрингеров $\varphi = 1/3$.

Геометрические характеристики сечения сводятся в таблицу 5.1. Суммирование столбцов 4, 7, 8, 10, 12, 14 таблицы позволяет найти характеристики F , S_x , S_y , I_x , I_y , I_{xy} . По формулам (5.17) и (5.19) находим координаты центра тяжести сечения $x_0 = \frac{S_y}{F} = 4,08b$; $y_0 = \frac{S_x}{F} = 0,354b$ и центральные моменты инерции сечения $I_{0x} = 2,67\delta b^3$, $I_{0y} = 59,9\delta b^3$, $I_{0xy} = 1,3\delta b^3$. Коэффициент несимметрии сечения (5.22) $k = 1,01$ и обобщенная координата $\tilde{y}_i$ (5.23)

$$\tilde{y}_i = y_i - 0,354b - (x_i - 4,08b) 0,0217.$$

Значения $\tilde{y}_i$ приведены в столбце 15 таблицы. Нормальные напряжения определяются по формуле (5.21)

$$\sigma_i = \varphi_i k \frac{M_x}{I_{0x}} \tilde{y}_i = -1,01 \varphi_i \frac{M}{2,67 \delta b^3} \tilde{y}_i$$

и приведены в столбце 16.

В качестве проверки по формуле

$$\sum_i \sigma_i \tilde{y}_i F_i = -M$$

может быть найден изгибающий момент в сечении. Результат суммирования столбца 17 таблицы показывает, что погрешность расчета составляет 0,3 %. Распределение нормальных напряжений показано на рис. 5.10.

5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

5.3.1. Вывод формулы для потока касательных сил

При изгибе подкрепленной оболочки в обшивке возникают касательные напряжения τ , направленные вдоль контура, равномерно распределяющиеся по толщине обшивки δ и сводящиеся к потоку касательных напряжений (5.4) $q = \tau \delta$.

Для определения потока касательных сил (ПКС) q выделим из оболочки элемент с размерами $ds dz$ (см. рис. 5.3) и рассмотрим его равновесие, считая, что поверхностная нагрузка в направлении оси z отсутствует, т. е. продольная сила для данного отсека конструкции постоянна ($N = \text{const}$). Спроектируем все действующие на элемент оболочки силы на ось z

$$\left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz\right) \delta ds - \sigma \delta ds + \left(q + \frac{\partial q}{\partial s} ds\right) dz - q dz = 0.$$

Отсюда после очевидных преобразований

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} \delta + \frac{\partial q}{\partial s} = 0$$

и после интегрирования по s

$$q = - \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial z} \delta ds + q_0(z). \quad (5.24)$$

Здесь $q_0(z)$ — ПКС в точке $s = 0$. Подставляя в равенство (5.24) выражение для нормальных напряжений (5.21) и учитывая, что в нем от z зависят только M_{0x} и M_{0y} , получим

$$q = -k \left(\frac{dM_{0x}}{dz} \frac{\tilde{S}_x}{I_{0x}} - \frac{dM_{0y}}{dz} \frac{\tilde{S}_y}{I_{0y}} \right) + q_0. \quad (5.25)$$

Отметим, что в формуле (5.21) имеется индекс i , однако следует иметь в виду, что она определяет напряжения как в точках обшивки, так и в продольных элементах. Поэтому, если на участке контура $[0, s]$ имеется m -продольных элементов, то интеграл в равенстве (5.24) следует вычислять с учетом этих элементов и функции $\tilde{S}_x(s)$ и $\tilde{S}_y(s)$ в общем случае имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{S}_x &= \int_0^s \varphi \tilde{y} \delta ds + \sum_{j=1}^m \varphi_j \tilde{y}_j f_j, \\ \tilde{S}_y &= \int_0^s \varphi \tilde{x} \delta ds + \sum_{j=1}^m \varphi_j \tilde{x}_j f_j. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Здесь интегралы уже распространяются только на обшивку; δ и φ — толщина и редуцированный коэффициент обшивки; f_j , $\tilde{x}_j$, $\tilde{y}_j$, φ_j — площадь сечения, обобщенные координаты (5.23) и редуцированный коэффициент j -го продольного элемента.

Функции $\tilde{S}_x(s)$ и $\tilde{S}_y(s)$ (5.26) представляют собой обобщенные статические моменты отсеченной части контура редуцированного сечения в произвольно выбранной системе координат xOy (см. рис. 5.3). Начало отсчета координаты z выбирается в произвольной точке контура сечения.

Преобразуем равенство (5.25) к окончательному виду. Для этого учтем, что в силу условия $N = \text{const}$ и равенств (5.5), (5.20)

$$\frac{dM_{0x}}{dz} = Q_y, \quad \frac{dM_{0y}}{dz} = -Q_x.$$

В результате для сечения $z = \text{const}$ получим

$$q = -k \left(\frac{Q_y}{I_{0x}} \tilde{S}_x + \frac{Q_x}{I_{0y}} \tilde{S}_y \right) + q_0 \quad (5.27)$$

или $q = q_Q + q_0$,
где

$$q_Q = -k \left(\frac{Q_y}{I_{0x}} \tilde{S}_x + \frac{Q_x}{I_{0y}} \tilde{S}_y \right). \quad (5.28)$$

Знаки обобщенных статических моментов $\tilde{S}_x$ и $\tilde{S}_y$ зависят от знаков обобщенных текущих $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и фиксированных $\tilde{x}_j$, $\tilde{y}_j$ координат (5.26), а также от принятого начала отсчета координаты s . Знак ПКС q_Q в (5.28) определяется знаками поперечных сил Q_x , Q_y и обобщенных статических моментов $\tilde{S}_x$ и $\tilde{S}_y$. При этом положительный ПКС q_Q совпадает с выбранным направлением обхода контура, а отрицательный — принимается в противоположном направлении. Формулы (5.27), (5.28) определяют распределение ПКС по контуру сечения. Касательные напряжения в соответствии с равенством (5.4) имеют вид

$$\tau = \frac{q}{\delta}. \quad (5.29)$$

Следует отметить, что поток q_0 , входящий в формулу (5.27), является пока неизвестным и определяется по-разному в зависимости от степени замкнутости контура (см. рис. 5.2). Таким образом, определение касательных напряжений представляет собой более сложную задачу по сравнению с расчетом нормальных напряжений, так как в этом случае неразличимо, каким является сечение оболочки — открытым, однозамкнутым или многозамкнутым. Так, однозамкнутое сечение является статически определимым, многозамкнутое — статически неопределимым, а оболочка с открытым контуром при решении задачи кручения является даже геометрически изменяемой системой. Поэтому необходимо последовательно рассмотреть определение касательных напряжений для каждого типа сечения тонкостенных конструкций.

5.3.2. Определение ПКС в оболочках с открытым контуром поперечного сечения. Центр изгиба

Для более полной иллюстрации схемы решения, которая в основных чертах будет повторяться и далее в более сложных задачах, рассмотрим простой пример — задачу об изгибе оболочки, показанной на рис. 5.11.

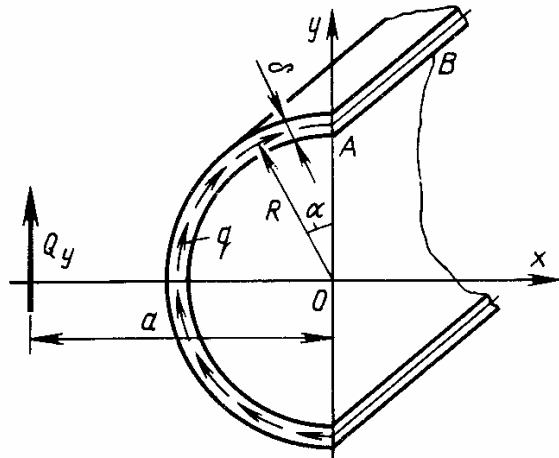


Рис. 5.11. Круговая цилиндрическая оболочка с открытым контуром

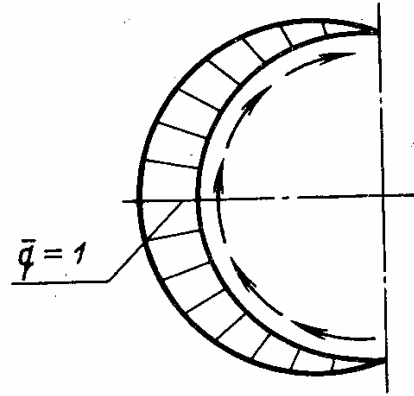


Рис. 5.12. Распределение ПКС $\bar{q} = q \frac{\pi R}{2Q_y}$ по контуру сечения

Как уже отмечалось, в формуле (5.27) $q_0 = q$ (при $s = 0$). Поместим начало отсчета дуги s в точке A , т. е. на крае контура. Поскольку край AB свободен от нагрузки, в силу закона парности касательных напряжений в точке A (т. е. при $s = 0$) $q = 0$. Следовательно, $q_0 = 0$ и согласно (5.27), (5.28)

$$q = q_Q = -k \frac{Q_y}{I_{0x}} \tilde{S}_x.$$

Для рассматриваемого контура, обладающего осью симметрии, $\varphi = 1$, $s = R\alpha$, $y = R \cos \alpha$, $y_0 = 0$, $\tilde{y} = y$, $k = 1$, $I_x = I_{0x} = 0,5\pi R^3 \delta$,

$$\tilde{S}_x = R^2 \delta \int_0^\alpha \cos \alpha d\alpha = R^2 \delta \sin \alpha, \quad q = -\frac{2Q_y}{\pi R} \sin \alpha.$$

Распределение потока q по контуру показано на рис. 5.12. Найдем равнодействующую потока q по осям x и y

$$\int_0^\pi q \cos \alpha R d\alpha = 0; \quad \int_0^\pi q \sin \alpha R d\alpha = Q_y.$$

Таким образом, поток q_Q , входящий в формулу (5.27), статически эквивалентен действующим в сечении поперечным силам. Рассмотрим условие статической эквивалентности по моменту относительно оси z (точки O на рис. 5.11)

$$\int_0^\pi q R^2 d\alpha = Q_y a.$$

Отсюда $a = \frac{4R}{\pi}$, т. е. сила Q_y должна проходить через вполне определенную точку. При любом другом ее положении получаемый поток q оказывается неэквивалентным действующей в сечении силе и не может быть найден по балочной теории.

Рассмотрим теперь открытый контур общего вида (рис. 5.13).

Координату s отсчитываем от свободного края контура профиля. Поскольку q_0 представляет собой поток, действующий на крае сечения оболочки, то при отсутствии продольных сил вдоль образующей имеем $q_0 = 0$. Поэтому в оболочках с открытым контуром касательные усилия находятся по формуле

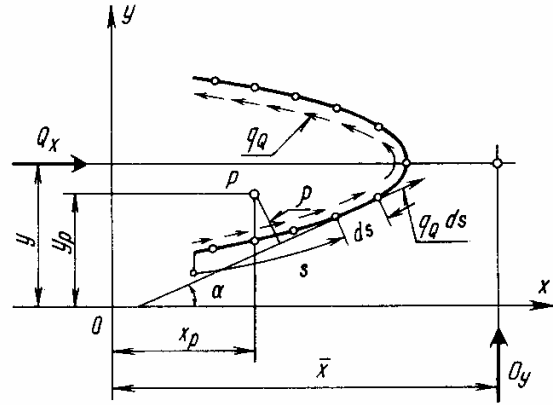


Рис. 5.13. К определению ПКС в сечении оболочки с открытым контуром

$$q = q_Q = -k \left(\frac{Q_y}{I_{0x}} \tilde{S}_x + \frac{Q_x}{I_{0y}} \tilde{S}_y \right). \quad (5.30)$$

Здесь обобщенные статические моменты $\tilde{S}_x$ и $\tilde{S}_y$ вычисляются по формулам (5.26) от одной из свободных кромок профиля.

Сумма проекций всех элементарных касательных сил $q_Q ds$ на координатные оси Q_x и Q_y (см. рис. 5.13) обеспечивает выполнение условий равновесия

$$\int_s q_Q \cos \alpha ds = Q_x, \quad \int_s q_Q \sin \alpha ds = Q_y. \quad (5.31)$$

Из выражения (5.30) следует, что поток касательных сил в сечении оболочки открытого контура не зависит от величины крутящего момента. При кручении таких систем отсутствуют внутренние усилия, уравнивающие крутящий момент. Поэтому тонкостенные конструкции открытого профиля не воспринимают крутящий момент и представляют собой в этом случае нагружения геометрически изменяемую систему.

Отметим, что последнее является следствием гипотез балочной теории, т. е. применительно к задаче кручения тонкостенной конструкции открытого профиля концепции балочной теории дают совершенно неудовлетворительные результаты.

При определении нормальных и касательных напряжений были удовлетворены пять уравнений равновесия (5.13) и (5.31). Шестое уравнение позволяет найти координаты точки, через которую проходит равнодействующая развивающихся в сечении потоков касательных сил. Этим уравнением является уравнение моментов относительно любой оси, параллельной оси z .

Определим отдельно координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ искомой точки. Сначала составим уравнение моментов относительно произвольной точки в плоскости сечения — полюса $P(x_p, y_p)$ (см. рис. 5.13) только для усилия Q_y

$$-Q_y(x_p - \bar{x}) = \int_s q_Q \rho ds.$$

Здесь $\rho = \rho(s)$ — расстояние от полюса до касательной в текущей точке контура или плечо элементарной касательной силы $q_Q ds$. Подставляя в последнее равенство q_Q из формулы (5.30)

$$q_Q = -k \frac{Q_y}{I_{0x}} \tilde{S}_x,$$

находим

$$x_p - \bar{x} = \frac{k}{I_{0x}} \int_s \tilde{S}_x \rho ds. \quad (5.32)$$

Рассматривая затем действие силы Q_x , аналогично получаем

$$y_p - \bar{y} = -\frac{k}{I_{0y}} \int_s \tilde{S}_y \rho ds. \quad (5.33)$$

Координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ определяют точку, через которую проходит равнодействующая развивающихся ПКС в сечении оболочки открытого контура. Эта точка называется центром изгиба

$$\begin{aligned} x_{ц.и} = \bar{x} &= -\frac{k}{I_{0x}} \int_s \tilde{S}_x \rho ds + x_p, \\ y_{ц.и} = \bar{y} &= \frac{k}{I_{0y}} \int_s \tilde{S}_y \rho ds + y_p. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Положение этой точки не зависит от внешней нагрузки и определяется геометрическими характеристиками сечения. Центр изгиба открытого профиля лежит всегда вне контура и на оси симметрии, если она имеется. Геометрическое место центров изгиба сечений по длине конструкции образует ось жесткости (ось изгиба), которая для цилиндрических оболочек представляет собой прямую, параллельную образующей.

В качестве примера рассмотрим открытый контур, показанный на рис. 5.14. Оболочка нагружена поперечной силой $Q_y = Q$. Определить ПКС q и абсциссу точки приложения внешней нагрузки ($x_{ц.и}$) при условии, что обшивка с толщиной $\delta_1 = \delta$ воспринимает нормальные и касательные напряжения, а стенка с толщиной $\delta_2 = 0,25\delta$ работает только на сдвиг. Материал оболочки — алюминиевый сплав.

Эта оболочка уже рассматривалась ранее при определении нормальных напряжений (см. пример 1 в разд. 5.2.3). Для нее

было найдено, что $k = 1$, $\bar{y}_i = y_i$, $I_{0x} = I_x = \frac{\delta H^3 B}{6 \cos \alpha}$, $\varphi = 1$, т. е. согласно формуле (5.30)

$$q = q_Q = -k \frac{Q_y}{I_{0x}} \tilde{S}_x = -\frac{6Q}{\delta H^2 B} \cos \alpha S_x, \quad (5.35)$$

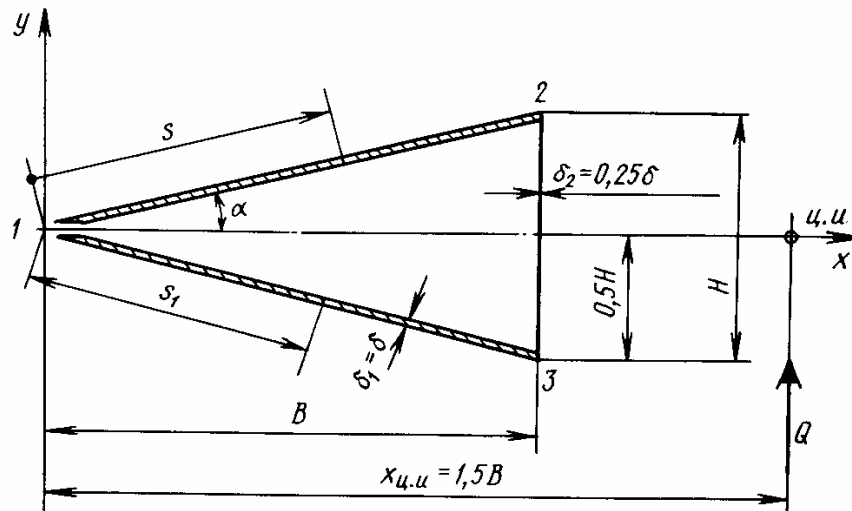


Рис. 5.14. Геометрические характеристики сечения с открытым контуром

где $\bar{S}_x = S_x$ — статический момент отсеченной части. Координата s отсчитывается от точки 1, т. е. от свободной кромки. Учитывая, что $ds = \frac{dx}{\cos \alpha}$, $y = x \operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{2B} x$ (см. рис. 5.14), для участка 1—2 имеем

$$S_x^{1-2} = \int_0^x \delta y \frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{\delta H}{4B \cos \alpha} x^2.$$

В точке 2 имеем

$$S_x^{(2)} = S_x^{1-2}(x = B) = \frac{\delta H B}{4 \cos \alpha}.$$

Поскольку стенка с толщиной δ_2 на нормальные напряжения по условию не работает, на участке 2—3 $S_x^{2-3} = S_x^2$ и в точке 3 $S_x^3 = S_x^2$. Для определения статического момента на участке 1—3 удобнее ввести новую координату s_1 (см. рис. 5.14). Учитывая, что $ds_1 = \frac{dx}{\cos \alpha}$, $y = -x \operatorname{tg} \alpha = -\frac{H}{2B} x$, получим

$$S_x^{1-3} = \int_0^x \delta y \frac{dx}{\cos \alpha} = -\frac{\delta H}{4B \cos \alpha} x^2.$$

Поток касательных сил определяется теперь по формуле (5.35) и показан на рис. 5.15. На участках 1—2 и 3—1 получим $q = -\frac{3Q}{2HB^2} x^2$, а на участке 2—3 $q = -\frac{3Q}{2H}$, т. е. при обходе контура по часовой стрелке поток на всех участках имеет противоположное направление. Из рис. 5.15 непосредственно следует, что равнодействующая ПКС на ось x равна нулю, а на ось y она, как не-

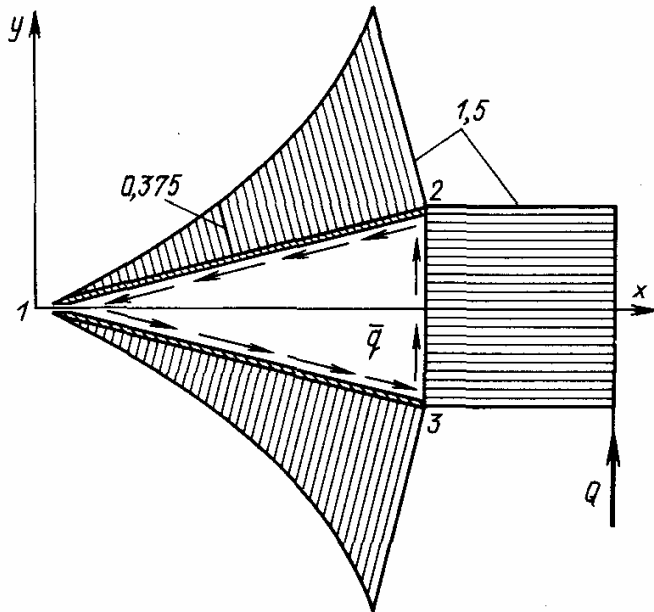


Рис. 5.15. Распределение PKS $\bar{q} = q_Q \frac{H}{Q}$ по сечению с открытым контуром

ординаты центра изгиба определять не по формулам (5.34), а непосредственно из уравнения моментов. Составим это уравнение статички, принимая полюс в точке 1. Тогда условие статической эквивалентности найденного PKS силе Q примет вид

$$Qx_{ц.н} = \frac{3Q}{2H} HB.$$

Отсюда $x_{ц.н} = \frac{3}{2} B$.

5.3.3. Определение PKS при изгибе и кручении оболочки с однозамкнутым контуром сечения

Пусть тонкостенная конструкция с замкнутым контуром нагружена в сечении произвольно приложенными поперечными силами Q_y , Q_x и крутящим моментом M_z (рис. 5.16, а). Для определения потоков касательных сил система с замкнутым профилем разрезается вдоль образующей в произвольном месте поперечного сечения и превращается таким образом в оболочку с открытым контуром, которая была рассмотрена выше. Разрез служит начальной точкой отсчета обобщенных статических моментов отсеченной части сечения оболочки. При введении разреза в тонкостенной конструкции появляются распределенные касательные усилия $q_0(z)$, которые в рассматриваемом сечении $z = \text{const}$ имеют постоянную величину, т. е. $q_0 = \text{const}$.

Потоки касательных сил в сечении оболочки находятся согласно (5.27) и (5.28) по формуле

$$q = q_Q + q_0. \quad (5.36)$$

трудно проверить, равна Q . Действительно,

$$- 2 \int_0^B \frac{3Q}{2HB^2} x^2 \sin \alpha \frac{dx}{\cos \alpha} + \frac{3Q}{2H} H = Q.$$

При расчете тонкостенных конструкций с открытым контуром сечения на основе балочной теории поперечные силы должны обязательно проходить через центр изгиба. Определим абсциссу центра изгиба в рассматриваемой оболочке. В практических расчетах целесообразно координаты центра изгиба определять не по формулам (5.34), а непосредственно из уравнения моментов. Составим это уравнение статички, принимая полюс в точке 1. Тогда условие статической эквивалентности найденного PKS силе Q примет вид

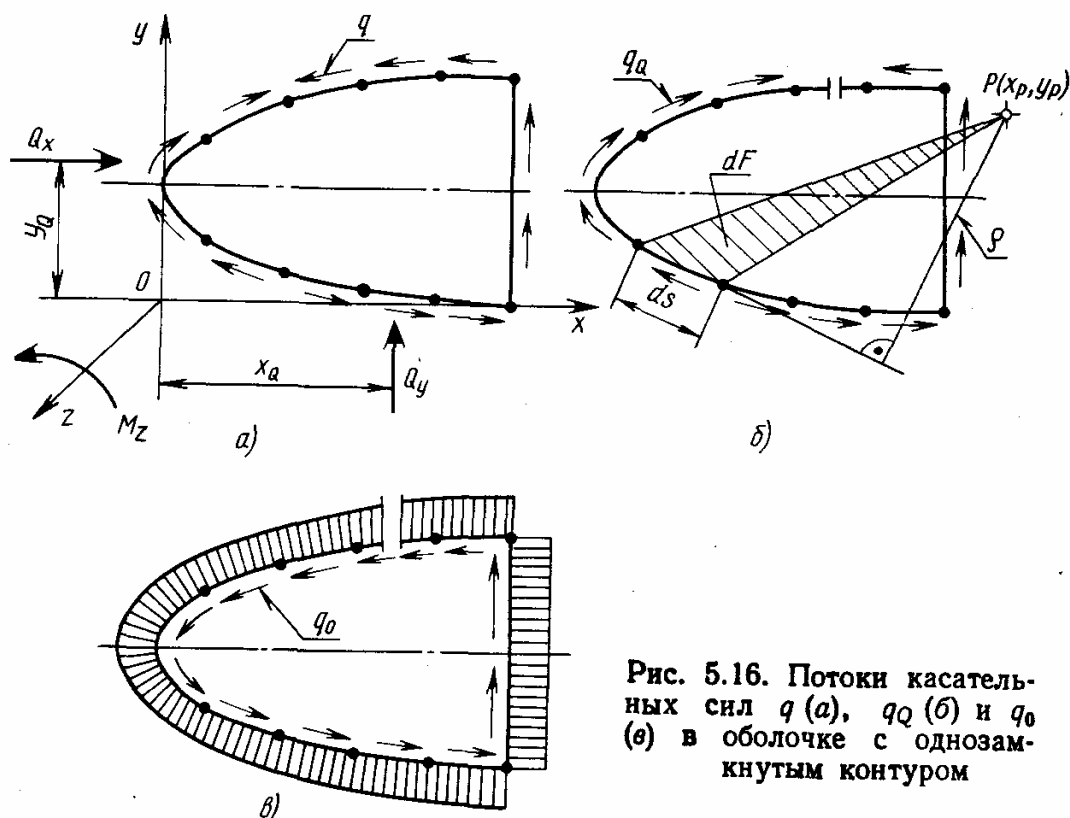


Рис. 5.16. Потоки касательных сил q (а), q_Q (б) и q_0 (в) в оболочке с однозамкнутым контуром

Здесь

$$q_Q = -k \left(\frac{Q_y}{I_{ox}} \tilde{S}_x + \frac{Q_x}{I_{oy}} \tilde{S}_y \right) \quad (5.37)$$

— представляет собой поток касательных сил в сечении оболочки с открытым контуром, который определяется по схеме, описанной в разд. 5.3.2. При этом обобщенные статические моменты $\tilde{S}_x$ и $\tilde{S}_y$ вычисляются по формулам (5.26) от введенного разреза.

Для определения ПКС q_0 запишем не использованное пока уравнение моментов сил относительно произвольно выбранного полюса P с координатами x_p, y_p (см. рис. 5.16, б). Имеем

$$M_{kp} = \oint q \rho \, ds, \quad (5.38)$$

где $M_{kp} = M_z - Q_y (x_p - x_Q) + Q_x (y_p - y_Q)$ — крутящий момент от заданных нагрузок; $\rho = \rho(s)$ — длина перпендикуляра, опущенного в сечении из полюса на касательную к контуру в текущей точке.

Подставляя (5.36) в (5.38), получим

$$M_{kp} = \oint q_Q \rho \, ds + q_0 \oint \rho \, ds.$$

Следовательно,

$$q_0 = \frac{M_{kp}}{\oint \rho \, ds} - \frac{\oint q_Q \rho \, ds}{\oint \rho \, ds}. \quad (5.39)$$

Как для крутящего момента, так и для момента от потока касательных сил, положительным считаем направление против часовой стрелки, если смотреть с конца положительного направления оси z .

В знаменателе равенства (5.39) стоит интервал $\oint \rho ds$. Установим его геометрический смысл. Из рис. 5.16, б видно, что величина ρds равна удвоенной площади элементарного треугольника с вершиной в полюсе P и основанием ds (элементарная секториальная площадь). В результате интегрирования получим удвоенную площадь, ограниченную контуром сечения, причем величина интеграла не зависит от расположения полюса. Введем обозначение

$$\oint \rho ds = \Omega.$$

Тогда формула (5.39) примет вид

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} (M_{кр} - \oint q_Q \rho ds). \quad (5.40)$$

Итак, ПКС в однозамкнутом контуре определяется равенствами (5.36), (5.37), (5.40).

Рассмотрим один важный частный случай. Предположим, что в сечении действует только крутящий момент M_z . Тогда $Q_x = Q_y = 0$, $M_{кр} = M_z$, $q_Q = 0$ и из (5.36), (5.40) получим

$$q = q_0 = \frac{M_z}{\Omega}. \quad (5.41)$$

Формула (5.41) называется формулой Бредта. Из нее следует, что при свободном кручении оболочки с однозамкнутым контуром поперечного сечения поток касательных сил не изменяется вдоль контура и определяется в результате деления крутящего момента на удвоенную площадь, ограниченную контуром сечения. Касательные напряжения находятся по формуле $\tau = q/\delta$.

В заключение отметим, что оболочки с однозамкнутым контуром в отличие от систем с открытым профилем воспринимают произвольно прикладываемые поперечные нагрузки Q_x , Q_y и момент M_z . Возникающие при этом напряжения определяются, как следует из изложенного выше, только из уравнений равновесия. Поэтому тонкостенные конструкции с однозамкнутым контуром поперечного сечения являются статически определенными.

В качестве примера рассмотрим оболочку с сечением и схемой нагружения, показанными на рис. 5.17 (см. также пример в разд. 5.3.2). Согласно (5.36) $q = q_Q + q_0$. Разрежем контур в точке 1. Тогда получим открытый контур (см. рис. 5.14) и распределение ПКС q_Q , показанное на рис. 5.15. Найдем поток q_0 , компенсирующий сделанный разрез. На практике вместо использования формулы (5.40) обычно непосредственно составляется урав-

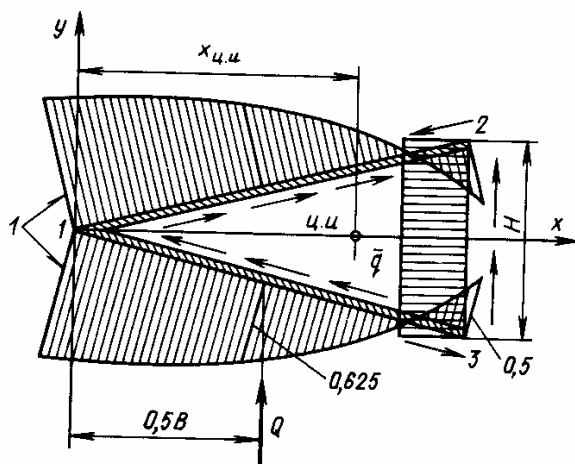


Рис. 5.17. Распределение суммарного ПКС $\bar{q} = q \frac{H}{Q}$ по сечению с однозамкнутым контуром

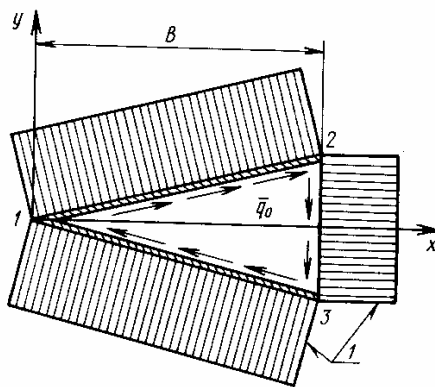


Рис. 5.18. Распределение потока $\bar{q}_0 = q_0 \frac{H}{Q}$ по сечению с однозамкнутым контуром

нение моментов. Принимая в качестве полюса точку 1 и направляя q_0 против часовой стрелки, получим (см. рис. 5.15, 5.17)

$$\frac{3Q}{2H} HB + q_0 HB = \frac{QB}{2}.$$

Отсюда $q_0 = -\frac{Q}{H}$ (рис. 5.18). Суммарное распределение ПКС $q = q_q + q_0$, полученное в результате сложения потоков, показанных на рис. 5.15, 5.18, представлено на рис. 5.17.

5.3.4. Определение ПКС при изгибе и кручении оболочки с многозамкнутым контуром поперечного сечения

Теперь рассмотрим определение касательных напряжений в тонкостенных конструкциях с многозамкнутым контуром поперечного сечения.

Пусть n -раз замкнутая оболочка нагружена произвольной системой поперечных нагрузок (рис. 5.19). Прежде всего тонкостенную систему с многозамкнутым контуром нужно превратить в оболочку с открытым контуром. С этой целью необходимо разрезать оболочку на каждом контуре по образующей. Всего таким образом делается n -разрезов. Для компенсации нарушенных связей в разрезах необходимо приложить неизвестные распределенные касательные усилия $q_{0i}(z)$. Для рассматриваемого сечения $z = \text{const}$, в котором действует заданная система

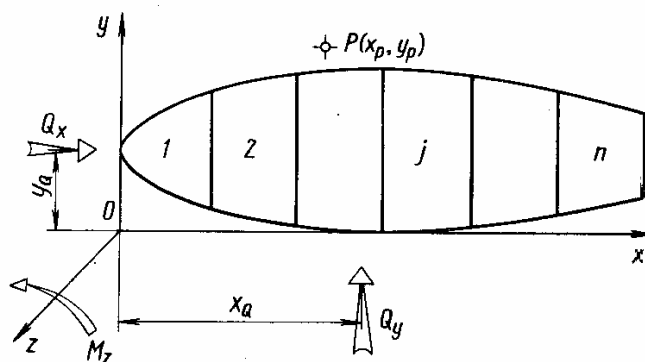


Рис. 5.19. Сечение оболочки с многозамкнутым контуром

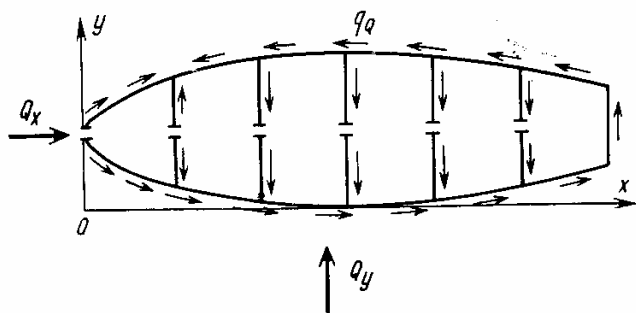


Рис. 5.20. К определению ПКС q_Q в оболочке с многозамкнутым контуром сечения

поперечных нагрузок, эти усилия являются постоянными в пределах каждого контура.

Далее от поперечных сил по формуле (5.28)

определяются потоки касательных усилий в сечении оболочки с открытым контуром, т. е.

$$q_Q = -k \left(\frac{Q_y}{I_{ox}} \tilde{S}_x + \frac{Q_x}{I_{oy}} \tilde{S}_y \right), \quad (5.42)$$

причем обобщенные статические моменты отсеченной части редуцированного сечения $\tilde{S}_x$ и $\tilde{S}_y$ отсчитываются от одного из разрезов. Типичное распределение q_Q по контуру показано на рис. 5.20.

Для сечения, состоящего из n -замкнутых контуров, суммарные потоки касательных сил в произвольной точке записываются

$$q = q_Q + \sum_{i=1}^n \bar{q} q_{0i}, \quad (5.43)$$

где $\bar{q}_i$ — единичный поток, показывающий направление потока q_{0i} в i -м контуре (рис. 5.21); q_{0i} — величина потока в i -м контуре.

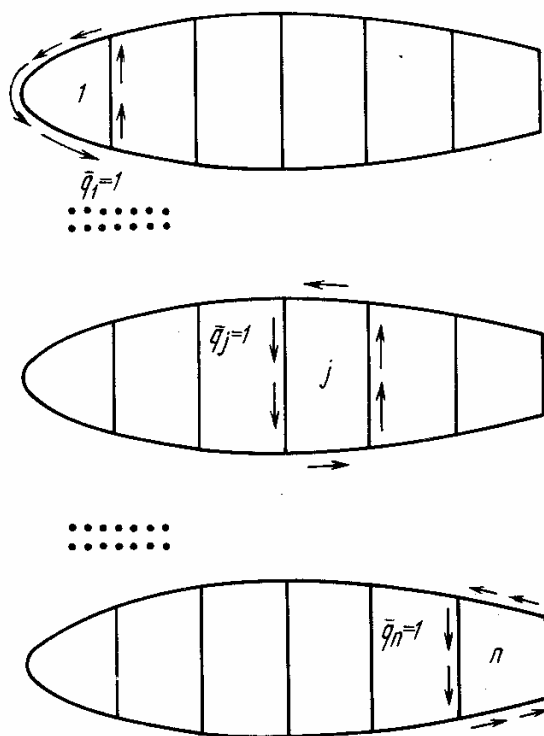


Рис. 5.21. К определению ПКС q_{0i} в оболочке с многозамкнутым контуром сечения

Отметим, что усилия от ПКС q (5.43), будучи спроектированными на оси x и y , приводят к заданным силам Q_x и Q_y , так как этим свойством обладает поток q_Q (5.42), а постоянные по отдельным контурам распределенные касательные усилия q_{0i} являются самоуравновешенными.

Таким образом, остается потребовать, чтобы момент от потока q в сечении сводился к крутящему моменту, т. е.

$$\oint q \rho ds = M_z - Q_y (x_p - x_Q) + Q_x (y_p - y_Q). \quad (5.44)$$

Интегрирование распространяется на все поперечное сечение оболочки. Подставляя в уравнение (5.44) q согласно (5.43) и принимая во внимание, что

$$\oint \bar{q}_i \rho ds = \oint 1 \rho ds = \Omega_i,$$

где Ω_i — удвоенная площадь, ограниченная i -м контуром поперечного сечения оболочки, получим

$$\sum_{i=1}^n q_{0i} \Omega_i + \oint q_{0p} ds = M_z - Q_y (x_p - x_0) + Q_x (y_p - y_0). \quad (5.45)$$

Итак, для определения n -неизвестных потоков q_{0i} имеется только одно уравнение равновесия. Поэтому задача определения ПКС в оболочке с n -замкнутым контуром сечения является — 1-раз статически неопределимой. Для решения этой задачи необходимо привлечь уравнения совместности деформаций.

Получим выражение для относительного или распределенного угла закручивания сечения оболочки θ . С этой целью воспользуемся теоремой Кастильяно, изложенной в разд. 1.4.4 гл. 1. Согласно равенству (1.58) частная производная от дополнительной потенциальной энергии по обобщенной силе равна соответствующему обобщенному перемещению. Для линейно упругих систем, к числу которых относится рассматриваемая оболочка, дополнительная потенциальная энергия совпадает с потенциальной энергией деформации. Запишем распределенную потенциальную энергию (соответствующую единице длины оболочки) для некоторого j -го контура многозамкнутого сечения

$$U_j = \oint_{s_j} \frac{\tau^2}{2G} \delta ds = \oint_{s_j} \frac{q^2}{2G\delta} ds. \quad (5.46)$$

Здесь G и δ — модуль сдвига и толщина обшивки; s_j — длина j -го контура, а q определяется равенством (5.43). Распределим вдоль j -го контура ПКС q_{0j} , создающий согласно формуле Бредта (5.41) крутящий момент

$$M_j = q_{0j} \Omega_j, \quad (5.47)$$

где Ω_j — удвоенная площадь, ограниченная j -м контуром.

Рассматривая M_j в качестве обобщенной силы, по теореме Кастильяно получим следующее выражение, определяющее распределенный угол закручивания (угол закручивания единицы длины оболочки) θ_j :

$$\theta_j = \frac{\partial U_j}{\partial M_j}. \quad (5.48)$$

Согласно равенству (5.47) имеем

$$\frac{\partial U_j}{\partial M_j} = \frac{\partial U_j}{\partial q_{0j}} \frac{\partial q_{0j}}{\partial M_j} = \frac{1}{\Omega_j} \frac{\partial U_j}{\partial q_{0j}}.$$

Подставляя сюда U_j по формуле (5.46) и учитывая равенства (5.43) и (5.48), получим

$$\theta_j = \frac{1}{\Omega_j} \oint_{s_j} \frac{\partial q}{\partial q_{0j}} \frac{q}{G\delta} ds = \frac{1}{\Omega_j} \oint_{s_j} \bar{q}_j \frac{q_0 + \sum_{i=1}^n \bar{q}_i q_{0i}}{G\delta} ds.$$

Таким образом

$$\theta_j \Omega_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} q_{0i} + a_{Qj}, \quad (5.49)$$

где

$$a_{ij} = \oint_{s_j} \frac{\bar{q}_i \bar{q}_j}{G\delta} ds, \quad a_{Qj} = \oint_{s_j} \frac{q_Q \bar{q}_j}{G\delta} ds. \quad (5.50)$$

Соотношение (5.49), определяющее распределенный угол закручивания, иногда называется уравнением циркуляции потоков касательных сил.

Запишем теперь условия совместности деформаций рассматриваемых контуров. Ввиду того, что в балочной теории сечение оболочки считается абсолютно жестким в своей плоскости, углы поворота всех его элементов, в частности всех контуров, должны быть одинаковыми, т. е. $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_j = \dots = \theta_n = \theta$. Таким образом, с учетом равенства (5.49) получим

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} q_{0i} + a_{Qj} = \Omega_j \theta \quad (j = 1, 2, 3 \dots n). \quad (5.51)$$

В уравнениях (5.51) содержатся $n + 1$ -неизвестных величин — n -потоков q_{0j} и распределенный угол закручивания сечения θ . Система (5.51) позволяет выразить все потоки q_{0j} через θ и получить зависимости вида

$$q_{0j} = A_j + B_j \theta. \quad (5.52)$$

Здесь A_j — потоки и B_j — коэффициенты являются известными величинами, зависящими от геометрических и жесткостных характеристик поперечного сечения (потоки A_j , кроме того, зависят также и от поперечных сил).

Распределенный угол закручивания θ определяется из уравнения моментов (5.45) после подстановки в него потоков (5.52). По найденному θ с помощью равенств (5.52) определяются q_{0j} и по формуле (5.43) — суммарный поток касательных сил в каждом контуре.

Для проверки полученного таким образом решения необходимо найти равнодействующие потока q по осям x и y — эти равнодействующие должны совпадать с силами Q_x и Q_y . Следует отметить, что такой статической проверки недостаточно для статически неопределимой системы — она не гарантирует правильности определения самоуравновешенных потоков q_{0j} . Существуют различные способы полной проверки решения, однако все они весьма громоздки. На практике обычно ограничиваются статической проверкой, а также проверкой правильности решения алгебраических уравнений (5.45), (5.51). Остановимся на одном из способов полной проверки ПКС q_{0j} . Существо его заключается в том, что каждый контур многозамкнутой оболочки разрезается в другом месте и задача решается снова. Очевидно, что суммарные ПКС

на соответствующих участках многозамкнутого контура в обоих случаях расчета должны быть одинаковыми.

Для иллюстрации описанной схемы расчета рассмотрим два примера.

5.3.5. Примеры определения ПКС в оболочках с многозамкнутым контуром поперечного сечения

Пример 1. Определить ПКС в трехзамкнутой оболочке, нагруженной поперечной силой $Q_y = Q$ (рис. 5.22). Упругие и геометрические характеристики сечения оболочки приведены в условии примера 2, рассмотренного ранее в разд. 5.2.3.

Превратим трехзамкнутый контур сечения оболочки в открытый, вводя разрезы в точках 1, 13, 14 (см. рис. 5.22). Так как в точке 1 имеется стрингер, то для сохранения симметрии контура относительно оси y разрез введем таким образом, чтобы поперечное сечение его было разделено пополам.

Поток касательных сил в трехзамкнутой оболочке на основании (5.43) будет

$$q = q_Q + \bar{q}_1 q_{01} + \bar{q}_2 q_{02} + \bar{q}_3 q_{03}.$$

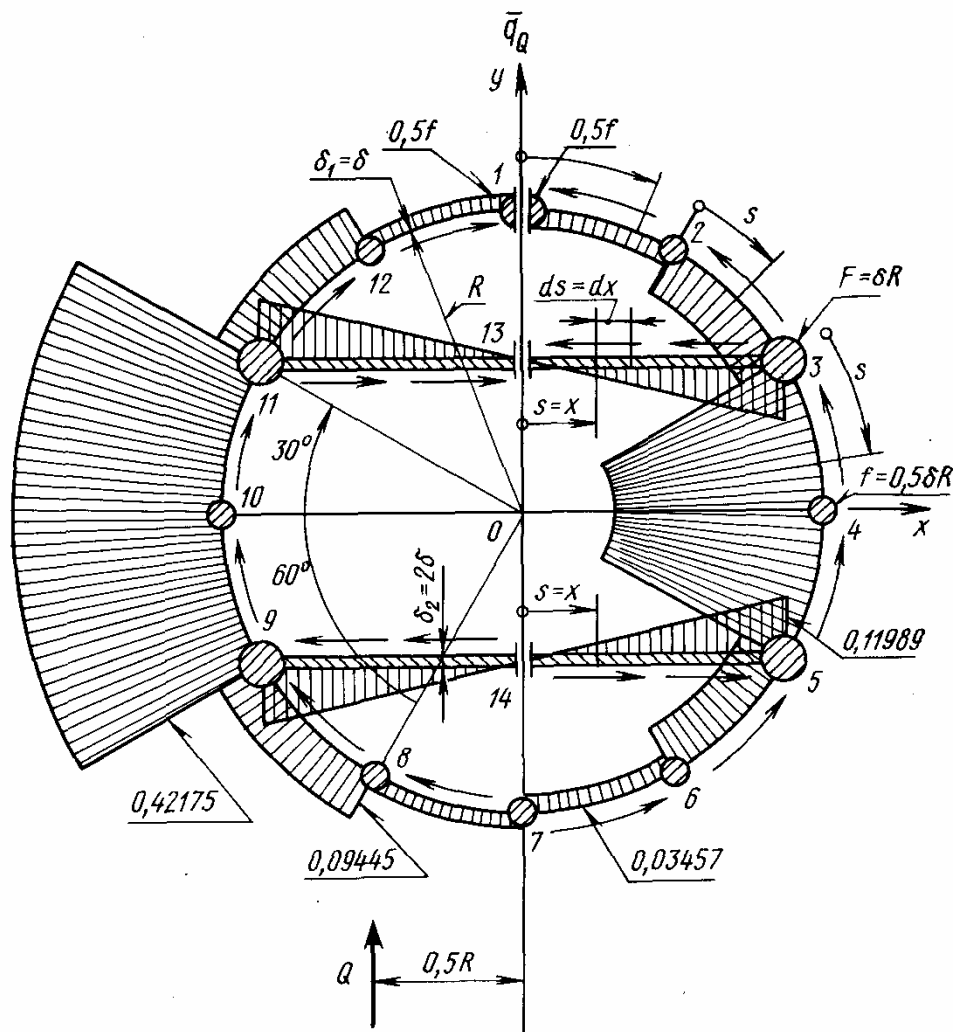


Рис. 5.22. Геометрические характеристики сечения и ПКС $\bar{q}_Q = q_Q \frac{R}{Q}$

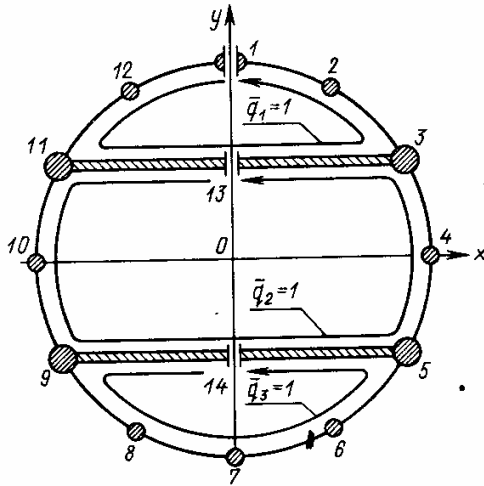


Рис. 5.23. Направления единичных потоков в контурах

Единичные потоки $\bar{q}_i$ показаны на рис. 5.23. Для определения ПКС q_Q вычислим обобщенные статические моменты отсеченных частей контура по первой формуле (5.26)

$$S_x = \int_0^s \varphi y \delta ds + \sum_{i=1}^m \varphi_i y_i f_i.$$

Напомним, что в рассматриваемом примере для стальных поясов лонжеронов 3, 5, 9, 11 $\varphi_n = 3$, а для остальных элементов сечения из алюминиевого сплава $\varphi = 1$.

На всех участках сечения движемся от разрезов по часовой стрелке.

Тогда

$$S_x^{1-s} = \varphi y_1 f_1 = \frac{1}{4} \delta R^2 \left(0 \leq s \leq \frac{\pi R}{6} \right),$$

где $y_1 = R$, $f_1 = \frac{1}{2} f = \frac{1}{4} \delta R$;

$$S_x^{2-s} = S_x^1 + \varphi y_2 f_2 = \frac{1}{4} \delta R^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \delta R^2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \delta R^2.$$

Здесь

$$0 \leq s \leq \frac{\pi R}{6} y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} R, \quad f_2 = \frac{1}{2} \delta R.$$

Для элемента стенки 13—3 имеем

$$dS_x = \varphi y_{13-3} 2\delta ds,$$

где $y_{13-3} = \frac{1}{2} R$.

В текущем сечении стенки

$$S_x^{13-s} = \int_0^s \varphi \frac{1}{2} R 2\delta ds = \delta R s \left(0 \leq s \leq \frac{\sqrt{3}}{2} R \right);$$

$$S_x^{s=\frac{\sqrt{3}}{2} R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta R^2.$$

На участке 3—s $\left(0 \leq s \leq \frac{\pi}{3} R \right)$

$$S_x^{3-s} = S_x^2 + S_x^{s=\frac{\sqrt{3}}{2} R} + \varphi_n y_3 f_3 = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \delta R^2 + \frac{3}{2} \delta R^2 = \frac{7 + 3\sqrt{3}}{4} \delta R^2,$$

где $y_3 = \frac{1}{2} R$, $f_3 = F = \delta R$.

Для участка $14 - s$

$$S_x^{14-s} = \int_0^s \varphi y_{14-s} 2\delta ds = -\delta R s \left(0 \leq s \leq \frac{\sqrt{3}}{2} R \right),$$

где $y_{14-s} = -\frac{1}{2} R$; $S_x^{s=\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \delta R^2$.

На остальных участках сечения подсчет обобщенных статических моментов проводится аналогично:

$$S_x^{5-s} = S_x^{2-s} = -S_x^{8-s} = -S_x^{11-s},$$

$$S_x^{6-s} = S_x^{1-s} = -S_x^{7-s} = -S_x^{12-s}$$

и т. д.

Определим ПКС q_Q :

$$q_Q = -k \frac{Q_y}{I_x} S_x.$$

Здесь $k = 1$, $I_{0x} = I_x = (5,5 + \sqrt{3}) \delta R^3 = 7,232\delta R^3$ (см. разд. 5.2.3, пример 2),

$$q_Q^{1-s} = q_Q^{6-s} = -\frac{1}{4(5,5 + \sqrt{3})} \frac{Q}{R} = -0,03457 \frac{Q}{R};$$

$$q_Q^{2-s} = q_Q^{5-s} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{4(5,5 + \sqrt{3})} \frac{Q}{R} = -0,09445 \frac{Q}{R};$$

$$q_Q^{13-s} = -q_Q^{14-s} = -\frac{1}{(5,5 + \sqrt{3})} \frac{Q}{R^2} s = -0,13828 \frac{Q}{R^2} s;$$

$$q_Q^{s=\frac{\sqrt{3}}{2}R} = -\frac{\sqrt{3}}{2(5,5 + \sqrt{3})} \frac{Q}{R} = -0,11989 \frac{Q}{R};$$

$$q_Q^{3-s} = -\frac{7 + 3\sqrt{3}}{4(5,5 + \sqrt{3})} \frac{Q}{R} = -0,42175 \frac{Q}{R}$$

и т. д.

Распределение потока касательных сил q_Q показано на рис. 5.22.

Перейдем к определению потоков q_{01} , q_{02} и q_{03} . Разрешающая система уравнений состоит из уравнения моментов (5.45) и трех уравнений (5.51), т. е.

$$\Omega_1 q_{01} + \Omega_2 q_{02} + \Omega_3 q_{03} + \oint q_Q \rho ds = Q x_Q,$$

$$a_{11} q_{01} + a_{12} q_{02} + a_{13} q_{03} + a_{Q1} = \Omega_1 \theta,$$

$$a_{21} q_{01} + a_{22} q_{02} + a_{23} q_{03} + a_{Q2} = \Omega_2 \theta,$$

$$a_{31} q_{01} + a_{32} q_{02} + a_{33} q_{03} + a_{Q3} = \Omega_3 \theta.$$

(5.53)

Подсчитаем входящие в эту систему коэффициенты. Площадь сектора с центральным углом α определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha).$$

В результате получим

$$\Omega_1 = \Omega_3 = 2S = R^2 \left(\frac{2}{3} \pi - \sin \frac{2}{3} \pi \right) = 1,227 R^2,$$

$$\Omega_2 = 2 (\pi R^2 - 2S) = 3,825 R^2.$$

Координата нагрузки $x_Q = -0,5R$. Коэффициенты a_{ti} и a_{Qi} вычисляются по формулам (5.50). Направление единичных потоков $\bar{q}_i$ ($i = 1, 2, 3$) показано на рис. 5.23:

$$a_{11} = a_{33} = \oint_{s_1} \frac{\bar{q}_1^2 ds}{G\delta} = \frac{2}{G} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{R d\alpha}{\delta} + \frac{\sqrt{3} R}{4\delta} \right) = 2,959 \frac{R}{G\delta};$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = \int_{s_{2-11}} \frac{\bar{q}_1 \bar{q}_2 ds}{G\delta} = -\frac{1}{G\delta} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} R} ds = -0,866 \frac{R}{G\delta};$$

$$a_{13} = a_{31} = 0;$$

$$a_{22} = \oint_2 \frac{\bar{q}_2^2 ds}{G\delta} = \frac{4}{G} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} R} \frac{ds}{2\delta} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{R d\alpha}{\delta} \right) = 3,825 \frac{R}{G\delta}.$$

Так как поток касательных сил q_Q симметричен относительно оси y , то

$$a_{Q1} = a_{Q3} = \oint_1 \frac{q_Q \bar{q}_1}{G\delta} ds = 0, \quad a_{Q2} = \oint_2 \frac{q_Q \bar{q}_2}{G\delta} ds = 0$$

и момент, создаваемый этим потоком относительно продольной оси, проходящей через начало координат, обращается в нуль, т. е.

$$\oint q_Q \rho ds = 0.$$

Подставляя в систему (5.53) вычисленные коэффициенты, получим

$$1,227 q_{01} + 3,825 q_{02} + 1,227 q_{03} = -0,5 \frac{Q}{R},$$

$$2,959 q_{01} - 0,866 q_{03} = 1,227 R G \delta \theta,$$

$$-0,866 q_{01} + 3,825 q_{02} - 0,866 q_{03} = 3,825 R G \delta \theta,$$

$$-0,866 q_{02} + 2,959 q_{03} = 1,227 R G \delta \theta.$$

Решение этой системы, записанное в форме (5.52), имеет вид

$$q_{01} = q_{03} = 0,8154 R G \delta \theta, \quad q_{02} = 1,3702 R G \delta \theta.$$

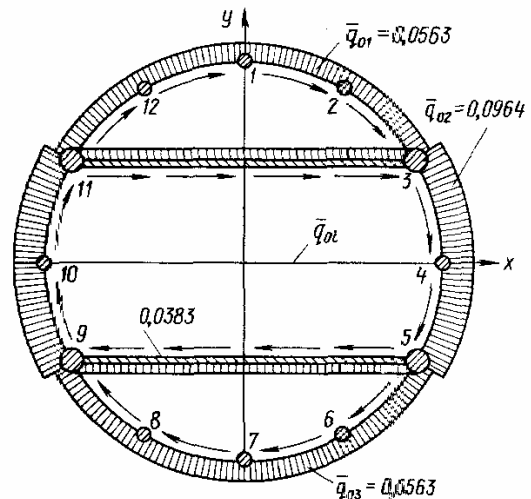
Из первого уравнения системы (5.53) находим распределенный угол закручивания

$$\theta = -0,06904 \frac{Q}{R^2 G \delta}$$

и определяем ПКС

$$q_{01} = q_{03} = -0,0563 \frac{Q}{R},$$

$$q_{02} = -0,0946 \frac{Q}{R}.$$



Распределение q_{0i} показано на рис. 5.24.

Рис. 5.24. Распределение ПКС

$$\bar{q}_{0i} = q_{0i} \frac{R}{Q} \text{ по сечению}$$

Суммируя эти потоки с потоком q_Q по отдельным участкам,

получаем полные ПКС q , действующие в сечении. Распределение суммарного потока касательных сил показано на рис. 5.25.

Пример 2. Рассмотрим определение потоков касательных сил от поперечной силы $Q_y = Q$ в двухзамкнутой оболочке несимметричного контура (см. рис. 5.9), приведенной в примере 3

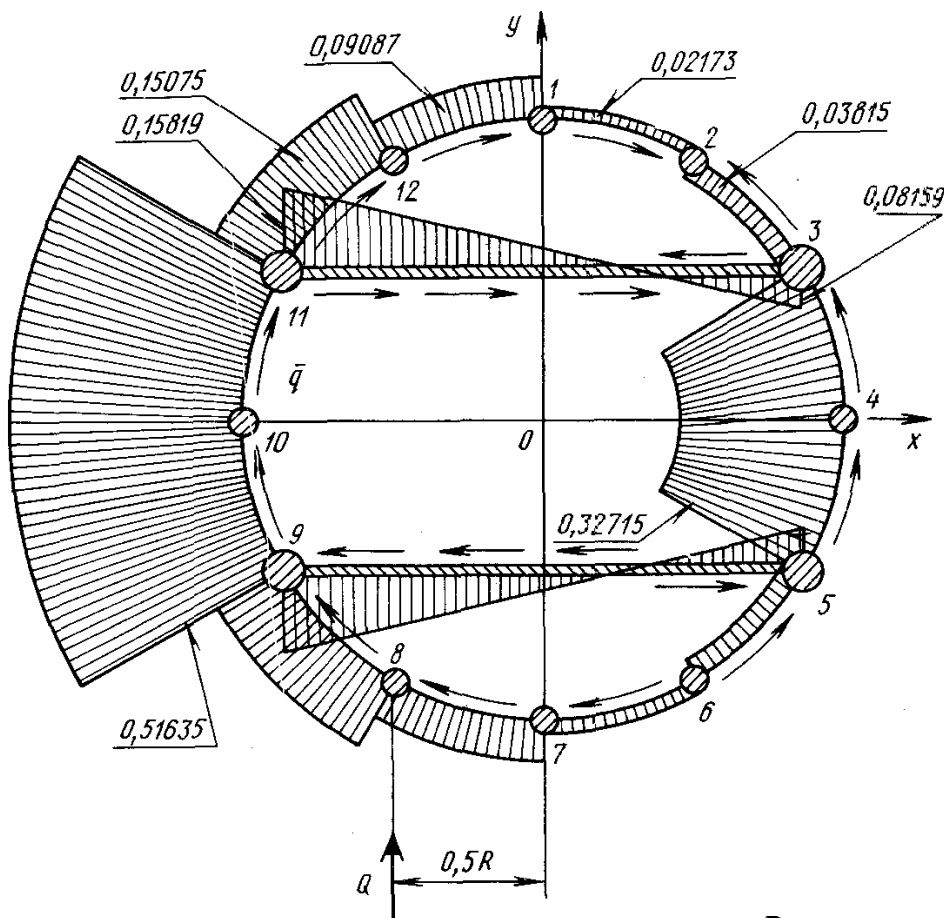


Рис. 5.25. Распределение суммарного ПКС $\bar{q} = q \frac{R}{Q}$ по сечению

разд. 5.2.3, при тех же упругих и геометрических характеристиках.

Схема решения этой задачи аналогична предыдущей и излагается более кратко. Искомые потоки касательных сил представляются в виде

$$q = q_Q + \bar{q}_1 q_{01} + \bar{q}_2 q_{02},$$

ПКС q_Q вычисляется по формуле

$$q_Q = -k \frac{Q_y}{I_{0x}} \tilde{S}_x.$$

Здесь $k = 1,01$; $I_{0x} = 2,67\delta b^3$.

Для определения $\tilde{S}_x$ введем разрезы в обшивке вдоль образующих оболочки справа и слева от пояса переднего лонжерона в точке 5 (рис. 5.26). Имеем

$$\tilde{S}_x = \sum_{i=1}^m \varphi_i \tilde{y}_i F_i.$$

Обход каждого из двух открытых контуров проводится от точки 5 против часовой стрелки. Вычисление обобщенных статических моментов и потоков касательных сил в открытом контуре q_Q сведено в табл. 5.2. Распределение потока q_Q показано на рис. 5.26.

Составим разрешающую систему уравнений для определения потоков q_{01} и q_{02} (направления потоков $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$ показаны на рис. 5.27, а):

$$\Omega_1 q_{01} + \Omega_2 q_{02} + \sum_{i=1}^n q_Q \rho_i s = -Q(x_p - x_Q),$$

$$a_{11} q_{01} + a_{12} q_{02} + a_{Q1} = \Omega_1 \theta,$$

$$a_{21} q_{01} + a_{22} q_{02} + a_{Q2} = \Omega_2 \theta$$

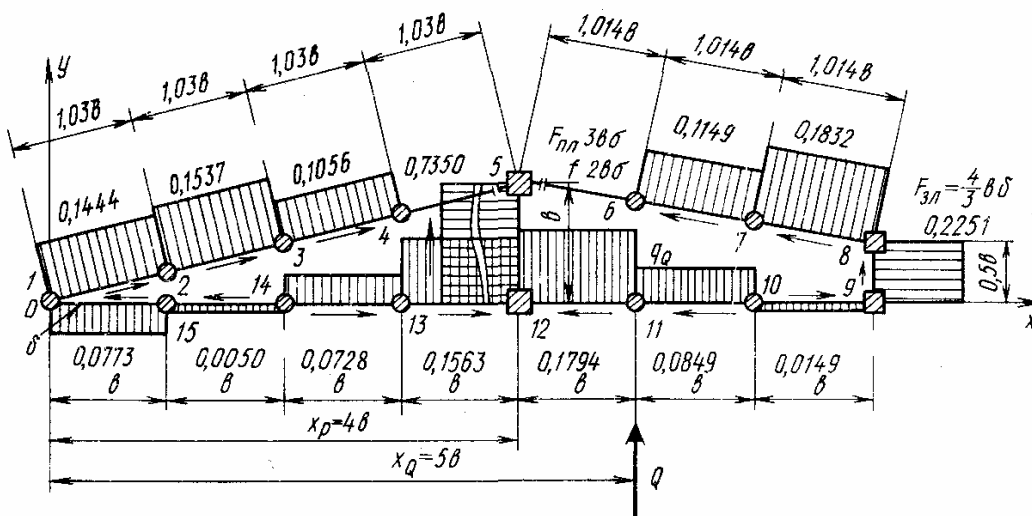


Рис. 5.26. Геометрические характеристики сечения и распределение ПКС $\bar{q}_Q = q_Q \frac{b}{Q}$

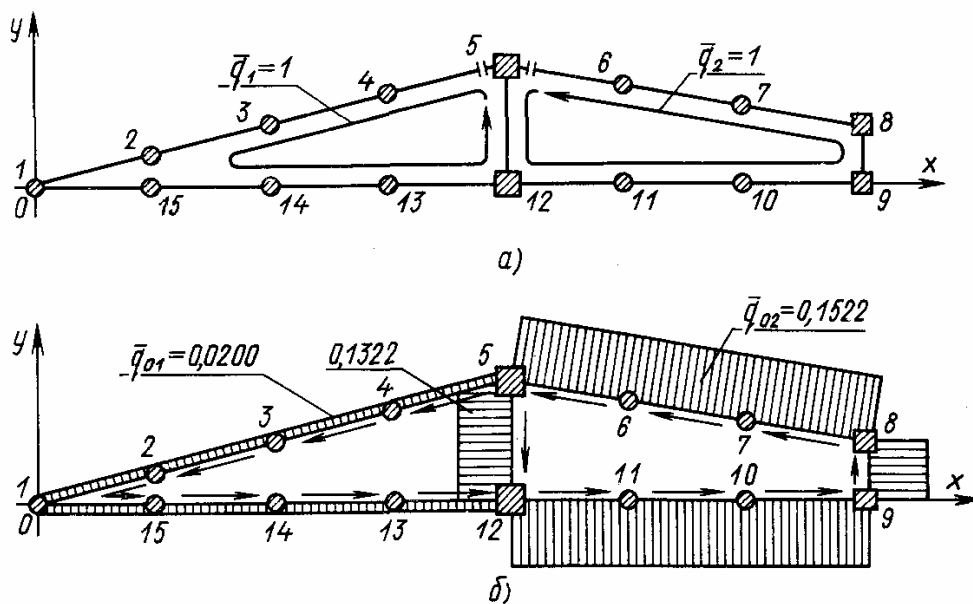


Рис. 5.27. Принятые направления единичных потоков $\bar{q}_i$ (а) и распределение ПКС $\bar{q}_{0i} = \bar{q}_{0i} \frac{b}{Q}$ (б) по сечению

$$\text{или } 4q_{01} + 4,5q_{02} + 0,2350 \frac{Q}{b} = \frac{Q}{b},$$

$$9,12q_{01} - q_{02} + 0,4660 \frac{Q}{b} = 4bG \delta\theta,$$

$$-q_{01} + 7,54q_{02} - 0,5695 \frac{Q}{b} = 4,5bG \delta\theta.$$

Решая совместно второе и третье уравнения, находим

$$q_{01} = -0,0434 \frac{Q}{b} + 0,5115bG \delta\theta,$$

$$q_{02} = 0,0698 \frac{Q}{b} + 0,6646bG \delta\theta.$$

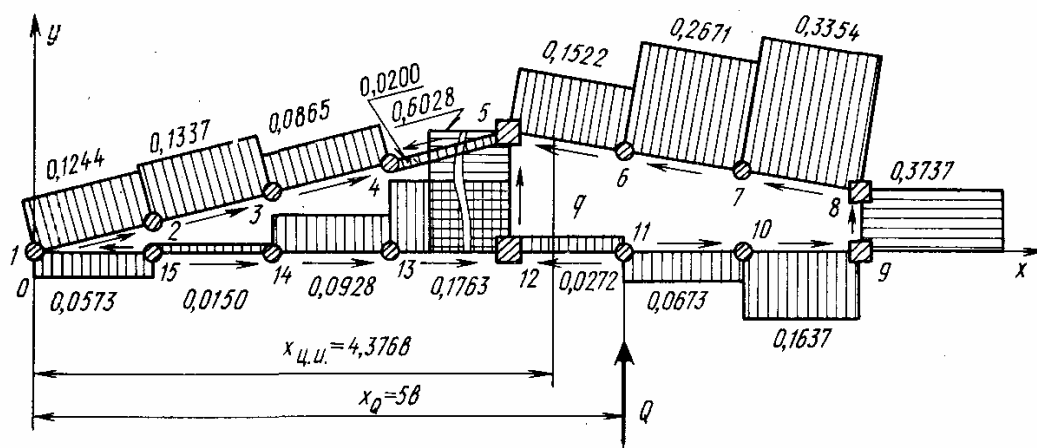


Рис. 5.28. Распределение суммарного ПКС $\bar{q} = q \frac{b}{Q}$ по сечению

Таблица 5.2

Определение потоков касательных усилий в двухзамкнутой оболочке

№ эле- мента	$\frac{F_i}{\delta b}$	$\frac{\Phi_i F_i}{\delta b}$	$\frac{\bar{y}_i}{b}$	№ участка	$\frac{\Delta \bar{S}_x}{\delta b^2}$	$\frac{\bar{S}_x}{\delta b^2}$	$q_Q \frac{b}{Q}$	$q_{0i} \frac{b}{Q}$	$q \frac{b}{Q}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	2	0,667	0,419	I контур	0	0	0	0,0200	0,0200
3	2	0,667	0,191		0,2793	0,2793	-0,1056	0,0200	-0,0856
2	2	0,667	-0,037		0,1273	0,4066	-0,1537	0,0200	-0,1337
1	2	0,667	-0,266		-0,0247	0,3819	-0,1444	0,0200	-0,1244
15	2	0,667	-0,287		-0,1773	0,2046	-0,0773	0,0200	-0,0573
14	2	0,667	-0,309	II контур	-0,1913	0,0133	-0,0050	0,0200	0,0150
13	2	0,667	-0,331		-0,2060	-0,1927	0,0728	0,0200	0,0928
5	3	3	0,648		-0,2207	-0,4134	0,1563	0,0200	0,1763
12	3	3	-0,352		+1,9440	1,9440 *	-0,7350	0,1322	-0,6028
11	2	0,667	-0,375		-1,0560		-0,1794	0,1522	-0,0272
10	2	0,667	-0,394	II контур	-0,2504	0,4746	-0,0849	0,1522	0,0673
9	1,33	1,33	-0,417		-0,2640	0,2246	0,0149	0,1522	0,1671
8	1,33	1,33	0,083		-0,5560	-0,0394	0,2251	0,1522	0,3773
7	2	0,667	0,271		0,1107	-0,5954	0,1832	0,1522	0,3354
6	2	0,667	0,458		0,1807	-0,4847	0,1149	0,1522	0,2671
					0,3053	-0,3040	0	0,1522	0,1522
						0,00130			

* Стенка 5—12 с площадью F_5 и F_{12} отнесена ко второму контуру. Отметим, что на участке 12—11 $\bar{S}_x$ вычисляется по формуле $\bar{S}_x(12-11) = \bar{S}_x(12-13) + \bar{S}_x(5-12) + \bar{S}_x(12-11)$.

Подставляя эти потоки в первое уравнение, получаем

$$\theta = 0,124 \frac{Q}{b^2 G \delta}.$$

Следовательно,

$$q_{01} = 0,0200 \frac{Q}{b}; \quad q_{02} = 0,1522 \frac{Q}{b}.$$

Значения q_{0i} и полных потоков q по участкам приведены в табл. 5.2. Распределение потоков касательных сил q_{0i} и q приведены на рис. 5.27, б и 5.28.

5.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА ИЗГИБА СЕЧЕНИЯ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Выше в разд. 5.3.2 при рассмотрении оболочек с открытым контуром поперечного сечения было введено понятие центра изгиба как точки, через которую проходит равнодействующая потока касательных сил. Оболочки с открытым контуром могут быть рассчитаны по балочной теории, если поперечные силы проходят через центр изгиба. Оболочки с замкнутым и многозамкнутым контуром поперечного сечения могут быть рассчитаны при любом положении поперечных сил, однако и для них можно ввести понятие центра изгиба.

Центром изгиба называется такая точка сечения оболочки, которая обладает тем свойством, что поперечная сила, проходящая через нее, вызывает изгиб тонкостенной конструкции без закручивания. При произвольном нагружении поперечными силами тонкостенные системы изгибаются и закручиваются. При этом каждое поперечное сечение оболочки имеет линейные перемещения по осям x , y в своей плоскости и поворачивается относительно оси z . Если поперечная нагрузка приложена в центре изгиба, то поперечное сечение тонкостенной конструкции имеет только линейные перемещения и не поворачивается. Следовательно, распределенный угол закручивания равен нулю, т. е. $\theta = 0$.

Для определения абсциссы центра изгиба $x_{ц.и}$ следует предположить, что в рассматриваемом сечении действует сила, равная Q_y ($Q_x = M_z = 0$), проходящая через центр изгиба. Тогда поток касательных сил определяется формулой, аналогичной (5.43), т. е.

$$q = q_Q + \sum_{i=1}^n \bar{q}_i q'_{0i}.$$

Поток q_Q не зависит от положения силы Q_y , а потоки q_{0i} , соответствующие силе, проходящей через центр изгиба, отмечены штрихом. Для определения потоков q'_{0i} и координаты центра изгиба $x_{ц.и}$ следует воспользоваться уравнением моментов, в котором

необходимо принять $Q_x = M_z = 0$, $x_Q = x_{ц.н.}$, и уравнениями (5.51), где необходимо положить $\theta = 0$. В результате получим следующую систему:

$$\sum_{i=1}^n q'_{0i} \Omega + \oint q_Q \rho ds = -Q_y (x_p - x_{ц.н.}); \quad (5.54)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} q'_{0i} + a_{Qj} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (5.55)$$

Из уравнений (5.55) находятся q'_{0i} , а затем из уравнения (5.54) — $x_{ц.н.}$.

Для определения ординаты центра изгиба $y_{ц.н.}$ следует предположить, что в сечении действует сила, равная Q_x и проходящая через центр изгиба. В этом случае потоки q'_{0i} также находятся из системы (5.55), а $y_{ц.н.}$ — из уравнения моментов, аналогичного (5.54), т. е.

$$\sum_{i=1}^n q'_{0i} \Omega_i + \oint q_Q \rho ds = Q_x (y_p - y_{ц.н.}). \quad (5.56)$$

Отметим, что положение центра изгиба в оболочках с однозамкнутым и многозамкнутым контурами не зависит от действующей нагрузки и определяется геометрическими и жесткостными характеристиками сечения. В тонкостенных конструкциях с замкнутым контуром так же, как и в оболочках открытого профиля, геометрическое место центров изгиба образует ось изгиба или ось жесткости, которая для цилиндрических оболочек с одинаковыми сечениями параллельна продольной оси. Если сечение тонкостенной системы симметрично, то центр изгиба всегда лежит на оси симметрии.

Реальные тонкостенные конструкции летательных аппаратов обычно рассчитывают на несколько вариантов нагружения. Расчеты проводятся по ряду типовых сечений. В этом случае для сокращения вычислительной работы необходимо сначала найти центр изгиба в каждом сечении, а затем определить и построить эпюры потоков касательных сил от условных нагрузок, например, от единичного крутящего момента $M_{кр} = 1$ и единичных усилий $Q'_x = 1$ и $Q'_y = 1$, приложенных в центре изгиба. Затем действительные нагрузки в каждом сечении приводятся к центру изгиба, находится крутящий момент относительно центра изгиба и осуществляется определение касательных напряжений.

В качестве примера найдем центр изгиба сечения, показанного на рис. 5.17 (см. примеры в разд. 5.3.2 и 5.3.3). Распределение потока q_Q , вызванного действием силы $Q_y = Q$, приведено на рис. 5.15. Предположим, что сила Q проходит через центр изгиба и найдем $x_{ц.н.}$ (в силу симметрии сечения $y_{ц.н.} = 0$). Направим

ток q_0' против часовой стрелки и составим уравнение моментов относительно точки I . Получим (см. рис. 5.15, 5.17)

$$q_0' BH + \frac{3Q}{2H} HB = Qx_{ц.н.} \quad (5.57)$$

Уравнение (5.55) для случая $n = 1$ имеет вид

$$q_0' \oint \frac{ds}{G\delta} + \oint \frac{q_Q ds}{G\delta} = 0.$$

Отсюда окончательно получим

$$q_0' = - \frac{Q(B + 6H \cos \alpha)}{2H(B + 2H \cos \alpha)}.$$

И из уравнения (5.57)

$$x_{ц.н.} = \frac{B^2}{B + 2H \cos \alpha}.$$

5.5. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Ранее была построена балочная теория подкрепленных оболочек с не изменяющимися по длине геометрическими характеристиками сечения. Однако реальные конструкции типа крыла или корпуса летательного аппарата часто обладают переменным сечением.

Рассмотрим подкрепленные усеченные конические оболочки произвольного поперечного сечения с недеформируемым контуром. Все образующие таких оболочек пересекаются в одной точке — вершине конуса, а осью его является прямая линия, проходящая через вершину и центры тяжести поперечных сечений рис. 5.29.

Известно, что поперечные сечения в конических оболочках получаются пересечением срединной поверхности со сферами с центрами в вершине конуса.

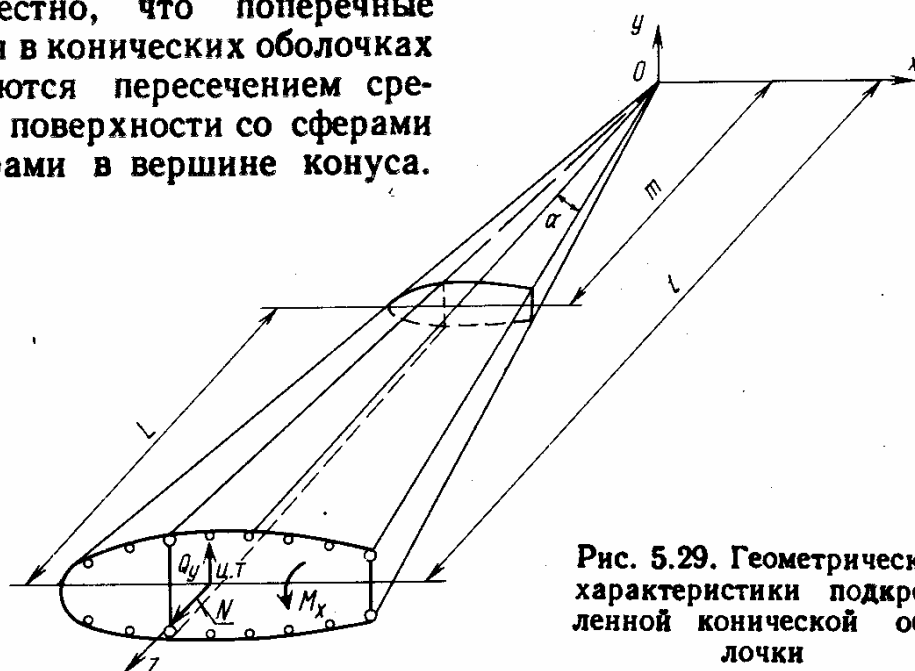


Рис. 5.29. Геометрические характеристики подкрепленной конической оболочки

Если конус не круговой, то контур поперечного сечения не является плоской кривой. Для упрощения задачи ограничимся рассмотрением слабоконических оболочек с малым углом конусности ($2\alpha \ll 32^\circ$ рис. 5.29), для которых можно считать, что $\cos \alpha \approx 1$ и $\sin \alpha \approx \alpha$. Это допущение позволяет приближенно считать поперечные сечения плоскими и перпендикулярными к оси конуса.

Начало прямоугольной системы координат помещаем в вершине конуса. Поскольку все сечения подобны, то геометрические характеристики поперечных сечений конической оболочки можно выразить через геометрические характеристики любого произвольно выбранного сечения. В качестве такого сечения выберем сечение $z = l$. Тогда для любого сечения $z = \text{const}$ получим (см. рис. 5.29)

$$x(s) = \frac{z}{l} x_l(s_l), \quad y(s) = \frac{z}{l} y_l(s_l). \quad (5.58)$$

Индексом l отмечены координаты, относящиеся к сечению $z = l$.

Ограничимся рассмотрением особенностей, вносимых в расчет учетом конусности оболочки. Для простоты будем считать, что сечение $z = \text{const}$ отнесено к центральным осям x , y и нагрузки в нем сведены к изгибающему моменту M_x , поперечной силе Q_y и осевой силе N , приложенным в центре тяжести (см. рис. 5.29). Примем также, что толщина обшивки δ не зависит от переменной z , а площади подкрепляющих элементов $F_l(z)$ линейно выражаются через соответствующие характеристики сечения $z = l$, т. е.

$$F_l(z) = \frac{z}{l} F_l^l.$$

Для оболочек с малой конусностью нормальные напряжения по-прежнему определяются равенством (5.21), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\sigma_i = \varphi_i \left(k \frac{M_x}{I_{0x}} \tilde{y}_i + \frac{N}{F} \right), \quad (5.59)$$

где $\tilde{y}_i = y_i - x_i \frac{I_{0xy}}{I_{0y}}$, а k определяется соотношением (5.22).

В отличие от призматических оболочек в конических нормальные напряжения направлены по образующим, не параллельным оси z , а геометрические характеристики сечения не постоянны и выражаются через соответствующие характеристики сечения $z = l$ по формулам

$$I_{0x} = \left(\frac{z}{l} \right)^3 I_{0x}^l, \quad I_{0y} = \left(\frac{z}{l} \right)^3 I_{0y}^l, \quad I_{0xy} = \left(\frac{z}{l} \right)^3 I_{0xy}^l, \quad F = \frac{z}{l} F_l. \quad (5.60)$$

Величины с индексом l определяются равенствами (5.15), (5.16), в которых x и y следует заменить на x_l , y_l .

Для потока касательных сил справедлива формула (5.24), которую с учетом (5.59) можно записать в виде (предполагается, что $N = \text{const}$)

$$q = q_y + q_0(z), \quad (5.61)$$

где

$$q_y = - \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial z} \delta ds = - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{M_x}{I_{0x}} \tilde{S}_x \right). \quad (5.62)$$

Следует иметь в виду, что обобщенный статический момент отсеченной части контура $\tilde{S}_x$ является функцией z и может быть выражен через соответствующую характеристику сечения $z = l$, т. е.

$$\tilde{S}_x = \left(\frac{z}{l} \right)^2 \tilde{S}_x^l. \quad (5.63)$$

Здесь $\tilde{S}_x^l$ определяется по первой формуле (5.26), если заменить в ней $\tilde{y}$ на

$$\tilde{y}_l = y_l - x_l \left(\frac{I_{0xy}^l}{I_{0y}^l} \right).$$

Таким образом, из равенства (5.62) имеем

$$q_y = -k \left[\frac{dM_x}{dz} \frac{\tilde{S}_x}{I_{0y}} + M_x \frac{d}{dz} \left(\frac{\tilde{S}_x}{I_{0x}} \right) \right]. \quad (5.64)$$

На основании соотношений (5.5) и (5.60), (5.63) получим, что

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y, \quad \frac{\tilde{S}_x}{I_{0x}} = \frac{l}{z} \frac{\tilde{S}_x^l}{I_{0x}^l},$$

т. е. равенство (5.64) принимает вид

$$q_y = -k \left(\frac{Q_y}{I_{0x}} \tilde{S}_x - M_x \frac{l}{z^2} \frac{\tilde{S}_x^l}{I_{0x}^l} \right) = -k \left(Q_y - \frac{M_x}{z} \right) \frac{\tilde{S}_x}{I_{0x}}.$$

Вводя обозначение

$$\tilde{Q}_y = Q_y - \frac{M_x}{z}, \quad (5.65)$$

окончательно получим

$$q_y = -k \frac{\tilde{Q}_y}{I_{0x}} \tilde{S}_x. \quad (5.66)$$

Равенство (5.66) отличается от соотношения (5.28), соответствующего цилиндрической оболочке, наличием второго слагаемого в формуле (5.65). Это отличие вызвано тем, что в конической оболочке поперечная сила уравнивается не только касательными напряжениями в обшивке, но и нормальными напряже-

ниями, вызванными изгибающим моментом. Действительно, согласно рис. 5.30 имеем

$$\Delta Q_y = \oint \sigma \sin \alpha \delta ds.$$

Учитывая, что $\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{y}{z}$ и

$$\sigma = \varphi k \frac{M_x}{I_{0x}} \tilde{y}, \quad I_{0x} = \oint \varphi \tilde{y}^2 \delta ds$$

(для главных центральных осей), получим

$$\Delta Q_y = k \frac{M_x}{z I_{0x}} \oint \varphi \tilde{y}^2 \delta ds = k \frac{M_x}{z}.$$

Таким образом, при поперечном изгибе конической оболочки нормальные напряжения, возникающие в продольных элементах и обшивке, разгружают стенки и обшивку от касательных напряжений. Этот эффект может быть весьма значительным, например, если оболочка изгибается силой Q_y , приложенной в вершине O (см. рис. 5.30), то $M_x = Q_y z$ и согласно (5.65), (5.66) $\tilde{Q}_y = 0$ и $q_y = 0$. С другой стороны, из равенств (5.65) и (5.66) следует, что при чистом изгибе конической оболочки (т. е. при $Q_y = 0$) в обшивке и стенках возникает поток касательных сил q_y .

Итак, ПКС в конической оболочке согласно (5.61) и (5.65), (5.66) имеет вид

$$q = -k \left(Q_y - \frac{M_x}{z} \right) \frac{\tilde{S}_x}{I_{0x}} + q_0. \quad (5.67)$$

Поток q_0 , например для однозамкнутого контура, находится, как и ранее, из уравнения моментов. При этом момент целесообразно вычислять относительно точки пересечения оси z с плоскостью сечения. В этом случае в уравнение моментов не войдут моменты, создаваемые проекциями нормальных напряжений на плоскость сечения, т. е. оно будет иметь такой же вид, как и для цилиндрической оболочки.

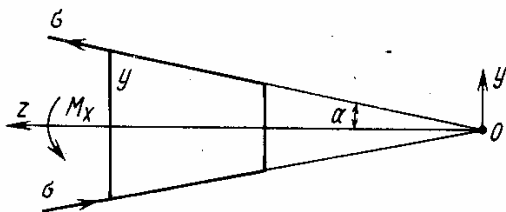


Рис. 5.30. К выводу формулы для ΔQ_y

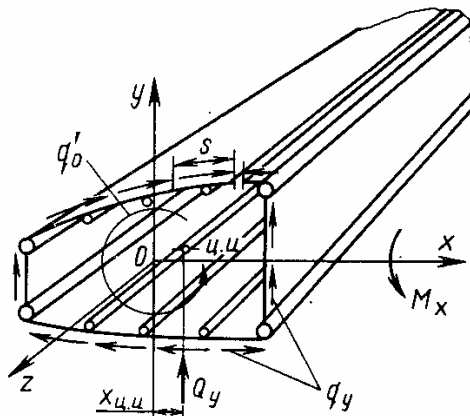


Рис. 5.31. К определению положения центра изгиба в сечении конической оболочки

При чистом кручении для конической оболочки справедлива формула Бредта (5.41), т. е.

$$q(z) = q_0 = \frac{M_z}{\Omega(z)}, \quad (5.68)$$

где $\Omega(z)$ — удвоенная площадь, ограниченная контуром рассматриваемого сечения.

Рассмотрим определение центра изгиба однозамкнутого сечения конической оболочки.

Ранее отмечалось (см. разд. 5.4), что через центр изгиба (центр жесткости) проходит равнодействующая касательных сил, развивающихся в сечении оболочки, которая не вызывает его поворота. Если известно положение центра жесткости в сечении оболочки, то можно рассматривать отдельно решение задач изгиба и кручения путем приведения заданных внешних сил к равнодействующей, проходящей через центр изгиба, и к крутящему моменту относительно центра изгиба.

Для нахождения координат центра изгиба в однозамкнутом сечении оболочки с малой конусностью (рис. 5.31) необходимо решить совместно уравнение моментов типа (5.54) и уравнение циркуляции потоков касательных сил при $\theta = 0$ (5.55). Как было показано ранее, особенность расчета конических оболочек состоит в том, что касательные напряжения определяются не только действующей в сечении поперечной силой Q_y , но и зависят от изгибающего момента M_x . Уравнение крутящих моментов существенно упростится, если выбрать полюс, как указывалось выше, в точке пересечения оси конуса и сечения оболочки. При этом уравнение моментов, из которого определяется абсцисса центра изгиба, имеет вид, аналогичный (5.54)

$$q'_0 \Omega + \oint q_y \rho ds = Q_y x_{ц.н.}, \quad (5.69)$$

где q'_0 — поток касательных сил при действии силы Q_y в центре изгиба, который определяется из уравнения (5.55), т. е.

$$a_{11} q'_0 + a_{Q1} = 0.$$

С учетом выражений (5.50) для коэффициентов это уравнение принимает вид

$$q'_0 \oint \frac{ds}{G\delta} + \oint \frac{q_y ds}{G\delta} = 0. \quad (5.70)$$

В результате решения уравнений (5.69) и (5.70) с учетом равенства (5.67) находим

$$x_{ц.н.} = \frac{k\Omega}{I_{0x}} \left(1 - \frac{M_x}{zQ_y} \right) \frac{\oint \frac{\tilde{S}_x ds}{G\delta}}{\oint \frac{ds}{G\delta}} - \frac{k}{I_{0x}} \left(1 - \frac{M_x}{zQ_y} \right) \oint \tilde{S}_x \rho ds. \quad (5.71)$$

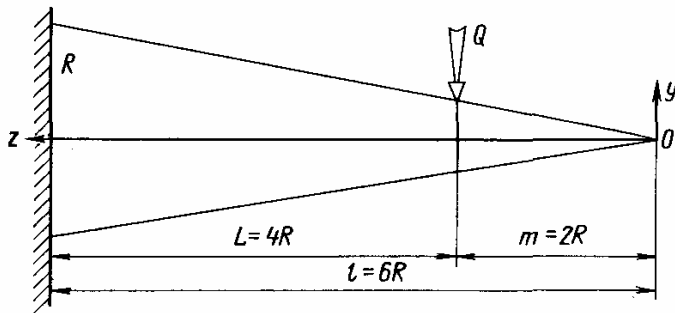


Рис. 5.32. Геометрические характеристики и схема нагружения круговой конической оболочки

Аналогично определяется координата

$$y_{ц.к} = -\frac{k\Omega}{I_{oy}} \left(1 - \frac{M_y}{zQ_x}\right) \times \oint \frac{\tilde{S}_y ds}{G\delta} \times \frac{s}{\oint \frac{ds}{G\delta}} + \frac{k}{I_{oy}} \left(1 - \frac{M_y}{zQ_x}\right) \times \oint \tilde{S}_y \rho ds. \quad (5.72)$$

Из формул (5.71) и (5.72) видно, что координаты центра изгиба в однозамкнутых (а также и в многозамкнутых) контурах конических оболочек в отличие от цилиндрических зависят не только от геометрических и жесткостных характеристик сечения, но и от действующих нагрузок и продольной координаты сечения. Поэтому положение центра изгиба в конических оболочках может меняться в довольно широких пределах. Вместе с тем следует отметить, что в оболочках малой конусности существует центр жесткости (и соответственно ось жесткости) в том же смысле, как и в призматических, что дает возможность производить отдельно расчет напряжений и деформаций при изгибе и кручении.

В качестве примера рассмотрим круговую коническую оболочку, нагруженную поперечной силой $Q_y = -Q$ в сечении $z = m = 2R$ (рис. 5.32, 5.33). Обшивка с толщиной δ и стрингеры с площадью сечения $F = R\delta$ выполнены из одного материала. Обшивка воспринимает нормальные и касательные напряжения.

Найдем распределение потока касательных сил. Для рассматриваемой оболочки оси x, y являются главными центральными осями сечения ($k = 1, \tilde{y} = y$), а $\varphi = 1$; ПКС определяется равенством (5.67), т. е.

$$q = -\left(Q_y - \frac{M_x}{z}\right) \frac{\tilde{S}_x}{I_{ox}} + q_0,$$

$$\text{где } \tilde{S}_x = \int_0^\beta y \delta R d\beta + \sum_{j=1}^m y_j F_j,$$

$$I_{ox} = 2 \int_0^\pi y^2 \delta R d\beta + 2 \sum_{j=1}^5 y_j^2 F_j.$$

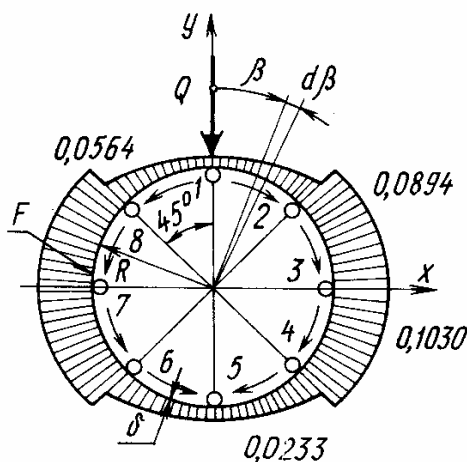


Рис. 5.33. Распределение ПКС $\bar{q} = q \frac{R}{Q}$ по сечению $z = l$

Сделаем мысленно разрез вдоль образующей в точке 1 и будем отсчитывать $\tilde{S}_x$ от этого разреза. В силу симметрии задачи относительно плос-

кости yoz в точке 1 $q = 0$, при этом $\tilde{S}_x = 0$ в этой точке и, следовательно, $q_0 = 0$. Будем рассматривать половину сечения, соответствующую $0 \leq \beta \leq \pi$, т. е. примем $F_1 = F_5 = 0,5R\delta$, $F_2 = F_3 = F_4 = R\delta$. Из рис. 5.32 имеем $Q_y = -Q$, $M_x = -Q(z - m)$, т. е. согласно (5.65)

$$\tilde{Q} = -Q \left(1 - \frac{z-m}{z} \right).$$

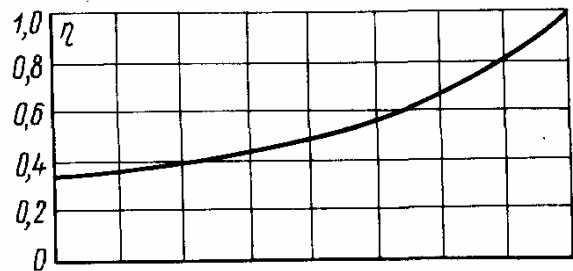


Рис. 5.34. Изменение параметра $\eta = -\frac{\tilde{Q}_y}{Q}$ по длине конической оболочки

Изменение параметра $\eta = -\frac{\tilde{Q}_y}{Q}$ по длине оболочки показано на рис. 5.34. Выразим геометрические характеристики сечения $z = \text{const}$ через характеристики сечения $z = l$. Согласно равенствам (5.60) и (5.63) получим

$$I_{0x} = \left(\frac{z}{l} \right)^3 I_{0x}^l, \quad \tilde{S}_x = \left(\frac{z}{l} \right)^2 S_x^l.$$

Учитывая, что $y_l = R \cos \beta$, найдем

$$I_{0x}^l = 2R^3\delta \int_0^\pi \cos^2 \beta d\beta + 2 \sum_{j=1}^5 F_j R^2 \cos^2 \beta_j = 7,1416R^3\delta.$$

Статический момент в точке 3, определяющий максимальное значение потока касательных сил в сечении

$$\tilde{S}_{x3}^l = \left(R^2\delta \int_0^{\pi/2} \cos \beta d\beta + \sum_{j=1}^3 F_j R \cos \beta_j \right) = 2,2071R^2\delta.$$

Таким образом, максимальное касательное усилие в сечении изменяется по длине оболочки согласно следующему соотношению:

$$q_{\max} = 0,309 \frac{Q}{R} \left(1 - \frac{z-m}{z} \right).$$

Распределение ПКС по контуру сечения $z = l$ показано на рис. 5.33.

ГЛАВА 6

РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ДЕПЛАНАЦИИ СЕЧЕНИЯ

6.1. ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ТИПА КЕССОНА ПРЯМОГО КРЫЛА

6.1.1. Основные определения

Рассмотрим среднюю часть прямого кессонного крыла, показанную на рис. 6.1. В гл. 5 был описан эффективный прикладной метод расчета конструкций такого рода, основанный на линейном распределении продольных деформаций по координатам x и y (5.1)

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} = a(z)x + b(z)y + c(z). \quad (6.1)$$

В результате интегрирования по z отсюда может быть получена формула (5.2), определяющая распределение продольных перемещений по контуру сечения

$$u = A(z)x + B(z)y + C(z) + f(x, y), \quad (6.2)$$

где $A = \int a dz$, $B = \int b dz$, $C = \int c dz$.

Первые три слагаемых в равенстве (6.2) соответствуют закону плоских сечений, а функция интегрирования $f(x, y)$ определяет отклонение от этого закона, т. е. так называемую депланацию сечения. В балочной теории, изложенной в гл. 5, функции $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ определялись непосредственно из условий равновесия, а функция $f(x, y)$ в решении не фигурировала. Причина этого связана с тем, что форма представления перемещения (6.1) исключает из рассмотрения случаи, когда депланация сечения зависит от переменной z , т. е. не позволяет учесть возможное локальное стеснение депланации. Если сечение, которое при свободной деформации не остается плоским, закрепить, т. е. наложить на него связи, препятствующие депланации, в конструкции возникают вторичные или дополнительные (по отношению к балочной теории) напряжения, учет которых часто оказывается необходимым для оценки ее прочности. Действительно, если вместо (6.2) принять

$$u = A(z)x + B(z)y + C(z) + f_1(x, y, z), \quad (6.3)$$

то согласно (6.1) и закону Гука $\sigma_z = E\varepsilon_z$ будем иметь

$$\sigma_z = E \left[a(z)x + b(z)y + c(z) + \frac{\partial f_1}{\partial z} \right]$$

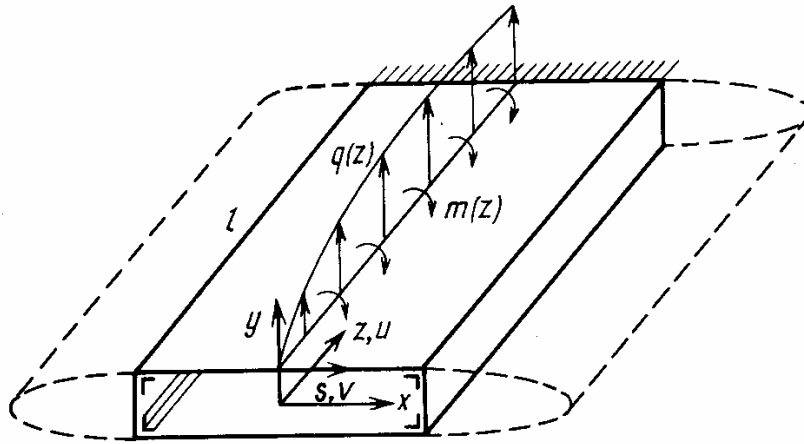


Рис. 6.1. Кессонное прямое крыло

и функция деформации $f_1(x, y, z)$ будет оказывать непосредственное влияние на распределение напряжений. Для кессона крыла, показанного на рис. 6.1, принципиальное различие равенств (6.2) и (6.3) имеет место вблизи жесткого защемления ($z = l$). Представление (6.3) при $A(0) = B(0) = C(0) = 0$ и $f_1(x, y, 0) \equiv 0$ позволяет точно сформулировать условия закрепления сечения $z = l$ ($u \equiv 0$), в то время как балочная теория позволяет обеспечить лишь условие $A(0) = B(0) = C(0) = 0$. Таким образом, если сечение в принципе имеет тенденцию к деформации (т. е. функции f или f_1 не равны тождественно нулю), то балочная теория не позволяет устранить деформацию сечения в жестком защемлении и выявить связанные с этим эффекты напряжения. Эти напряжения, как следует из изложенного выше, оказываются существенными в местах закрепления конструкции. Вдали от жесткого защемления напряженное состояние конструкций типа показанной на рис. 6.1 достаточно хорошо описывается балочной теорией. Таким образом, приводимый далее метод расчета, основанный на форме (6.3), не противоречит балочной теории, а позволяет уточнить аппроксимируемое этой теорией напряженное состояние вблизи закрепленного сечения.

6.1.2. Решение задачи в перемещениях

Рассмотрим случай изгиба кессона, показанного на рис. 6.1, поперечной нагрузкой $q(z)$. Представим продольное и контурное перемещение u и v (см. рис. 6.1) в форме следующих разложений, аналогичных (6.3):

$$u(z, s) = U_1(z) \varphi_1(s) + U_2(z) \varphi_2(s) + U_3(z) \bar{\varphi}_3(s), \quad (6.4)$$

$$v(z, s) = V_1(z) \psi_1(s).$$

Здесь $U_i(z)$ и $V_1(z)$ — неизвестные функции, подлежащие определению, а $\varphi_i(s)$ и $\psi_1(s)$ — заданные функции, определяющие

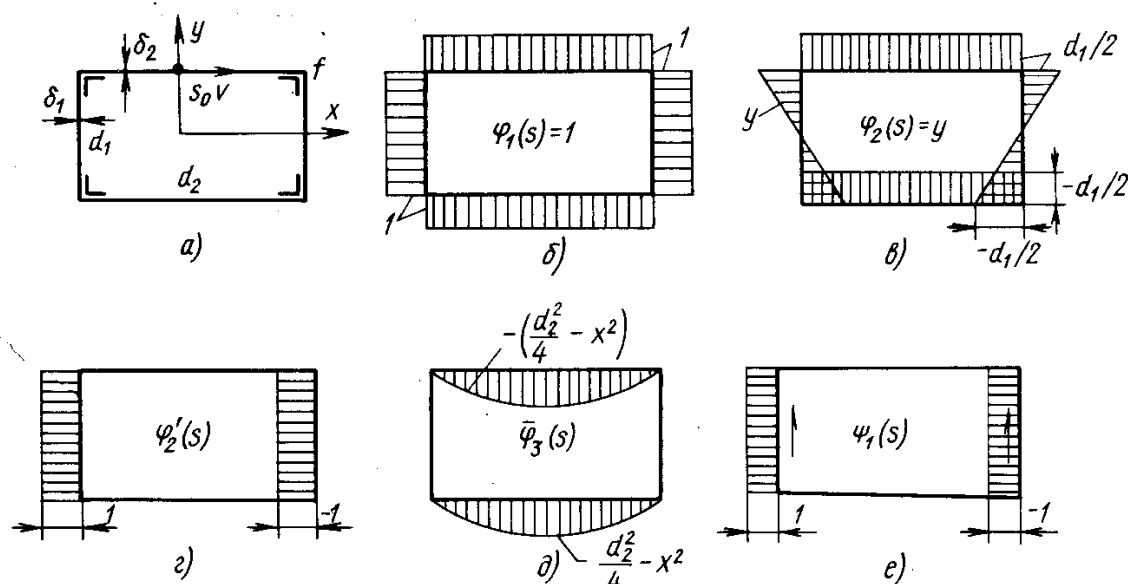


Рис. 6.2. Геометрические характеристики сечения (а) и функции, определяющие распределение перемещений u (б — д) и v (е) по контуру сечения

распределение перемещений по контуру сечения. При выборе функций $\varphi_i(s)$ и $\psi_i(s)$ учтем прежде всего смещения сечения как жесткого диска. Приняв, в частности, $\varphi_1(s) \equiv 1$, можно описать продольное поступательное смещение сечения, а функция $\varphi_2(s) = y$ соответствует его повороту относительно оси x . Функции $\varphi_i(s)$, как правило, изображаются графически в форме контурных эпюр, показанных на рис. 6.2. Функции $\varphi_1 = 1$ и $\varphi_2 = y$ представлены на рис. 6.2, б и 6.2, в. В дальнейшем понадобятся производные $d\varphi_i/ds = \varphi'_i(s)$, которые строятся следующим образом. На верхней горизонтальной стороне ($y = d_1/2$) (см. рис. 6.2, а) $s = x$, т. е. $\varphi'_i = d\varphi_i/dx$; на правой вертикальной стороне ($x = d_2/2$)

$$s = \frac{d_2}{2} + \left(\frac{d_1}{2} - y \right) \quad \text{и} \quad \varphi'_i = -d\varphi_i/dy,$$

а на стороне $y = -d_1/2$ очевидно

$$s = \frac{d_2}{2} + d_1 + \left(\frac{d_2}{2} - x \right)$$

и $\varphi'_i = -d\varphi_i/dx$. В результате получим $\varphi'_1 \equiv 0$ и распределение φ'_2 , показанное на рис. 6.2. г.

Функции φ_1 и φ_2 определяют смещения сечения как абсолютно жесткого диска. Введем функцию $\varphi_3(s)$, описывающую возможную деформацию сечения. Теоретические и экспериментальные исследования модельных конструкций, служащие, как правило, основанием для выбора функций деформаций, показывают, что при поперечном изгибе кессона крыла перемещения по горизонтальным панелям распределяются неравномерно и возрастают от середины к краям. На боковых стенках, из-за их небольшой высоты, явление деформации проявляется незначительно и практически можно

считать, что здесь справедлив закон плоских сечений. Учитывая симметрию сечения (см. рис. 6.2, а) в качестве поправки к закону плоских сечений примем параболическое распределение перемещений, показанное на рис. 6.2, д.

При выборе функции $\psi_1(s)$, определяющей контурное перемещение v (6.4), будем считать, что сечение является в своей плоскости абсолютно жестким. В рассматриваемой конструкции кессона крыла справедливость этого предположения определяется наличием системы поперечных диафрагм-нервюр, обеспечивающих жесткость контура сечения. При изгибе сечения $z = \text{const}$ смещается поступательно в направлении оси y . Учитывая, что перемещение v направлено по касательной к контуру (см. рис. 6.2, а), единичное смещение сечения вдоль оси y можно представить распределением, показанным на рис. 6.2, е (направление перемещений показано стрелками).

С учетом (6.4) продольная деформация ϵ_z и деформация сдвига γ_{sz} определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned}\epsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z} = U'_1 \varphi_1 + U'_2 \varphi_2 + U'_3 \bar{\varphi}_3, \\ \gamma_{sz} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = U_2 \varphi'_2 + U_3 \bar{\varphi}'_3 + V'_1 \psi_1.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Здесь $U'_i = dU_i/dz$, $V'_1 = dV_1/dz$ и учтено, что $\varphi'_1 \equiv 0$. Напряжения найдем с помощью закона Гука

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E \epsilon_z = E (U'_1 \varphi_1 + U'_2 \varphi_2 + U'_3 \bar{\varphi}_3), \\ \tau_{sz} &= G \gamma_{sz} = G (U_2 \varphi'_2 + U_3 \bar{\varphi}'_3 + V'_1 \psi_1).\end{aligned}\quad (6.6)$$

Для вывода уравнений, определяющих функции $U_i(z)$ и $V_1(z)$, воспользуемся вариационным принципом Лагранжа, изложенным в разд. 1.3. Потенциальная энергия деформации рассматриваемой конструкции (см. рис. 6.1) определяется равенством

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l dz \oint_F (\sigma_z \epsilon_z + \tau_{sz} \gamma_{sz}) dF. \quad (6.7)$$

Контурный интеграл вычисляется по площади поперечного сечения F . Работа распределенной нагрузки $q(z)$ имеет вид

$$A = \int_0^l q(z) v_q(z) dz = \int_0^l q V_1 dz. \quad (6.8)$$

Здесь v_q — смещения точек, в которых приложена нагрузка. Поскольку сечение является жестким в своей плоскости и смещается по оси y на величину V_1 , в рассматриваемом случае $v_q =$

$= V_1$. С учетом соотношений (6.5)—(6.8) полную энергию системы можно записать в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = U - A = \int_0^l \left\{ \oint_F \left[\frac{E}{2} (U_1' \varphi_1 + U_2' \varphi_2 + U_3' \bar{\varphi}_3)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{G}{2} (U_2 \varphi_2' + U_3 \bar{\varphi}_3' + V_1' \psi_1)^2 \right] dF - qV_1 \right\} dz = \\ = \int_0^l \left\{ \frac{E}{2} [(U_1')^2 a_{11} + (U_2')^2 a_{22} + (U_3')^2 \bar{a}_{33} + 2U_1' U_2' a_{12} + 2U_1' U_3' \bar{a}_{13} + \right. \\ \left. + 2U_2' U_3' \bar{a}_{23}] + \frac{G}{2} [U_2^2 b_{22} + U_3^2 \bar{b}_{33} + 2U_2 U_3 \bar{b}_{23} + 2U_2 V_1' c_{21} + \right. \\ \left. + 2U_3 V_1' \bar{c}_{31} + (V_1')^2 r_{11}] - qV_1 \right\} dz, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \oint \varphi_i \varphi_j dF, & b_{ij} &= \oint \varphi_i' \varphi_j' \delta ds, \\ c_{ij} &= \oint \varphi_i' \psi_j \delta ds \quad (i, j = 1, 2), \\ \bar{a}_{33} &= \oint \bar{\varphi}_3^2 dF, & \bar{b}_{33} &= \oint (\bar{\varphi}_3')^2 \delta ds, \\ \bar{a}_{13} &= \oint \varphi_1 \bar{\varphi}_3 \delta ds \quad (i = 1, 2), & \bar{b}_{23} &= \oint \varphi_2' \bar{\varphi}_3' \delta ds, \\ \bar{c}_{31} &= \oint \bar{\varphi}_3 \psi_1 \delta ds, & r_{11} &= \oint \psi_1^2 \delta ds. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Здесь dF — элемент площади сечения; ds — элемент дуги контура сечения; δ — толщина обшивки.

Согласно принципу Лагранжа $\delta \mathcal{E} = 0$. Осуществляя варьирование функционала (6.9), в рассматриваемом случае получим следующую систему вариационных уравнений (см. разд. 1.3)

$$U_1'' a_{11} + U_2'' a_{12} + U_3'' \bar{a}_{13} = 0; \quad (6.11)$$

$$E (U_2'' a_{22} + U_1'' a_{12} + U_3'' \bar{a}_{23}) - G (U_2 b_{22} + U_3 \bar{b}_{23} + V_1' c_{21}) = 0; \quad (6.12)$$

$$E (U_3'' \bar{a}_{33} + U_1'' \bar{a}_{13} + U_2'' \bar{a}_{23}) - G (U_3 \bar{b}_{33} + U_2 \bar{b}_{23} + V_1' \bar{c}_{31}) = 0, \quad (6.13)$$

$$V_1'' r_{11} + U_2' c_{21} + U_3' \bar{c}_{31} + \frac{q}{G} = 0 \quad (6.14)$$

и статических граничных условий для сечения $z = 0$

$$\begin{aligned} U_1' a_{11} + U_2' a_{12} + U_3' \bar{a}_{13} &= 0, \\ U_1' a_{12} + U_2' a_{22} + U_3' \bar{a}_{23} &= 0, \\ U_1' \bar{a}_{13} + U_2' \bar{a}_{23} + U_3' \bar{a}_{33} &= 0, \\ U_2' c_{21} + U_3' \bar{c}_{31} + V_1' r_{11} &= 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

учетом равенств (6.6) и (6.10) и рис. 6.2 условия (6.15) можно записать также в виде

$$N_z = \oint \sigma_z \varphi_1 dF = \oint \sigma_z dF = 0; \quad (6.16)$$

$$M_x = \oint \sigma_z \varphi_2 dF = \oint \sigma_z y dF = 0; \quad (6.17)$$

$$B_x = \oint \sigma_z \bar{\varphi}_3 dF = 0; \quad (6.18)$$

$$Q_y = \oint \tau_{yz} \psi_1 \delta ds = 0. \quad (6.19)$$

Равенства (6.16), (6.17) и (6.19) предусматривают отсутствие на свободном торце кессона осевой силы N_z , изгибающего момента M_x и перерезывающей силы Q_y . Величина B_x является обобщенным моментом, который называется бимоментом.

В жестком защемлении ($z = l$) должны выполняться условия, обеспечивающие отсутствие перемещений. Из равенств (6.4) следует, что условия $u(l, s) \equiv 0$, $v(l, s) \equiv 0$ выполняются, если

$$U_1(l) = U_2(l) = U_3(l) = 0, \quad V_1(l) = 0. \quad (6.20)$$

Таким образом, системе дифференциальных уравнений (6.11)—(6.14), имеющей в совокупности восьмой порядок, соответствует восемь граничных условий (6.15), (6.20).

Прежде чем перейти к решению полученных уравнений, осуществим некоторые упрощения. Из равенств (6.10) и рис. 6.2 следует, что

$$\begin{aligned} a_{11} &= F = 2(F_1 + F_2 + 2f), \quad a_{12} = 0, \\ a_{22} &= I_x = d_1^2 \left(\frac{F_1}{6} + \frac{F_2}{2} + f \right), \\ b_{22} &= c_{21} = r_{11} = 2F_1. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Здесь $F_1 = d_1 \delta_1$, $F_2 = d_2 \delta_2$ — площади сечений вертикальной и горизонтальной панелей; f — площадь сечения пояса; I_x — момент инерции сечения относительно оси x .

Рассмотрим условие $a_{12} = 0$. В общем случае функции, для которых при $i \neq j$ справедливо равенство

$$\oint \varphi_i \varphi_j dF = 0,$$

называются взаимно ортогональными, т. е. функции φ_1 и φ_2 обладают этим свойством ($a_{12} = 0$). Естественно попробовать подобрать функции деформации $\bar{\varphi}_3$ так, чтобы она была ортогональна функциям φ_1 и φ_2 . Для этого представим эту функцию в виде линейной комбинации $\varphi_3 = \bar{\varphi}_3 + b\varphi_1 + c\varphi_2$ и найдем коэффициенты b и c из условий ортогональности

$$\oint \varphi_1 \varphi_3 dF = \oint \varphi_2 \varphi_3 dF = 0. \quad (6.22)$$

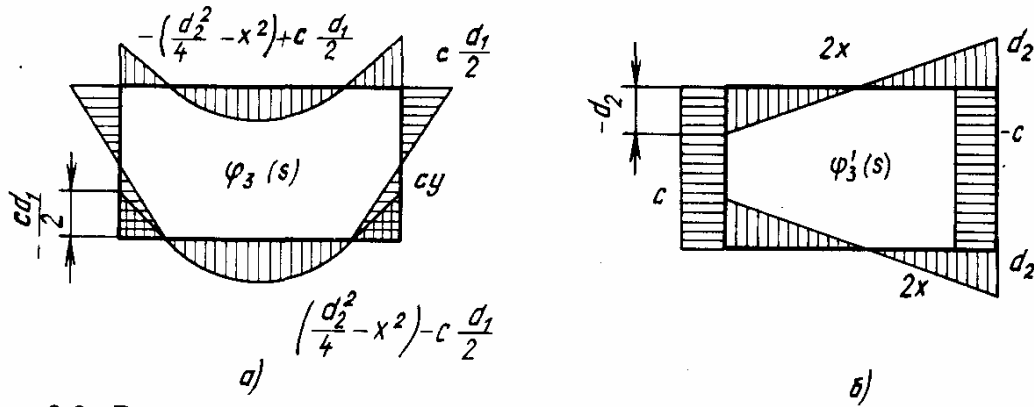


Рис. 6.3. Распределение функции деформации (а) и ее производной (б) по контуру сечения

В результате получим $b = 0$, $c = d_1 d_2^2 F_2 / 6 I_x$. Функция $\varphi_3(s)$ и ее производная показаны на рис. 6.3. Ортогонализация функции существенно упрощает уравнения, так как согласно равенствам (6.22) при этом $a_{13} = a_{23} = 0$ и коэффициенты уравнений (6.11)—(6.14) принимают следующий вид (в связи с тем что $\bar{\varphi}_3$ заменяется на φ_3 верхняя черта у них исчезает):

$$a_{33} = I_{1\varphi} = \oint \varphi_3^2 dF = \frac{1}{15} F_2 d_2^4 - c^2 I_x,$$

$$b_{23} = \oint \varphi'_2 \varphi'_3 \delta ds = 2c F_1,$$

$$b_{33} = \oint (\varphi'_3)^2 \delta ds = \frac{2}{3} d_2^2 F_2 + 2c^2 F_1,$$

$$c_{31} = \oint \varphi'_3 \psi_1 \delta ds = 2c F_1.$$

Окончательно систему уравнений (6.11)—(6.14) и граничные условия (6.15), (6.20) можно записать следующим образом:

$$U_1'' = 0; \quad (6.23)$$

$$EI_x U_2'' - 2GF_1 (U_2 + cU_3 + V_1') = 0; \quad (6.24)$$

$$EI_{1\varphi} U_3'' - G(2cF_1 U_2 + b_{33} U_3 + 2cF_1 V_1') = 0; \quad (6.25)$$

$$U_2' + cU_3' + V_1'' + \frac{q}{2GF_1} = 0; \quad (6.26)$$

при $z = 0$

$$U_1' = 0, \quad U_2' = 0, \quad U_3' = 0, \quad U_2 + cU_3 + V_1' = 0; \quad (6.27)$$

при $z = l$

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad V_1 = 0. \quad (6.28)$$

Рассмотрим решение полученных уравнений для случая равномерной нагрузки $q = q_0 = \text{const}$. Из уравнения (6.23) имеем $U_1 = C_1 z^2 + C_2$, а из первых условий (6.27) и (6.28) — $C_1 = C_2 = 0$, т. е. $U_1 \equiv 0$. Функция U_1 описывает продольное

смещение сечений кессона — в силу принятых условий нагружения такое смещение отсутствует. Проинтегрируем уравнение (6.26)

$$U_2 + cU_3 + V_1' = C_3 - \frac{q_0 z}{2GF_1}. \quad (6.29)$$

Подставляя это соотношение в уравнение (6.24) и интегрируя дважды, получим

$$U_2 = \frac{GF_1}{EI_x} C_3 z^2 + C_4 z + C_5 - \frac{q_0 z^3}{6EI_x}. \quad (6.30)$$

Подставляя теперь в уравнение (6.25) V_1' из (6.29) будем иметь

$$U_3'' - k_1^2 U_3 = \frac{2cGF_1}{EI_{1\varphi}} C_3 - \frac{cq_0 z}{EI_{1\varphi}},$$

где

$$k_1^2 = \frac{G}{EI_{1\varphi}} (b_{33} - 2c^2 F_1) = \frac{2d_2^2 GF_2}{3EI_{1\varphi}}. \quad (6.31)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$U_3 = C_6 \operatorname{sh} k_1 z + C_7 \operatorname{ch} k_1 z - \frac{c}{k_1^2 EI_{1\varphi}} (2GF_1 C_3 - q_0 z).$$

Функция V_1 может быть найдена в результате интегрирования уравнения (6.29), в которое предварительно необходимо подставить U_2 и U_3 .

Постоянные C_i найдем из граничных условий (6.27), (6.28). Из условия $U_2'(0) = 0$ получим $C_4 = 0$, а из условия $U_3'(0) = 0$ — $C_6 = -cq_0/k_1^3 EI_{1\varphi}$. Сопоставляя соотношение (6.29) с последним условием (6.27), будем иметь $C_3 = 0$. Из условия $U_2(l) = 0$ найдем $C_5 = q_0 l^3/6$. Определяя C_7 из условия $U_3(l) = 0$, окончательно получим

$$U_2 = \frac{q_0}{6EI_x} (l^3 - z^3),$$

$$U_3 = \frac{cq_0}{k_1^3 EI_{1\varphi}} \left[k_1 z - \operatorname{sh} k_1 z + \left(\operatorname{th} k_1 l - \frac{k_1 l}{\operatorname{ch} k_1 l} \right) \operatorname{ch} k_1 z \right]. \quad (6.32)$$

Нормальные напряжения согласно равенствам (6.6) и (6.32) будут иметь вид

$$\sigma_z = -\frac{q_0 z^2}{2I_x} \varphi_2 + \frac{cq_0}{k_1^2 EI_{1\varphi}} \left[1 - \operatorname{ch} k_1 z + \left(\operatorname{th} k_1 l - \frac{k_1 l}{\operatorname{ch} k_1 l} \right) \operatorname{sh} k_1 z \right] \varphi_3. \quad (6.33)$$

Функции φ_2 и φ_3 определяются рис. 6.2, в и 6.3, а. При $\varphi_3 \equiv 0$ из (6.33) следует распределение напряжений, соответствующее закону плоских сечений.

В качестве примера рассмотрим конструкцию с параметрами (см. рис. 6.2, а) $d_1 = 0,2d$, $d_2 = d$, $l = 5d$, $E/G = 2,6$, $f = 0$.

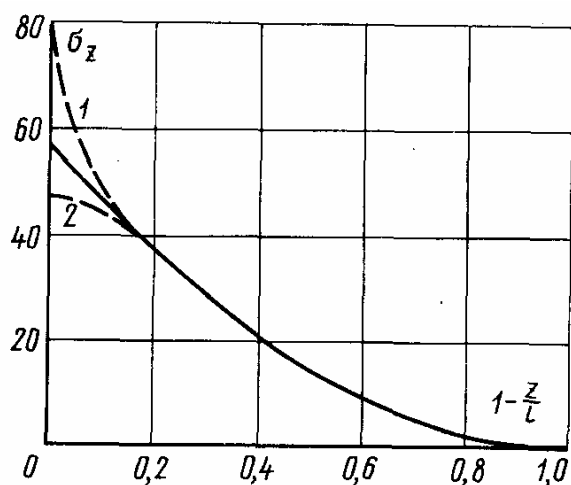


Рис. 6.4. Распределение напряжений $\bar{\sigma}_z = \sigma_z \delta / q_0$ в нижней панели по длине кессона. Сплошная линия соответствует решению, основанному на законе плоских сечений; пунктирные линии соответствуют расчету по формуле (6.33) (1 — в точке сечения $x = d_2/2$, $y = -d_1/2$; 2 — в точке сечения $x = 0$, $y = -d_1/2$)

На рис. 6.4 приведено распределение напряжений в нижней панели по длине кессона. Сплошная линия соответствует закону плоских сечений, согласно которому напряжения распределяются равномерно по ширине панели. Пунктирные линии 1 и 2 определяют соответственно изменение напряжений вдоль края ($x = d_2/2$) и в середине ($x = 0$) панели, найденное по формуле (6.33). Из графика следует, что стеснение деформации сечения приводит к существенно неравномерному распределению напряжений в жестком защемлении и вызывает концентрацию напряжений в угловой точке сечения. Этот эффект быстро затухает при удалении от края и на расстоянии от края порядка ширины кессона практически исчезает.

Рассмотрим теперь кручение кессона, показанного на рис. 6.1, распределенным моментом $m(z)$. Для определения возможной формы деформации сечения исследуем поведение конструкции, показанной на рис. 6.5, а. Предположим, что панели работают только на сдвиг, а пояса — только на растяжение—сжатие.

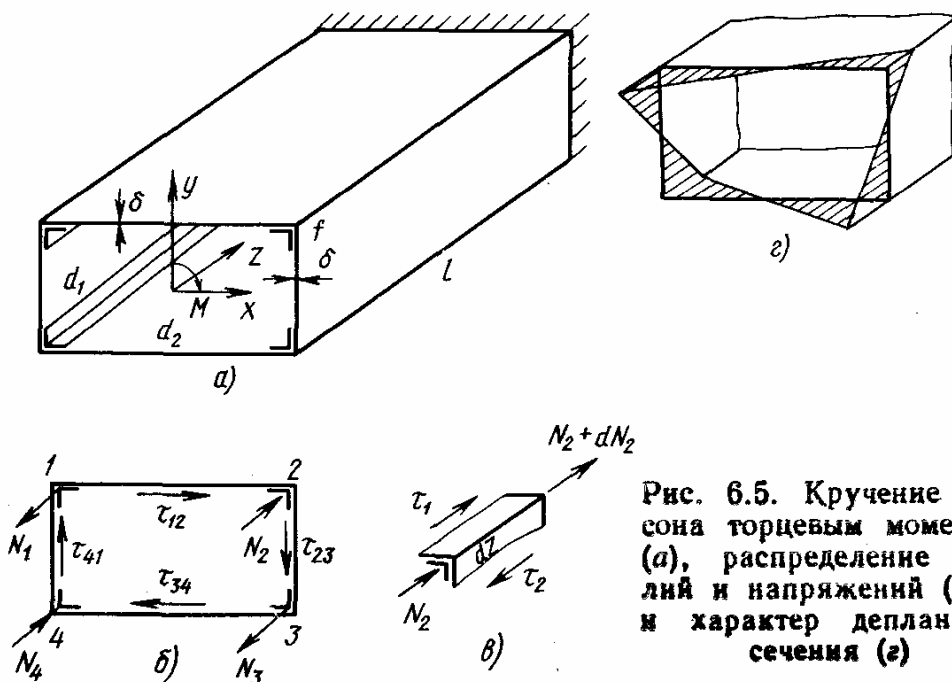


Рис. 6.5. Кручение кессона торцевым моментом (а), распределение усилий и напряжений (б, в) и характер деформаций сечения (г)

Тогда при действии торцевого крутящего момента в панелях возникнут постоянные по ширине касательные напряжения, показанные на рис. 6.5, б. Приравнивая нулю сумму проекции всех сил, действующих в сечении на оси x , y и записывая уравнения для крутящего момента, получим

$$\tau_{12} = \tau_{34} = \tau_1, \quad \tau_{23} = \tau_{41} = \tau_2, \quad (\tau_1 + \tau_2) \delta d_1 d_2 = M. \quad (6.34)$$

Из равенств (6.34) следует, что напряжения τ_1 и τ_2 в общем случае не одинаковы и их разность может вызвать образование нормальных усилий N_i в поясах (см. рис. 6.5, в). Приравнивая нулю сумму проекций всех действующих в сечении сил на ось z и суммы моментов относительно осей x и y , получим

$$N_1 = N, \quad N_2 = -N, \quad N_3 = N, \quad N_4 = -N. \quad (6.35)$$

Таким образом, в смежных элементах действуют одинаковые по величине и противоположные по знаку усилия (см. рис. 6.5, б), которые вызывают деформацию сечения, показанную на рис. 6.5, г. Оставляя завершение этой задачи до следующего раздела, используем полученные результаты для построения решения в перемещениях.

Зададим перемещения кессона, показанного на рис. 6.1 и нагруженного крутящим моментом, в форме, аналогичной (6.4)

$$u(z, s) = U_4(z) \varphi_4(s), \quad v(z, s) = V_2(z) \psi_2(s). \quad (6.36)$$

Функция $\varphi_4(s)$, характеризующая деформацию сечения при кручении и построенная в соответствии с рис. 6.5, г, показана на рис. 6.6, б. Производная $\varphi'_4(s)$ представлена на рис. 6.6, в. Функция $\psi_2(s)$ определяет поворот сечения как жесткого диска вокруг точки O (рис. 6.6, г). Если через V_2 обозначить малый угол поворота сечения, то контурное смещение будет пропорционально длине перпендикуляра, опущенного из центра вращения на соответствующую сторону. Направление перемещения v показано стрелками на рис. 6.6, г.

Деформации и напряжения в соответствии с равенством (6.5), (6.6), (6.36) будут

$$\varepsilon_z = U'_4 \varphi_4, \quad \gamma_{sz} = U_4 \varphi'_4 + V'_2 \psi_2; \quad (6.37)$$

$$\sigma_z = E U'_4 \varphi_4, \quad \tau_{sz} = G (U_4 \varphi'_4 + V'_2 \psi_2). \quad (6.38)$$

Для вывода уравнений, определяющих функции $U_4(z)$ и $V_2(z)$, воспользуемся, как и ранее, вариационным принципом Лагранжа. Потенциальная энергия деформации по-прежнему определяется равенством (6.7), а работа распределенного крутящего момента на углах поворота V_2 имеет вид

$$A = \int_0^l m(z) V_2(z) dz. \quad (6.39)$$

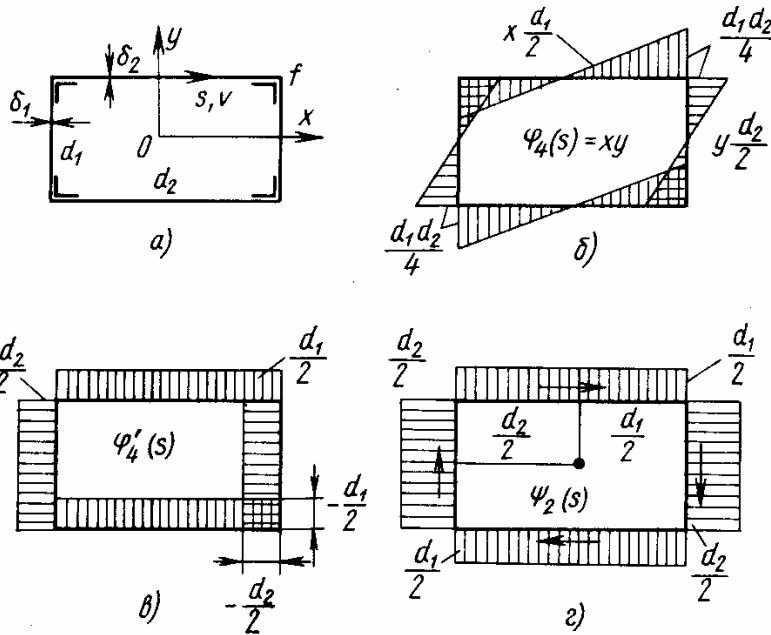


Рис. 6.6. Геометрические характеристики сечения (а) и функции, характеризующие распределение перемещений по его контуру (б, в, г)

С учетом соотношений (6.7), (6.39) и (6.37), (6.38) полную энергию можно записать в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = U - A &= \int_0^l \left\{ \oint_F \left[\frac{E}{2} (U_4' \varphi_4)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{G}{2} (U_4' \varphi_4 + V_2' \psi_2)^2 \right] dF - mV_2 \right\} dz = \\ &= \int_0^l \left\{ \frac{E}{2} (U_4')^2 a_{44} + \frac{G}{2} [U_4'^2 b_{44} + 2U_4' V_2' c_{42} + (V_2')^2 r_{22}] - mV_2 \right\} dz, \end{aligned} \quad (6.40)$$

где $a_{44} = \oint (\varphi_4)^2 dF$, $b_{44} = \oint (\varphi_4')^2 \delta ds$, $c_{42} = \oint \varphi_4' \psi_2 \delta ds$, $r_{22} = \oint \psi_2^2 \delta ds$. В результате минимизации $\mathcal{E}$ получим следующую систему вариационных уравнений:

$$\begin{aligned} EU_4'' a_{44} - G(U_4' b_{44} + V_2' c_{42}) &= 0, \\ V_2'' r_{22} + U_4' c_{42} + \frac{m}{G} &= 0 \end{aligned} \quad (6.41)$$

и статических граничных условий для сечения $z = 0$

$$U_4' a_{44} = 0, \quad U_4' c_{42} + V_2' r_{22} = 0. \quad (6.42)$$

Эти условия можно записать в виде

$$B = \oint \sigma_z \varphi_4 dF = 0,$$

$$M_z = \oint \tau_{sz} \psi_2 \delta ds = 0.$$

Здесь B — крутильный бимомент, а M_z — крутящий момент.

На закрепленном торце кессона $z = l$ отсутствуют перемещения, т. е. согласно равенствам (6.36) при $z = l$

$$U_4 = 0, \quad V_2 = 0. \quad (6.43)$$

Вычислив коэффициенты для функций, представленных на рис. 6.6, получим

$$a_{44} = I_{2\varphi} = \frac{d_1^2 d_2^2}{24} (F_1 + F_2 + 6f);$$

$$b_{44} = r_{22} = \frac{1}{2} (d_1^2 F_2 + d_2^2 F_1);$$

$$c_{42} = \frac{1}{2} (d_2^2 F_1 - d_1^2 F_2).$$

Введем следующие обозначения:

$$U = U_4, \quad \theta = V_2, \quad a = E a_{44}, \quad b_1 = G b_{44} = G r_{22}, \quad b_2 = G c_{42} \quad (6.44)$$

и запишем уравнения (6.41) и граничные условия (6.42), (6.43) в виде

$$aU'' - b_1 U - b_2 \theta' = 0, \quad b_1 \theta'' + b_2 U' + m = 0; \quad (6.45)$$

при $z = 0$

$$U' = 0, \quad \theta' b_1 + U b_2 = 0; \quad (6.46)$$

$$\text{при } z = l \quad U = 0, \quad \theta = 0. \quad (6.47)$$

Заменой

$$U = \Phi', \quad \theta = -\frac{1}{b_2} (b_1 \Phi - a \Phi'') \quad (6.48)$$

первое уравнение (6.45) удовлетворяется тождественно, а второе принимает вид

$$\Phi^{IV} - k_2^2 \Phi'' + \frac{m b_2}{a b_1} = 0,$$

$$\text{где } k_2^2 = \frac{b_1^2 - b_2^2}{a b_1} = \frac{48 G F_1 F_2}{E (d_1^2 F_2 + d_2^2 F_1) (F_1 + F_2 + 6f)}. \quad (6.49)$$

Запишем решение полученного уравнения при $m = m_0 = \text{const}$

$$\Phi = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{sh} k_2 z + C_4 \operatorname{ch} k_2 z + \frac{m_0 b_2}{2 a b_1 k_2^2} z^2. \quad (6.50)$$

Из равенства (6.48) и (6.50) получим

$$U = C_2 + k_2 (C_3 \operatorname{ch} k_2 z + C_4 \operatorname{sh} k_2 z) + \frac{m_0 b_2}{ab_1 k_2^2} z,$$

$$\theta = -\frac{b_1}{b_2} (C_1 + C_2 z) - \frac{b_2}{b_1} (C_3 \operatorname{sh} k_2 z + C_4 \operatorname{ch} k_2 z) + \frac{m_0}{k_2^2} \left(\frac{1}{b_1} - \frac{z^2}{2a} \right). \quad (6.51)$$

Постоянные $C_1 - C_4$ определяются из граничных условий (6.46), (6.47) и имеют вид

$$C_1 = \frac{m_0 b_2}{b_1^2 k_2^2} \left[\frac{b_2^2 (k_2 l \operatorname{sh} k_2 l + 1)}{ab_1 k_2^2 \operatorname{ch} k_2 l} + 1 - \frac{l^2 b_1}{2a} \right], \quad C_2 = 0,$$

$$C_3 = \frac{m_0 b_2 (\operatorname{sh} k_2 l - k_2 l)}{ab_1 k_2^4 \operatorname{ch} k_2 l}, \quad C_4 = -\frac{m_0 b_2}{ab_1 k_2^4}. \quad (6.52)$$

Подставляя (6.51), (6.52) в первое равенство (6.38), получим следующее выражение для нормальных напряжений:

$$\sigma_z = \frac{m_0 b_2}{k_2^2 b_1 l_{2\varphi} \operatorname{ch} k_2 l} [\operatorname{ch} k_2 l - \operatorname{ch} k_2 (l - z) - k_2 l \operatorname{sh} k_2 z] \varphi_4(s). \quad (6.53)$$

В качестве примера рассмотрим кессон, показанный на рис. 6.1, нагруженный распределенным крутящим моментом $m_0 = 2 \times 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м/м}$ и обладающий следующими параметрами (см. рис. 6.6, а): $d_1 = 0,1 \text{ м}$; $d_2 = 0,3 \text{ м}$; $l = 1 \text{ м}$; $\delta_1 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $\delta_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $E/G = 2,6$. Изменение нормальных напряжений (6.53) в угловой точке сечения при удалении от закрепленного сечения показано на рис. 6.7.

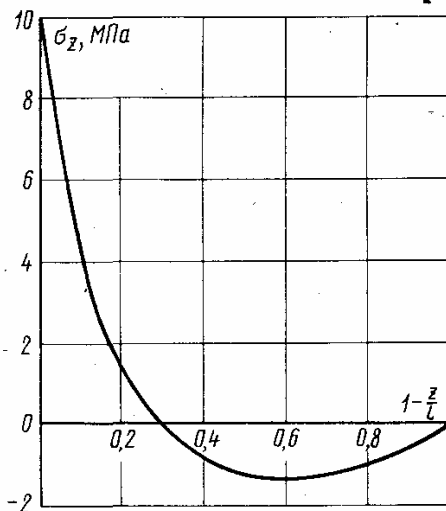


Рис. 6.7. Распределение нормальных напряжений в угловой точке сечения по длине кессона при кручении

В заключение сделаем замечание общего характера. Изложенный выше метод был разработан В. З. Власовым и является приложением к задачам строительной механики общего метода Власова—Канторовича, описанного в разд. 1.6.3 гл. 1. В общем случае оболочки типа крыла или корпуса летательного аппарата продольное и контурное перемещение представляются в виде следующих конечных рядов:

$$u(z, s) = \sum_{i=1}^m U_i(z) \varphi_i(s),$$

$$v(z, s) = \sum_{k=1}^n V_k(z) \psi_k(s). \quad (6.54)$$

Здесь $U_i(z)$ и $V_k(z)$ — искомые функции, определяющие распределение перемещений вдоль продольной оси, а $\varphi_i(s)$ и $\psi_k(s)$ — задаваемые функции, аппроксимирующие распределение перемещений по контуру сечения. В результате использования вариационного принципа Лагранжа получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\gamma \sum_i a_{ji} U_i' - \sum_i b_{ji} U_i - \sum_k c_{jk} V_k' + \frac{p_j}{G} = 0, \quad (6.55)$$

$$\sum_i c_{hi} U_i' + \sum_k r_{hk} V_k' + \frac{q_h}{G} = 0,$$

$$(i, j = 1, 2, 3 \dots m; \quad h, k = 1, 2, 3 \dots n).$$

Здесь $\gamma = E/G$ и

$$\begin{aligned} a_{ji} &= \oint \varphi_j \varphi_i \delta ds + \sum_l \varphi_j' \varphi_i' f_l, \\ b_{ji} &= \oint \varphi_j' \varphi_i' \delta ds, \quad c_{jk} = \oint \varphi_j' \psi_k \delta ds, \\ c_{hi} &= \oint \psi_h \varphi_i' \delta ds, \quad r_{hk} = \oint \psi_h \psi_k \delta ds, \\ p_j &= \oint p \varphi_j ds, \quad q_h = \oint q \psi_h ds, \end{aligned} \quad (6.56)$$

f_l — площадь сечения пояса с номером l ; φ_j' , φ_i' — значения функций φ_j и φ_i в точке сечения, где расположен пояс с номером l ; p и q — поверхностные нагрузки, направленные вдоль оси и контура сечения оболочки; s — контурная координата; δ — толщина обшивки. Коэффициенты (6.56) симметричны по индексам, т. е. $a_{ji} = a_{ij}$ и т. д.

Аппроксимирующие функции φ_i и ψ_k должны обеспечивать непрерывность перемещений вдоль контура сечения и быть линейно независимыми. Выбор функций может быть осуществлен следующими тремя способами.

Первый способ основан на интуитивной аппроксимации распределения перемещений в соответствии с известными точными решениями модельных задач или экспериментальными результатами (рис. 6.8, а). При этом число аппроксимирующих функций, как правило, оказывается небольшим и система (6.55) допускает

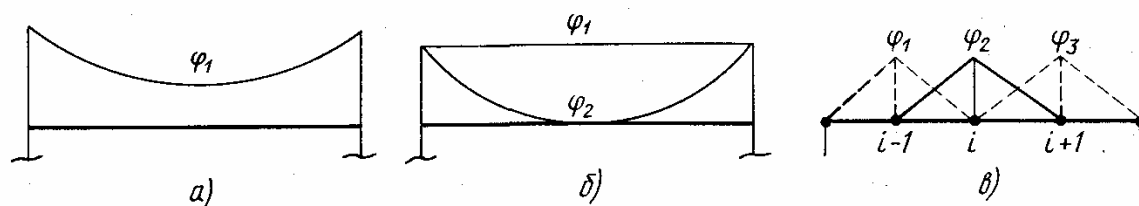


Рис. 6.8. К выбору аппроксимирующих функций в форме априорного задания (а), использования системы степенных (б) и локальных (в) функций

аналитическое решение. Именно такой подход и был реализован ранее.

Если априорных оснований для выбора функций депланации нет (назначение функций, определяющих смещения сечения как жесткого диска, не вызывает затруднений), может быть реализован второй подход, основанный на использовании известных полных систем функций. В качестве последних могут быть приняты тригонометрические функции контурной координаты s или степенные функции типа $x^i y^j$ ($i, j = 0, 1, 2 \dots$) декартовых координат, к которым отнесено сечение (см. рис. 6.8, б).

И, наконец, в случае систем со сложным контуром могут быть использованы системы локальных функций. При этом контур разбивается на участки системой узловых точек. Задавая единичное перемещение некоторой i -й узловой точке, считая неподвижными соседние точки с номерами $(i-1)$, $(i+1)$ и аппроксимируя распределение перемещения на участках между точками $(i-1)$, i , $(i+1)$ линейными функциями, можно построить набор треугольных эпюр, показанных на рис. 6.8, в. Система (6.55) при этом решается численными методами.

В результате задания конечного набора аппроксимирующих функций рассматриваемая конструкция, обладающая бесконечным числом степеней свободы, сводится к дискретно-континуальной расчетной модели, являющейся континуальной в отношении координаты z и обладающей заданным числом степеней свободы в отношении смещения ее фиксированного сечения. Заметим, что система уравнений (6.55) обладает «фильтрующими» свойствами: если аппроксимирующая функция выбрана неудачно и не характеризует действительное поведение системы, соответствующая составляющая решения в рядах (6.54) окажется несущественной.

Система уравнений (6.55) значительно упрощается, если системы функций φ_i или ψ_k удовлетворяют условиям ортогональности. При этом соответствующие коэффициенты с различными индексами (a_{ji} при $i \neq j$ или r_{hk} при $h \neq k$) обращаются в нуль. Если функции φ_i и ψ_k удастся выбрать так, что они вместе с первыми производными являются взаимно ортогональными, то система (6.55) разделяется на взаимно независимые пары уравнений и можно получить точное решение.

Решение уравнений (6.55) определяет перемещения рассматриваемой конструкции. Напряжения находятся по формулам, аналогичным (6.6), т. е.

$$\sigma_z(z, s) = E \sum_{i=1}^m U_i' \varphi_i,$$

$$\tau_{sz}(z, s) = G \left(\sum_{i=1}^m U_i \varphi_i' + \sum_{k=1}^n V_k' \psi_k \right).$$

Система (6.55) имеет порядок $2(m + n)$ и требует такого же количества граничных условий. Статические граничные условия формулируются через обобщенные силовые факторы

$$B_j = \oint \sigma_z \varphi_j dF = E \sum_{i=1}^m U_i' a_{ji},$$

$$Q_h = \oint \tau_{sz} \psi_h \delta ds = G \left(\sum_{i=1}^m U_i c_{ih} + \sum_{k=1}^n V_k' r_{hk} \right). \quad (6.57)$$

В частности, если на крае $z = z_0$ заданы распределенные по сечению нормальные и касательные напряжения σ_0 и τ_0 , имеем

$$B_j(z_0) = \oint \sigma_0 \varphi_j dF, \quad Q_h(z_0) = \oint \tau_0 \psi_h \delta ds.$$

Геометрические граничные условия записываются непосредственно через функции U_i и V_k .

Добавляя соответствующие члены в выражение для полной энергии, с помощью которого получены уравнения (6.55), можно учесть упругие деформации нервюр крыла, шпангоутов фюзеляжа, упругий характер закрепления и другие дополнительные эффекты.

Рассмотрим в качестве примера задачу расчета кессонного крыла с центропланом (рис. 6.9), являющуюся иллюстрацией аналитической реализации общего метода подконструкций, изложенного в гл. 8. В соответствии с равенствами (6.54) представим перемещения консоли $u(z, s)$, $v(z, s)$ и центроплана $\bar{u}(z, s)$, $\bar{v}(z, s)$ в виде следующих разложений (верхней чертой будем отмечать величины, относящиеся к центроплану):

$$u(z, s) = U_2(z) \varphi_2(s) + U_3(z) \varphi_3(s) + U_4(z) \varphi_4(s);$$

$$v(z, s) = V_1(z) \psi_1(s) + V_2(z) \psi_2(s);$$

$$\bar{u}(\bar{z}, s) = \bar{U}_2(\bar{z}) \varphi_2(s) + \bar{U}_3(\bar{z}) \varphi_3(s) + \bar{U}_4(\bar{z}) \varphi_4(s);$$

$$\bar{v}(\bar{z}, s) = \bar{V}_1(\bar{z}) \psi_1(s) + \bar{V}_2(\bar{z}) \psi_2(s).$$

Здесь члены $U_1(z) \varphi_1(s)$ и $\bar{U}_1(\bar{z}) \varphi_1(s)$, соответствующие осевому растяжению консолей и центроплана (см. рис. 6.2, б), опущены, поскольку осевые нагрузки отсутствуют. Слагаемые $U_2(z) \varphi_2(s)$, $\bar{U}_2(\bar{z}) \varphi_2(s)$ (см. рис. 6.2, в), $V_1(z) \psi_1(s)$, $\bar{V}_1(\bar{z}) \psi_1(s)$ (см. рис. 6.2, е) и $V_2(z) \psi_2(s)$, $\bar{V}_2(\bar{z}) \psi_2(s)$ (см.

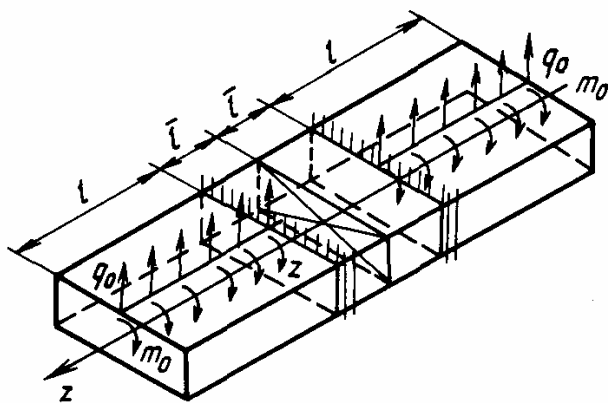


Рис. 6.9. Кессонное крыло с центропланом

рис. 6.6, а) соответствуют балочной теории изгиба и кручения консолей и центроплана, а составляющие $U_3(z) \varphi_3(s)$, $\bar{U}_3(\bar{z}) \bar{\varphi}_3(\bar{s})$ (см. рис. 6.3, а) и $U_4(z) \varphi_4(s)$, $\bar{U}_4(\bar{z}) \bar{\varphi}_4(\bar{s})$ (см. рис. 6.6, б) описывают деформацию сечений консолей и центроплана при изгибе и кручении. Записывая потенциальную энергию (6.7) как сумму энергий консолей и центроплана [для изгиба и кручения консолей полная энергия определяется равенствами (6.9) и (6.40), а для центроплана — аналогичными выражениями, в которых $U_i(z)$, $V_j(z)$ следует заменить на $\bar{U}_i(\bar{z})$, $\bar{V}_j(\bar{z})$, z — на $\bar{z}$ и l на $\bar{l}$], в результате минимизации можно получить систему дифференциальных уравнений типа (6.55), полностью аналогичных уравнениям (6.12)–(6.14) для изгиба и (6.41) для кручения. Решения этих уравнений также аналогичны построенным ранее и для консолей имеют следующий вид (для удобства введены другие постоянные, а общее решение записано через экспоненциальные функции):

$$U_2 = \frac{1}{EI_x} \left(-q_0 \frac{z^3}{6} + A_1 \frac{z^2}{2} + A_2 z + A_3 \right);$$

$$U_3 = A_4 e^{k_1 z} + A_5 e^{-k_1 z} + \frac{c}{EI_{1\varphi} k_1^2} (q_0 z - A_1);$$

$$U_4 = B_2 + k_2 (B_3 e^{k_2 z} + B_4 e^{-k_2 z}) + \frac{m_0 b_2 z}{ab_1 k_2^2};$$

$$V_1 = \frac{1}{EI_x} \left(q_0 \frac{z^4}{24} - A_1 \frac{z^3}{6} - A_2 \frac{z^2}{2} - A_3 z \right) - \\ - \frac{c}{k_1} (A_4 e^{k_1 z} - A_5 e^{-k_1 z}) - \frac{c^2}{EI_{1\varphi} k_1^2} \left(q_0 \frac{z^2}{2} - A_1 z \right) - \\ - \frac{z}{2GF_1} \left(q_0 \frac{z}{2} - A_1 \right) + A_6;$$

$$V_2 = -\frac{b_1}{b_2} (B_1 + B_2 z) - \frac{b_2}{b_1} (B_3 e^{k_2 z} + B_4 e^{-k_2 z}) + \\ + \frac{m_0}{k_2^2} \left(\frac{1}{b_1} - \frac{z^2}{2a} \right).$$

Аналогично для центроплана будем иметь (поверхностные нагрузки отсутствуют)

$$\bar{U}_2 = \frac{1}{E\bar{I}_x} \left(\bar{A}_1 \frac{\bar{z}^2}{2} + \bar{A}_2 \bar{z} + \bar{A}_3 \right);$$

$$\bar{U}_3 = \bar{A}_4 \operatorname{ch} k_1 \bar{z} + \bar{A}_5 \operatorname{sh} k_1 \bar{z} - \frac{\bar{c} \bar{A}_1}{E\bar{I}_{1\varphi} k_1^2};$$

$$\bar{U}_4 = \bar{B}_2 + k_2 (\bar{B}_3 \operatorname{ch} k_2 \bar{z} + \bar{B}_4 \operatorname{sh} k_2 \bar{z});$$

$$\begin{aligned} V_1 = & -\frac{1}{E\bar{I}_x} \left(\bar{A}_1 \frac{z^3}{6} + \bar{A}_2 \frac{z^2}{2} + \bar{A}_3 z \right) - \\ & - \frac{z}{k_1} (\bar{A}_4 \operatorname{ch} k_1 z + \bar{A}_5 \operatorname{sh} k_1 z) + \frac{\bar{A}_1 c^2 z}{E\bar{I}_{1\varphi} k_1^2} + \frac{\bar{A}_1 z}{2G\bar{F}_1} + \bar{A}_6; \\ \bar{V}_2 = & -\frac{\delta_1}{b_1} (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 z) - \frac{\delta_2}{b_1} (\bar{B}_3 \operatorname{sh} k_2 z + \bar{B}_4 \operatorname{ch} k_2 z). \end{aligned}$$

Коэффициенты k_1 и k_2 определяются равенствами (6.31), (6.49).

Для простоты будем считать консоли достаточно длинными. Поскольку напряжения, вызванные в них стеснением деформации, при приближении к свободным торцам должны затухать, положим $A_4 = B_3 = 0$ (координата z отсчитывается от места соединения консоли с центропланом). В результате в построенное решение входят 18 произвольных постоянных, которые должны быть найдены из граничных условий. Для центроплана в плоскости симметрии $\bar{z} = 0$ отсутствуют продольные перемещения, т. е. $\bar{U}_i(0) = 0$ ($i = 2, 3, 4$), перерезывающая сила $\bar{Q} = \bar{Q}_1$ и крутящий моменты $\bar{M}_z = \bar{Q}_2$ (6.57), что дает пять условий. На бортовой нервюре ($\bar{z} = l, z = 0$) отсутствует перемещение v , т. е. $V_1(0) = V_2(0) = \bar{V}_1(\bar{l}) = \bar{V}_2(\bar{l}) = 0$, а продольные перемещения и обобщенные силовые факторы (6.57) должны быть одинаковыми, т. е. $U_i(0) = \bar{U}_i(\bar{l})$ и $B_i(0) = \bar{B}_i(\bar{l})$ ($i = 2, 3, 4$). Оставшиеся три условия должны обеспечивать отсутствие перерезывающей силы $Q = Q_1$, крутящего $M_z = Q_2$ и изгибающего $M_x = B_2$ моментов (6.57) на свободном торце консоли $z = l$. Запишем окончательные выражения для нормальных напряжений в консолях

$$\begin{aligned} \sigma_z = & -\frac{q_0(l-x)^2}{2I_x} \varphi_3(s) - \frac{q_0 c}{k_1^2 I_{1\varphi}} \left(\frac{k_1 l - \lambda_1}{\lambda_1 + 1} e^{-k_1 z} - 1 \right) \varphi_3(s) + \\ & + \frac{m_0 b_2}{b_1 k_2^2 I_{2\varphi}} \left(\frac{k_2 l - \lambda_2}{\lambda_2 + 1} - 1 \right) \varphi_4(s) \end{aligned}$$

и в центроплане

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z = & -\frac{q_0 \bar{l}^2}{2\bar{I}_x} \varphi_3(s) - \frac{q_0 c}{k_1^2 \bar{I}_{1\varphi}} \left(\frac{k_1 l - \lambda_1}{\lambda_1 + 1} - 1 \right) \times \\ & \times \frac{\operatorname{ch} k_1 \bar{z}}{\operatorname{ch} k_1 l} \varphi_3(s) + \frac{m_0 b_2}{b_1 k_2^2 \bar{a}} \left(\frac{k_2 l - \lambda_2}{\lambda_2 + 1} - 1 \right) \frac{\operatorname{ch} k_2 \bar{z}}{\operatorname{ch} k_2 l} \varphi_4(s). \end{aligned}$$

Параметры

$$\lambda_1 = \frac{I_{1\varphi} k_1 \operatorname{sh} k_1 l}{\bar{I}_{1\varphi} k_1 \operatorname{ch} k_1 l}, \quad \lambda_2 = \frac{I_{2\varphi} k_2 \operatorname{sh} k_2 l}{\bar{I}_{2\varphi} k_2 \operatorname{ch} k_2 l}$$

определяют упругий характер закрепления консолей. При $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ полученные соотношения соответствуют жесткому закреплению консолей.

Более полно рассматриваемый метод описан в книгах [13, 23].

6.1.3. Решение задачи в напряжениях

В предыдущем разделе описан метод расчета тонкостенных конструкций, основанный на вариационном принципе Лагранжа. Аналогичные результаты могут быть получены и при решении задачи в напряжениях, основанном на принципе наименьшей работы (см. разд. 1.4.3).

В порядке введения завершим расчет кессона, показанного на рис. 6.5, в котором обшивка работает только на сдвиг, а пояса — на растяжение или сжатие. Из условий равновесия (6.34), (6.35) следует, что в горизонтальных и вертикальных панелях действуют соответственно касательные напряжения τ_1 и τ_2 , а в поясах — усилия $\pm N$. Рассматривая равновесие элемента пояса, показанного на рис. 6.5, в, получим

$$(\tau_1 - \tau_2) \delta dz = dN.$$

Учитывая последнее равенство (6.34), будем иметь

$$\tau_{1,2} = \frac{1}{2\delta} \left(\frac{M}{d_1 d_2} \pm N' \right). \quad (6.58)$$

Таким образом, задача сводится к определению усилия N , которое должно быть найдено из условия совместности деформаций панелей и поясов или согласно принципу наименьшей работы — из условия минимума дополнительной потенциальной энергии $\bar{U}$. В рассматриваемом случае

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(2 \frac{\tau_1^2}{G} d_2 \delta + 2 \frac{\tau_2^2}{G} d_1 \delta + 4 \frac{N^2}{Ef} \right) dz.$$

Подставляя теперь $\tau_{1,2}$ из (6.58) получим функционал вида

$$\bar{U} = \int_0^l F(N, N') dz,$$

$$\text{где } F = \frac{1}{4G\delta} \left[d_2 \left(\frac{M}{d_1 d_2} + N' \right)^2 + d_1 \left(\frac{M}{d_1 d_2} - N' \right)^2 \right] + \frac{2N^2}{Ef}.$$

Условия минимума $\bar{U}$ сводятся к вариационному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial N} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial N'} \right) = 0$$

и естественному граничному условию $\partial F/\partial N' = 0$ в закрепленном сечении $z = l$. В результате получим

$$N'' - k^2 N = 0, \quad (6.59)$$

где $k^2 = \frac{8G\delta}{E(d_1 + d_2)}$
и при $z = l$

$$N' = \frac{M(d_2 - d_1)}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}. \quad (6.60)$$

Решение уравнения (6.59) имеет вид

$$N = C_1 \operatorname{sh} kz + C_2 \operatorname{ch} kz. \quad (6.61)$$

Ввиду того, что на крае $z = 0$, $N = 0$, имеем $C_2 = 0$. Определяя C_1 из условия (6.60), на основании соотношений (6.58) и (6.61) будем иметь

$$\tau_{1,2} = \frac{q_0}{\delta} \left[1 \pm \frac{(d_2 - d_1) \operatorname{ch} kz}{(d_1 + d_2) \operatorname{ch} kl} \right];$$

$$N = \frac{2q_0 (d_2 - d_1) \operatorname{sh} kz}{k (d_1 + d_2) \operatorname{ch} kl}.$$

Здесь

$$q_0 = \frac{M}{2d_1 d_2}$$

— поток касательных напряжений, определяемой формулой Бредта (5.41), следующей из балочной теории, изложенной в гл. 5.

В качестве примера рассмотрим кручение кессона с параметрами (см. рис. 6.5, а) $d_1 = 0,2d$, $d_2 = d$, $l = 5d$, $f = 5d\delta$, $E/G = 2,6$. Изменение касательных напряжений в панелях и усилий в поясах при удалении от закрепленного сечения $z = l$ показано на рис. 6.10 и 6.11. Из графиков следует, что эффект стеснения

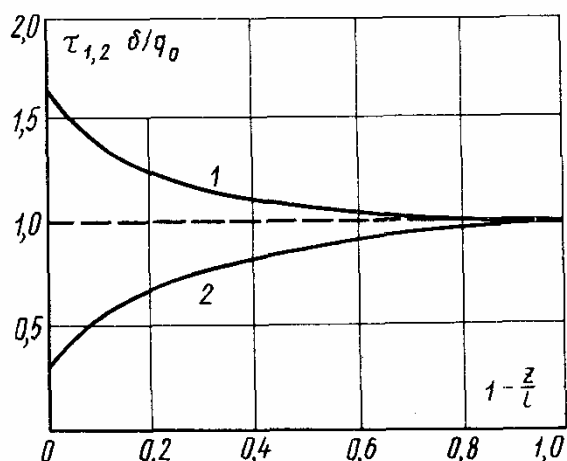


Рис. 6.10. Изменение касательных напряжений τ_1 (кривая 1) и τ_2 (кривая 2) при удалении от жесткого защемления. Пунктирная прямая соответствует расчету по балочной теории

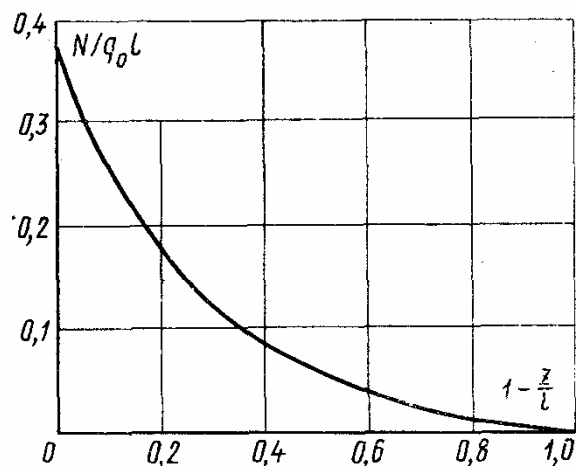


Рис. 6.11. Изменение усилия в поясе кессона при удалении от жесткого защемления

депланации сечения вызывает значительное перераспределение касательных напряжений по отношению к уровню, определяемому балочной теорией (пунктирная прямая на рис. 6.10), и вызывает появление усилий в поясах, которые не описываются этой теорией.

Рассмотрим теперь общую схему решения задачи в напряжениях. Зададим нормальные напряжения в виде суммы двух составляющих

$$\sigma_z = \sigma_z^0 + \bar{\sigma}_z. \quad (6.62)$$

Здесь σ_z^0 — напряжения, уравнивающие внешние нагрузки и определяемые по балочной теории, изложенной в гл. 5. Для нормальных напряжений справедлива формула (5.21), которую для оболочки, изготовленной из одного материала с сечением, отнесенным к главным центральным осям, можно записать в виде

$$\sigma_z^0 = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{N}{F}. \quad (6.63)$$

Здесь $M_x(z)$, $M_y(z)$, $N(z)$ — изгибающие моменты относительно осей x и y и осевая сила, действующие в сечении.

Составляющая $\bar{\sigma}_z$ в равенстве (6.62) описывает возможное отклонение в распределении напряжений от закона (6.63), вытекающего из балочной теории, и может быть представлена в форме

$$\bar{\sigma}_z = \sum_{i=1}^n \sigma_i(z) \varphi_i(s). \quad (6.64)$$

Такое отклонение связано с возможным стеснением депланации сечения при изгибе и кручении. В связи с этим распределение напряжений $\bar{\sigma}_z$ по контуру сечения естественно принять в соответствии с формой депланации сечения при изгибе и кручении. В частности, для кессона с прямоугольным сечением, рассмотренного в разд. 6.1.2, были введены две такие функции, показанные на рис. 6.3, а и 6.6, б. Функции $\sigma_i(z)$ в (6.64) являются искомыми и определяют распределение дополнительных напряжений по длине кессона. Следует отметить, что напряжения σ_z^0 (6.63) обеспечивают выполнение условий равновесия и статических граничных условий в отношении продольной силы и изгибающих моментов. Поэтому напряжения $\bar{\sigma}_z$ (6.64) не должны давать результирующей силы и моментов, т. е. должны выполняться условия ортогональности функций φ_i с 1, x и y , а именно:

$$\oint \varphi_i dF = \oint x \varphi_i dF = \oint y \varphi_i dF = 0. \quad (6.65)$$

Таким образом, из равенств (6.62)—(6.64) имеем

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{N}{F} + \sum_{i=1}^n \sigma_i \varphi_i. \quad (6.66)$$

Для определения касательных напряжений так же, как и в балочной теории (см. разд. 5.3.1), воспользуемся уравнением равновесия элемента оболочки, показанного на рис. 5.3, т. е.

$$\frac{\partial (\sigma_z \delta)}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0, \quad (6.67)$$

где $q = \tau_{sz} \delta$ — поток касательных напряжений, введенный в разд. 5.1.

Подставляя (6.66) в уравнение (6.67) и интегрируя, получим

$$q = q_Q + q_0(z) - \sum_{i=1}^n \sigma'_i(z) [\Phi_i(s) + C_i], \quad (6.68)$$

$$\text{где } q_Q = - \left(\frac{Q_y}{I_x} S_x + \frac{Q_x}{I_y} S_y \right). \quad (6.69)$$

Выражение (6.69) было выведено в балочной теории и в общем случае произвольных осей имеет форму (5.28). Функции

$$S_x(s) = \int_0^s y dF, \quad S_y(s) = \int_0^s x dF$$

являются статическими моментами отсеченной части контура сечения. Способ построения этих функций был изложен в разд. 5.3.1. Поток q_Q обеспечивает выполнение условий равновесия и статических граничных условий в отношении перерезывающих сил $Q_x(z)$, $Q_y(z)$, заданных в сечении. Функции

$$\Phi_i(s) = \int_0^s \varphi_i dF$$

по аналогии с $S_x(s)$ и $S_y(s)$ называются статическими бимомен-тами отсеченной части контура сечения и строятся так же, как функции $S_x(s)$ и $S_y(s)$.

Поток $q_0(z)$ представляет собой произвольную функцию интегрирования. В случае однозамкнутого контура поток $q_0(z)$ определяется, как было показано в разд. 5.3.3, из уравнения моментов относительно оси z , т. е.

$$\begin{aligned} M_z = & \oint q_Q \rho ds + q_0 \oint \rho ds - \\ & - \sum_{i=1}^n \sigma'_i(z) [\oint \Phi_i \rho ds + C_i \oint \rho ds]. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Здесь $M_z(z)$ — крутящий момент, действующий в сечении; ρ — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на

касательную к контуру. Зададим в (6.70) постоянные C_i так, чтобы выражения в квадратных скобках обращались в нуль, т. е.

$$C_i = -\frac{1}{\Omega} \oint \Phi_i \rho \, ds, \quad (6.71)$$

где $\Omega = \oint \rho \, ds$.

Из равенства (6.70) с учетом (6.71) имеем

$$q_0 = \frac{1}{\Omega} \left(M_z - \oint q_Q \rho \, ds \right). \quad (6.72)$$

Таким образом, соотношения (6.66) и (6.68) при любых функциях $\sigma_i(z)$ обеспечивают выполнение уравнений равновесия и определяют статически возможные состояния рассматриваемой системы. Как следует из принципа наименьшей работы (см. разд. 1.4.3), действительные напряжения должны в этом случае обеспечивать минимум дополнительной потенциальной энергии

$$\bar{U} = \int_0^l dz \oint \left(\frac{\sigma_z^2}{2E} dF + \frac{q^2}{2G\delta} ds \right). \quad (6.73)$$

Подставляя напряжения (6.66) и поток (6.68) в выражение (6.73), получим функционал вида

$$\bar{U} = \int_0^l F(\sigma_i, \sigma'_i) dz.$$

Вариационные уравнения и естественные граничные условия на закрепленном крае оболочки для этого функционала записываются в форме

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_j} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial \sigma'_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3 \dots n)$$

и при $z = \text{const}$ $\partial F / \partial \sigma'_j \equiv 0$. С учетом условий (6.65) получим

$$\sum_{i=1}^n \sigma'_i a_{ij} - \sum_{i=1}^n \sigma_i b_{ij} = f_j(z) \quad (j = 1, 2, 3 \dots n), \quad (6.74)$$

где $a_{ij} = \oint \frac{\bar{\Phi}_i \bar{\Phi}_j}{G\delta} ds$, $b_{ij} = \oint \frac{\Phi_i \Phi_j}{E} dF$;

$$f_j = \oint q_Q \bar{\Phi}_j \frac{ds}{G\delta} + \frac{M_z}{\Omega} \oint \bar{\Phi}_j \frac{ds}{G\delta} - \frac{1}{\Omega} \oint q_Q \rho \, ds \oint \bar{\Phi}_j \frac{ds}{G\delta},$$

$$\bar{\Phi}_j = \Phi_j - \frac{1}{\Omega} \oint \Phi_j \rho \, ds.$$

На закрепленном крае $z = \text{const}$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \sigma'_i a_{ij} = f_j \quad (j = 1, 2, 3 \dots n). \quad (6.75)$$

На свободном крае следует принять $\sigma_j = 0$ ($j = 1, 2, 3 \dots n$). Решение уравнений (6.74) с учетом соответствующих граничных условий определяет напряженное состояние тонкостенной конструкции.

В качестве примера рассмотрим оболочку, показанную на рис. 6.5, а, причем будем считать, что обшивка работает на нормальные напряжения. Поскольку оболочка нагружена только торцевым крутящим моментом, $N = M_x = M_y = Q_x = Q_y = 0$ и $M_z = M = \text{const}$. В равенстве (6.66) удержим один член ряда, соответствующий деформации сечения при свободном кручении, т. е.

$$\sigma_z = \sigma(z) \varphi(s). \quad (6.76)$$

Функция $\varphi(s) = xy$, показанная на рис. 6.6, б, ортогональна к 1, x и y , т. е. условия (6.65) выполняются. Поток касательных напряжений (6.68) с учетом равенств (6.69), (6.71), (6.72) в рассматриваемом случае имеет вид

$$q = \frac{M}{\Omega} - \sigma'(z) \bar{\Phi}(s), \quad (6.77)$$

$$\text{где } \bar{\Phi}(s) = \Phi(s) - \frac{1}{\Omega} \oint \Phi p ds, \quad \Phi(s) = \int_0^s \varphi dF.$$

Система (6.74) вырождается в одно уравнение, которое можно записать в форме

$$\sigma'' - k^2 \sigma = 0, \quad (6.78)$$

$$\text{где } k^2 = \frac{G\delta \oint \varphi^2 dF}{E \oint \bar{\Phi}^2 ds}.$$

Для закрепленного торца оболочки $z = l$ следует записать граничное условие (6.75), т. е.

$$\sigma' \oint \bar{\Phi}^2 ds = \frac{M}{2d_1 d_2} \oint \bar{\Phi} ds, \quad (6.79)$$

а для края $z = 0$ принять $\sigma = 0$.

Решение уравнения (6.78) имеет вид

$$\sigma = C_1 \text{sh } kz + C_2 \text{ch } kz.$$

Поскольку $\sigma(0) = 0$, имеем $C_2 = 0$. Определяя C_1 из условия (6.79), получим

$$\sigma(z) = \frac{M}{2d_1 d_2 k \text{ch } kl} \frac{\oint \bar{\Phi} ds}{\oint \bar{\Phi}^2 ds} \text{sh } kz. \quad (6.80)$$

Для кессона, показанного на рис. 6.5, а, имеем

$$\oint \varphi^2 dF = I_\varphi = \frac{d_1^2 d_2^2}{24} (\delta d_2 + \delta d_1 + 6F),$$

$$\oint \bar{\Phi} ds = - \frac{I_\varphi}{d_1 d_2} (d_2 - d_1),$$

$$\oint \bar{\Phi}^2 ds = \frac{I_\varphi^2}{2d_1^2 d_2^2} (d_1 + d_2) + \frac{d_1^2 d_2^2 \delta^2}{1440} (d_1^3 + d_2^3),$$

$$k^2 = \frac{2G\delta d_1^2 d_2^2}{EI_\varphi (d_1 + d_2)} \left[1 + \frac{d_1^4 d_2^4 \delta^2 (d_1^3 + d_2^3)}{720 I_\varphi^2 (d_1 + d_2)} \right]^{-1}. \quad (6.81)$$

С учетом вычисленных интегралов и формулы (6.80) соотношения (6.76) и (6.77) для нормальных напряжений и потока касательной напряжений принимают вид

$$\sigma_z = - \frac{ME (d_2 - d_1) k}{2d_1^2 d_2^2 \delta} \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} kl} \varphi(s);$$

$$q = \frac{M}{2d_1 d_2} \left[1 + \frac{E (d_2 - d_1) k^2}{G\delta d_1 d_2} \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} kl} \bar{\Phi}(s) \right].$$

Отметим, что коэффициент k (6.81), характеризующий скорость изменения нормальных напряжений при удалении от закрепленного края и максимальное значение этих напряжений при $z = l$, отличается от соответствующего коэффициента k_2 (6.49), полученного при решении задачи в перемещениях. Эти коэффициенты совпадают только в том случае, если считается, что обшивка не работает на нормальные напряжения. В общем случае при решении задачи в перемещениях коэффициент k_2 получается большим, чем коэффициент k при решении задачи в напряжениях, т. е. в первом случае нормальные напряжения в жестком защемлении выше, чем во втором, и быстрее затухают при удалении от жесткого защемления. Это объясняется следующим. При решении задачи в перемещениях предполагалось, что сечение поворачивается как жесткий диск, т. е. считалось, что оно не деформируется в своей плоскости. Физически это соответствует наличию в кессоне нервюр, абсолютно жестких в своей плоскости и жестко связанных с обшивкой. При решении задачи в напряжениях деформация сечения в своей плоскости допускается, т. е. расчетная модель обладает меньшей жесткостью.

Таким образом, в расчетной модели, соответствующей методу перемещений, деформация обшивки стеснена в большей степени, чем в модели, соответствующей методу напряжений, а следовательно, напряжения в жестком защемлении в первом случае больше, чем во втором, и быстрее затухают. Если обшивка не

работает на нормальные напряжения, то этот эффект не проявляется и результаты совпадают.

Расчет конструкций типа крыла в функциях напряжений более полно описан в книге [31].

6.2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТРИНГЕРОВ И ОБШИВКИ

Панели крыла и корпуса летательного аппарата для повышения общей жесткости, как правило, подкрепляются часто расположенными стрингерами, связанными с элементами поперечного набора — нервюрами в крыле и шпангоутами в корпусе. В местах приложения сосредоточенных сил устанавливаются более жесткие элементы — лонжероны, нагрузка с которых передается на стрингеры посредством касательных напряжений, возникающих в обшивке.

Для иллюстрации этого эффекта, называемого эффектом включения стрингера, рассмотрим панель, образованную полкой лонжерона, двумя стенками и двумя стрингерами (рис. 6.12, а). Пусть в сечении $x = 0$ лонжерон нагружен силой P , а стрингеры свободны от нагрузки. Имея в виду наличие жестких поперечных элементов, будем считать, что точки панели смещаются только в направлении оси x . Тогда в лонжероне и стрингерах возникнут напряжения

$$\sigma_{\text{л}} = E_{\text{л}} \frac{du_{\text{л}}}{dx}, \quad \sigma_{\text{с}} = E_{\text{с}} \frac{du_{\text{с}}}{dx}. \quad (6.82)$$

Предположим далее, что тонкая стенка работает только на сдвиг. Тогда в ней возникнут касательные напряжения $\tau_0 = G_0 \gamma$, причем согласно рис. 6.11, а деформация сдвига $\gamma = (u_{\text{л}} - u_{\text{с}})/b$. Таким образом

$$\tau_0 = \frac{G_0}{b} (u_{\text{л}} - u_{\text{с}}). \quad (6.83)$$

Рассматривая равновесие элементов лонжерона и стрингеров (см. рис. 6.12, б), будем иметь

$$F_{\text{л}} \frac{d\sigma_{\text{л}}}{dx} - 2\tau_0 \delta_0 = 0, \quad F_{\text{с}} \frac{d\sigma_{\text{с}}}{dx} + \tau_0 \delta_0 = 0. \quad (6.84)$$

Пять уравнений (6.82)—(6.84) включают пять неизвестных — $\sigma_{\text{л}}$, $\sigma_{\text{с}}$, τ_0 , $u_{\text{л}}$, $u_{\text{с}}$.

Будем решать рассматриваемую задачу в напряжениях. Прежде всего умножим второе уравнение (6.84) на 2 и сложим с первым. Интегрируя результат, получим $2\sigma_{\text{с}}F_{\text{с}} + \sigma_{\text{л}}F_{\text{л}} = C_1$. Поскольку при $x = 0$ $\sigma_{\text{с}} = 0$ и $\sigma_{\text{л}} = -P/F_{\text{л}}$, постоянная $C_1 = -P$, т. е.

$$\sigma_{\text{с}} = -\frac{1}{2F_{\text{с}}} (P + \sigma_{\text{л}}F_{\text{л}}). \quad (6.85)$$

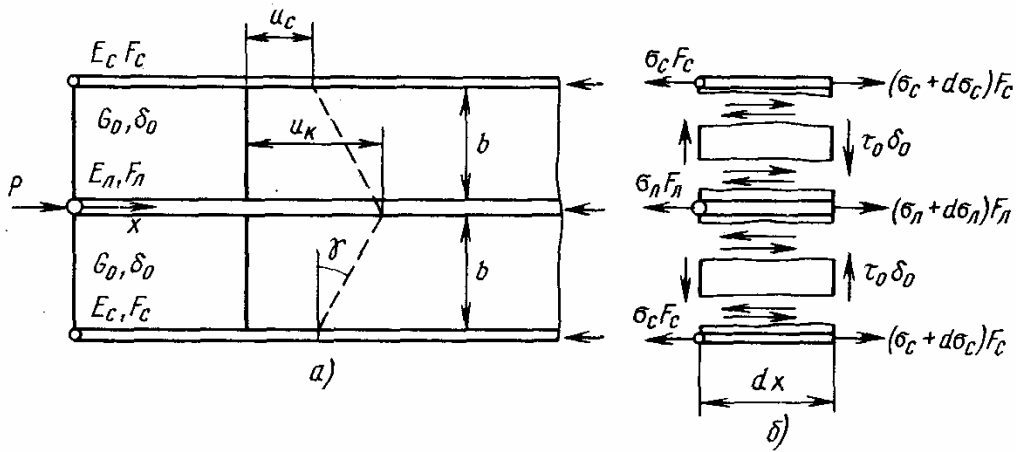


Рис. 6.12. Параметры подкрепленной панели (а) и ее напряженное состояние (б)

Продифференцируем теперь первое уравнение (6.84) и выразим в нем τ_0 с помощью равенства (6.83)

$$F_l \frac{d^2 \sigma_l}{dx^2} - \frac{2}{b} G_0 \delta_0 \left(\frac{du_l}{dx} - \frac{du_c}{dx} \right) = 0.$$

Заменяя производные от перемещений через функции напряжений с помощью формул (6.82) и выражая σ_c через σ_l согласно (6.85), окончательно получим следующее уравнение:

$$\sigma_l'' - k^2 \sigma_l = P \frac{G_0 \delta_0}{b E_c F_c F_l}. \quad (6.86)$$

Здесь

$$k^2 = \frac{G_0 \delta_0 B}{b E_c E_l F_c F_l}, \quad (6.87)$$

$B = 2E_c E_c + E_l F_l$ — суммарная жесткость стрингеров и лонжерона. Общее решение уравнения (6.86) имеет вид

$$\sigma_l = C_2 e^{-kx} + C_3 e^{kx} - \frac{P G_0 \delta_0}{k^2 b E_c F_c F_l}.$$

Пусть рассматриваемая панель является бесконечно длинной. Поскольку при $x \rightarrow \infty$ функция напряжения σ_l должна оставаться ограниченной, очевидно, следует принять $C_3 = 0$. Окончательно, определяя C_2 из условия $\sigma_l(0) = -P/F_l$, получим

$$\sigma_l = \bar{\sigma}_l - \left(\frac{P}{F_l} + \bar{\sigma}_l \right) e^{-kx}, \quad (6.88)$$

здесь $\bar{\sigma}_l = -P E_l / B$ — напряжения в лонжероне вдали от нагруженного края панели (при $x \rightarrow \infty$). Из равенств (6.85) и (6.88) после некоторых преобразований найдем

$$\sigma_c = \bar{\sigma}_c (1 - e^{-kx}), \quad (6.89)$$

где $\bar{\sigma}_c = -PE_c/B$ — напряжения в стрингере при $x \rightarrow \infty$. И, наконец, подставляя (6.89) во второе уравнение (6.84), запишем выражение для касательных напряжений

$$\tau_0 = P \sqrt{\frac{E_c F_c G_0}{b \delta_0 B E_\pi F_\pi}} e^{-kx}.$$

В качестве примера рассмотрим панель с параметрами $F_c = F/4$; $b\delta_0 = F_c$; $E_c = E_\pi = E$; $G_0/E = 2,6$. Изменение напряжений по длине панели показано на рис. 6.13. Из графика следует, что при $x = 2,4b$ напряжения в стрингерах и лонжероне выравниваются, т. е. стрингеры полностью включаются в работу. Интенсивность включения стрингеров в работу пропорциональна параметру k (6.87) и тем выше, чем больше жесткость обшивки на сдвиг $G_0\delta_0$.

Более сложные примеры решения аналогичных задач приведены в книге [21].

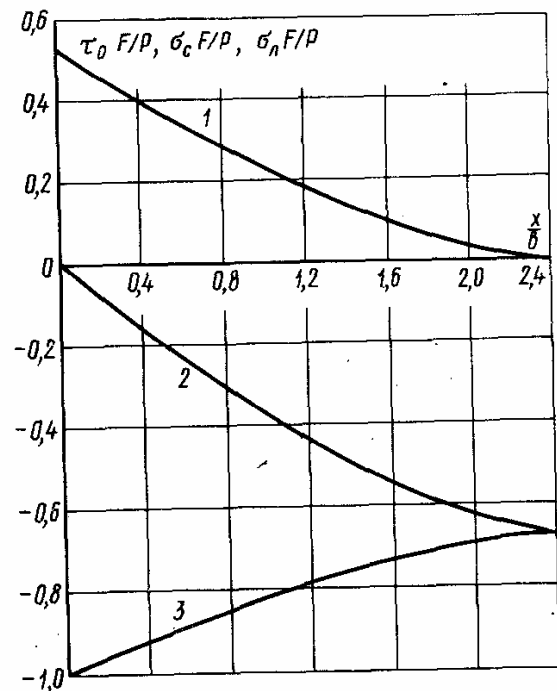


Рис. 6.13. Распределение напряжений в обшивке (1), стрингере (2) и лонжероне (3) по длине панели

6.3. ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ И ОБОЛОЧЕК С ОТКРЫТЫМ КОНТУРОМ СЕЧЕНИЯ

В настоящем разделе рассматриваются цилиндрические и призматические тонкостенные конструкции типа фюзеляжа самолета, крыла или корпуса летательного аппарата, имеющие длинные вырезы, т. е. оболочки с незамкнутым контуром поперечного сечения. Характерные размеры рассматриваемого тела существенно отличаются между собой: толщина его стенки мала по сравнению с габаритами поперечного сечения, а последние, в свою очередь, значительно меньше длины. Оболочка может обладать подкрепляющими продольными элементами жесткости.

Изложенный в гл. 5 метод расчета подкрепленных конструкций может быть успешно применен для рассматриваемых систем только в том случае, когда поперечные силы Q_x , Q_y проходят через центр изгиба.

Специфическая особенность работы цилиндрических оболочек открытого профиля состоит в том, что при кручении в них могут возникать продольные деформации и соответствующие нормальные напряжения, приводящие в каждом поперечном сечении к системе самоуравновешенных продольных сил. Поэтому для

расчета подобных конструкций требуется метод, отличный от методов элементарной теории изгиба балок.

Теория тонкостенных призматических и цилиндрических конструкций с открытым контуром поперечного сечения была разработана В. З. Власовым [13].

6.3.1. Основные гипотезы. Деформации удлинения и кривизны кручения

Рассмотрим оболочку (рис. 6.14), подверженную воздействию произвольной поверхностной нагрузки. Отнесем срединную поверхность к ортогональным криволинейным координатам z, s , где z — расстояние вдоль образующей, s — длина дуги контурной линии (определения срединной поверхности и контура поперечного сечения приведены в разд. 5.1).

Вводятся следующие кинематические гипотезы:

а) контур поперечного сечения остается жестким (недеформируемым) в своей плоскости;

б) деформация сдвига срединной поверхности, характеризующаяся изменением прямого угла между координатными линиями $z = \text{const}$, $s = \text{const}$, принимается равной нулю.

На плоскость жесткого контура $z = \text{const}$ нанесем декартову систему координат Oxy (рис. 6.15). Тогда начало отсчета (точка O) и оси координат Ox , Oy будут перемещаться вместе с контуром. Пусть перемещения точки O в направлении оси Ox есть $\xi(z)$, а вдоль оси Oy — $\eta(z)$. Тогда согласно кинематике твердого тела компоненты полного перемещения произвольной точки $M(z, s)$ на контуре в направлениях осей Ox и Oy могут быть выражены следующим образом:

$$\xi_M = \xi - y\theta, \quad (6.90)$$

$$\eta_M = \eta + x\theta.$$

Здесь $x = x(s)$; $y = y(s)$ — декартовы координаты точки M ; $\theta = \theta(z)$ — угол поворота сечения относительно точки O , который считается малым. Положительным принимается вращение

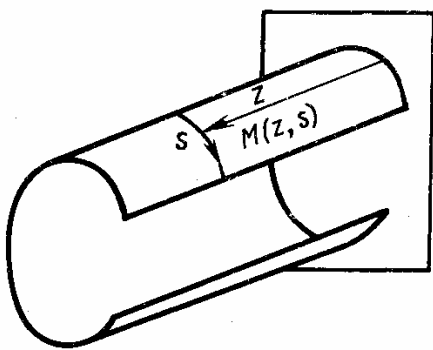


Рис. 6.14. Тонкостенный стержень

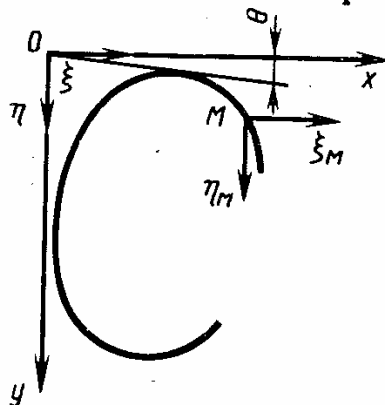


Рис. 6.15. Поперечное сечение стержня

по часовой стрелке. Обозначим тангенциальное перемещение точки $M(z, s)$ буквой v , а нормальную составляющую — w (см. рис. 6.16). Для компонент перемещений ξ_M, η_M точки контура будем иметь

$$v(z, s) = \xi_M \cos \alpha + \eta_M \sin \alpha, \quad (6.91)$$

$$w(z, s) = -\xi_M \sin \alpha + \eta_M \cos \alpha.$$

Здесь α — угол между касательной к контуру и положительным направлением оси Ox . Очевидно

$$\frac{dx}{ds} = x' = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = y' = \sin \alpha. \quad (6.92)$$

Подставляя выражения (6.90) в зависимости (6.91) и учитывая равенства (6.92), получим

$$v(z, s) = \xi(z) x'(s) + \eta(z) y'(s) + \theta(z) h(s), \quad (6.93)$$

$$w(z, s) = -\xi(z) y'(s) + \eta(z) x'(s) + \theta(z) t(s),$$

$$\text{где принято } h(s) = xy' - yx', \quad (6.94)$$

$$t(s) = xx' + yy'.$$

Эти формулы для тангенциального и нормального перемещений произвольной точки срединной поверхности являются следствием первой кинематической гипотезы. Второе допущение приводит к выражению для продольного перемещения $u = u(z, s)$. Действительно, согласно последнему из соотношений (4.12) деформация сдвига срединной поверхности, отнесенной к криволинейным координатам z, s , может быть записана в виде

$$\gamma_{z,s} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Полагая $\gamma_{z,s} = 0$, а также подставляя выражение для тангенциального перемещения (6.93) и интегрируя, будем иметь

$$u(z, s) = \zeta(z) - \int_0^s \frac{\partial v}{\partial z} ds = \zeta(z) - x(s) \dot{\xi}(z) y(s) \dot{\eta}(z) - \omega(s) \dot{\theta}(z). \quad (6.95)$$

Здесь $\zeta(z)$ — продольное перемещение точки контура, соответствующей началу отсчета криволинейного интеграла; $\omega(s) = \int_0^s h(s) ds$ — функция контурной координаты s , названная

В. З. Власовым секториальной площадью. Если соединить начало координат Oxy с точкой на контуре прямым отрезком под углом φ_0 к оси Ox (см. рис. 6.16), то на этом отрезке имеем $x =$

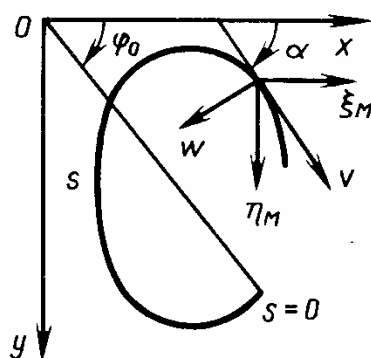


Рис. 6.16. Перемещение точки на срединной поверхности в плоскости контура стержня

$= s \cos \varphi_0$, $y = s \sin \varphi_0$. Тогда подынтегральная функция $h(s)$ согласно ее выражению (6.94) окажется равной нулю для каждой точки на этом отрезке. Поэтому будем принимать нижний предел интегрирования на левом конце контура или в точке его симметрии. Таким образом

$$\omega(s) = \int_0^s (xy' - yx') ds. \quad (6.96)$$

Геометрический смысл этой функции заключается в том, что ее величина для каждой точки s контура равна удвоенной площади сектора между линией контура и лучами, исходящими из начала координат O в точке $s = 0$ и s .

Деформация продольного удлинения цилиндрической оболочки (4.12) в координатах z, s есть $\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}$.

Применяя формулу для продольного перемещения (6.95), получим

$$\epsilon_z = \dot{\zeta} - x(s) \dot{\xi} - y(s) \dot{\eta} - \omega(s) \dot{\theta}. \quad (6.97)$$

Согласно гипотезе о недеформируемости контура деформации контурного удлинения и изгибной контурной кривизны отсутствуют, т. е. $\epsilon_s = 0$, $\kappa_s = 0$. Исследованиями установлено, что учет деформации продольной кривизны дает продольные распределенные изгибающие моменты, максимальные напряжения от которых значительно ниже нормальных напряжений, соответствующих деформации продольного удлинения ϵ_z . Поэтому принимаем $\kappa_z \simeq 0$... Деформацию кривизны кручения κ_{zs} получим из рассмотрения принимаемого напряженного состояния стержня и точного решения задачи о «чистом» кручении тонкостенного стержня с криволинейным открытым контуром сечения. Действительно, напряженное состояние стержня в сечении $z = \text{const}$ представляется следующим: нормальные напряжения σ_z постоянны по толщине стенки, контурные касательные напряжения $\tau_{zs} = \tau_{zs}(z, s, \gamma)$ меняются по толщине линейно (рис. 6.17), а касательными напряжениями τ_{zy} в направлении нормали к контуру пренебрегается. Пусть касательные напряжения $\tau_{zs}(z, s, \pm h/2)$ в крайних точках толщины стержня имеют значения τ_1 и τ_2 (рис. 6.17). Тогда напряжения $\tau_{zs}(z, s, \gamma)$ можно представить суммой двух слагаемых: постоянными по толщине

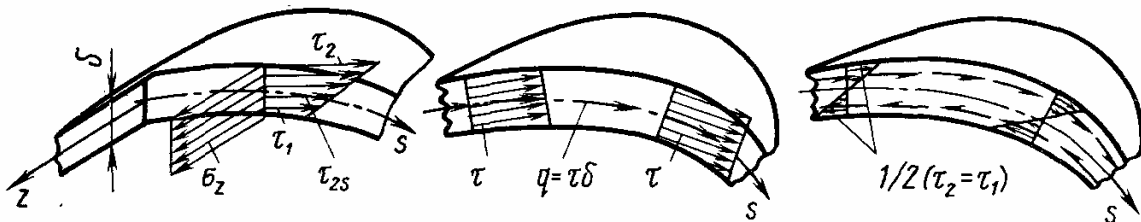


Рис. 6.17. Напряженное состояние стержня

касательными напряжениями, равными $\tau = \tau(z, s) = (\tau_1 + \tau_2)/2$, и напряжениями, меняющимися по толщине кососимметрично, со значениями в крайних точках $\gamma = \pm h/2$, равными $\pm(\tau_2 - \tau_1)/2$. Последние, переменные по толщине касательные напряжения статически эквивалентны распределенным крутящим моментам, которые на сечении $z = \text{const}$ приводятся к крутящему моменту $H = H(z)$.

Согласно теории тонких оболочек контурные касательные напряжения определяются выражением

$$\tau_{zs} = G\gamma\kappa_{zs}. \quad (6.98)$$

Решение же задачи чистого кручения тонкостенного стержня с криволинейным открытым профилем [3] моментом H при условии $h/R_s \ll 1$ имеет вид

$$\tau_{zs} = -G\gamma 2\dot{\theta} \dots \quad (6.99)$$

Сравнивая выражения (6.98) и (6.99), получим формулу для деформации кривизны кручения

$$\kappa_{zs} = -2\dot{\theta} \dots \quad (6.100)$$

Нормальные напряжения, соответствующие продольной деформации ϵ_z , приводятся к нормальным усилиям $\sigma_z h$, действующим в направлении образующей срединной поверхности. Закон Гука (4.7) для плоского напряженного состояния дает соотношения

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_s), \\ \epsilon_s &= \frac{1}{E}(\sigma_s - \mu\sigma_z). \end{aligned} \quad (6.101)$$

Здесь σ_s — нормальное напряжение в продольном сечении $s = \text{const}$.

В условиях недеформируемости контура ($\epsilon_s = 0$) имеем $\sigma_s = \mu\sigma_z$. Отсюда первая из формул (6.101) дает соотношение $\sigma_z = \frac{E}{1-\mu^2} \epsilon_z$. Следуя теории тонкостенных стержней, будем пренебрегать величиной μ^2 по сравнению с единицей:

$$1 - \mu^2 \simeq 1. \quad (6.102)$$

Тогда

$$\sigma_z = E\epsilon_z, \quad (6.103)$$

а имея в виду выражение (6.97), получим формулу для нормальных усилий

$$\sigma_z h = Eh(\xi - x(s)\ddot{\xi} - y(s)\ddot{\eta} - \omega(s)\ddot{\theta}). \quad (6.104)$$

Постоянные по толщине касательные напряжения $\tau = \tau(z, s)$ приводим к потоку касательных сил $q(z, s) = \tau h$, подробно опи-

сываемому в разд. 5.1. Действие крутящих моментов, распространенных на всю длину контура, будем заменять работой крутящего момента $H(z)$ на всем поперечном сечении.

6.3.2. Полная потенциальная энергия.

Уравнения равновесия. Граничные условия

В соответствии с формулами (4.16), (4.27) потенциальная энергия деформации тонкой оболочки определяется выражением

$$U = \frac{1}{2} \int_i \left\{ \frac{Eh}{1-\mu^2} \oint \left[(\varepsilon_z + \varepsilon_s)^2 - 2(1-\mu)(\varepsilon_z \varepsilon_s - \frac{\gamma}{4})^2 \right] ds + \right. \\ \left. + \frac{Eh^3}{12(1-\mu)} \oint \left[(\kappa_z + \kappa_s)^2 - 2(1-\mu) \left(\kappa_z \kappa_s - \frac{\kappa_{zs}^2}{4} \right) \right] ds \right\} dz.$$

Отсюда в рамках принятых гипотез ($\varepsilon_s = \gamma_{zs} = \kappa_s = \kappa_z = 0$) и замечания (6.102) получим потенциальную энергию деформации тонкостенного стержня

$$U = \frac{1}{2} \int_i \oint \left[Eh \varepsilon_z^2 + \frac{Fh^3}{6(1+\mu)} \left(\frac{\kappa_{zs}}{2} \right)^2 \right] ds dz. \quad (6.105)$$

После подстановки выражения (6.100) и введения момента инерции чистого кручения $I_d = \frac{1}{3} \oint h^3 ds$ (6.105) последнее выражение представится в виде

$$U = \int_i \left(\frac{1}{2} \oint E \varepsilon_z^2 h ds + \frac{1}{2} G I_d \dot{\theta}^2 \right) dz. \quad (6.106)$$

Вторым подынтегральным слагаемым отражена работа отнесенного по всему поперечному сечению крутящего момента $H(z)$ на угле закручивания $\dot{\theta} dz$. Следовательно,

$$H = G I_d \dot{\theta}. \quad (6.107)$$

Рассмотрим работу внешних сил. Пусть составляющие поверхностной нагрузки по осям Ox , Oy и Oz заданы соответственно функциями $P_x = P_x(z, s)$, $P_y = P_y(z, s)$, $P_z = P_z(z, s)$. Работа этой нагрузки на перемещениях ξ_M , η_M (6.90), $u(z, s)$ (6.95) срединной поверхности равна

$$A_{\Pi} = \int_i \oint [P_x \xi_M(z, s) + P_y \eta_M(z, s) + P_z u(z, s)] ds dz.$$

На торце $z = z_0$ стержня могут быть приложены сосредоточенные обобщенные силы N^0 , Q_x^0 , Q_y^0 , M_x^0 , M_y^0 , M_z^0 , B^0 .

Тогда с учетом зависимостей (6.90), (6.95), (6.97) и обозначений для распределенных обобщенных усилий

$$\oint P_x dx = q_x, \quad \oint P_y dy = q_y, \quad \oint (-P_{xy} dy + P_{yx} dx) = m_z; \quad (6.108)$$

$$\oint P_z ds = q_z, \quad \oint P_{zy} ds = m_x, \quad -\oint P_{zx} ds = m_y, \quad \oint P_z \omega ds = b_p \quad (6.109)$$

выражение для полной потенциальной энергии тонкостенного стержня (как сумма энергии деформации (6.106) и взятая со знаком минус работа внешних сил) запишется в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = \int_l \left[\frac{1}{2} \oint E (\dot{\xi} - x\ddot{\xi} - y\ddot{\eta} - \omega\ddot{\theta})^2 h ds + \frac{1}{2} G I_d \dot{\theta} - \right. \\ \left. - (q_z \xi + q_x \eta + q_y \eta + m_y \dot{\xi} - m_x \dot{\eta} + m_z \theta - b_p \dot{\theta}) \right] dz - (N^0 \xi_0 + \\ + Q_x^0 \xi_0 + Q_y^0 \eta_0 + M_y^0 \dot{\xi} - M_x^0 \dot{\eta} + M_z^0 \theta - B^0 \dot{\theta}). \end{aligned} \quad (6.110)$$

Последней скобкой отражена работа обобщенных сосредоточенных сил на соответствующих обобщенных перемещениях. При этом учтено, что положительный момент M_x^0 и бимомент B^0 вызывают соответственно отрицательную девиацию $\dot{\eta}_0$ и отрицательную меру деформации $\dot{\theta}_0$.

Далее применяется вариационный принцип Лагранжа. С позиции вариационного исчисления энергия (6.110) — это функционал вида

$$I = \int_a^b F(x, y_i, y'_i, y''_i) dx + \sum_{i=1}^n [P_i y_i(a) + Q_i y'_i(a)]$$

со свободным концом на границе $x = b$ и заданными значениями функций P_i, Q_i на другом конце. Необходимое условие минимума функционала приводит к системе уравнений Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''_i} \right) = 0 \quad (6.111)$$

и естественным граничным условиям

$$\frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''_i} \right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y''_i} = 0 \quad \text{при } x = b, \quad (6.112)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''_i} \right) + P_i = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y''_i} + Q_i = 0 \quad \text{при } x = a.$$

Для функционала (6.110) на множестве функций ζ , ξ , η , θ уравнения (6.111) примут вид

$$\ddot{\zeta}F - \xi^{III}S_y - \eta^{III}S_x - \theta^{III}S_\omega + \frac{1}{E}q_z = 0,$$

$$\zeta^{III}S_y - \xi^{IV}I_y - \eta^{IV}I_{xy} - \theta^{IV}S_{\omega x} + (q_x - m_y)/E = 0, \quad (6.113)$$

$$\zeta^{III}S_x - \xi^{IV}I_{xy} - \eta^{IV}I_x - \theta^{IV}S_{\omega y} + (q_y + \dot{m}_x)/E = 0,$$

$$\zeta^{III}S_\omega - \xi^{IV}S_{\omega x} - \eta^{IV}S_{\omega y} - \theta^{IV}I_\omega + G/EI_d\ddot{\theta} + (m_z + \dot{b}_p)/E = 0.$$

Здесь в дополнение к ранее введенным обозначениям (5.15), (5.16) (где следует положить $\varphi \equiv 1$) принято

$$\begin{aligned} S_\omega &= \oint \omega h ds + \sum_I \omega_I f_I, \\ S_{\omega x} &= \oint \omega x h ds + \sum_I \omega_I x_I f_I, \\ S_{\omega y} &= \oint \omega y h ds + \sum_I \omega_I y_I f_I, \\ I_\omega &= \oint \omega^2 h ds + \sum_I \omega_I^2 f_I. \end{aligned} \quad (6.114)$$

Заметим, что в соответствии с выводами разд. 1.3 гл. 1 система дифференциальных уравнений (6.113) является уравнениями равновесия стержня в перемещениях.

Естественные граничные условия (6.112) решают вопрос о структуре формул для обобщенных сил. Продольному перемещению ζ будет соответствовать осевая сила

$$N = \frac{\partial F}{\partial \dot{\zeta}} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\zeta}} \right) = \oint E (\dot{\zeta} - x\dot{\xi} - y\dot{\eta} - \omega\dot{\theta}) h ds. \quad (6.115)$$

С учетом формулы (6.104) получим

$$N = \oint \sigma_z h ds. \quad (6.116)$$

Перерезывающая сила Q_x , соответствующая вариации перемещения $\delta \xi$, получит выражение

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}} \right) = \\ &= -m_y + \oint x E (\dot{\xi} - x\dot{\xi}^{III} - y\dot{\eta}^{III} - \omega\dot{\theta}^{III}) h ds = -m_y + \oint x \frac{d\sigma_z}{dz} h ds. \end{aligned} \quad (6.117)$$

Аналогично будем иметь

$$Q_y = m_x + \oint y E (\ddot{\xi} - x \dot{\xi}^{III} - y \dot{\eta}^{III} - \omega \dot{\theta}^{III}) h ds =$$

$$= m_x + \oint y \frac{d\sigma_z}{dz} h ds; \quad (6.118)$$

$$M_z = b_p + H + \oint \omega \frac{d\sigma_z}{dz} h ds; \quad (6.119)$$

$$M_x = \oint y \sigma_z h ds, \quad M_y = - \oint x \sigma_z h ds, \quad (6.120)$$

$$B = \oint \omega \sigma_z h ds.$$

Подставляя зависимости для обобщенных сил (6.115) ... (6.120) в систему (6.113), получим уравнения равновесия полосы стержня $z = \text{const}$, $z + dz = \text{const}$ в усилиях

$$\frac{dN}{dz} + q_z = 0, \quad \frac{dQ_x}{dz} + q_x = 0, \quad \frac{dQ_y}{dz} + q_y = 0,$$

$$\frac{dM_z}{dz} + m_z = 0. \quad (6.121)$$

Сравнение формул для сил (6.116) ... (6.118) и моментов (6.120) приводит к соотношениям

$$\frac{dM_x}{dz} - Q_y + m_x = 0, \quad \frac{dM_y}{dz} + Q_x + m_y = 0,$$

$$\frac{dB}{dz} - M_\omega + b_p = 0. \quad (6.122)$$

$$\text{Здесь } M_\omega = \oint \omega \frac{d\sigma_z}{dz} h ds + b_p \quad (6.123)$$

изгибно-крутящий момент, интерпретация которого дана в разд. 6.3.3.

Для однозначного решения системы дифференциальных уравнений (6.113) четырнадцатого порядка требуется столько же граничных условий. На каждом конце стержня можно задать по семь условий: кинематические — $\zeta(z_0)$, $\xi(z_0)$, $\eta(z_0)$, $\dot{\xi}(z_0)$, $\dot{\eta}(z_0)$, $\theta(z_0)$, $\dot{\theta}(z_0)$ или статические — $N(z_0)$, $Q_x(z_0)$, $Q_y(z_0)$, $M_y(z_0)$, $M_x(z_0)$, $M_z(z_0)$, $B(z_0)$, или в смешанном виде.

6.3.3. Определение нормальных напряжений и потока касательных сил

По формуле (6.103) можно найти нормальные напряжения σ_z только после решения системы дифференциальных уравнений (6.113). Однако в ряде случаев, когда удастся устано-

вить обобщенные силы N , M_x , M_y , B , минуя решение системы (6.113), важно иметь формулу для нормальных напряжений, включающую только функции обобщенных сил и геометрические характеристики сечения. Изложим вывод этой формулы.

Рассмотрим зависимости (6.115), (6.120), которые с учетом равенства (6.104) дают систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $\dot{\zeta}$, $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$:

$$\begin{aligned} F\dot{\zeta} - S_y\ddot{\xi} - S_x\ddot{\eta} &= N/E + S_\omega\ddot{\theta}, \\ S_y\dot{\zeta} - I_y\ddot{\xi} - I_{xy}\ddot{\eta} &= -M_y/E + S_{\omega x}\ddot{\theta}, \\ S_x\dot{\zeta} - I_{xy}\ddot{\xi} - I_x\ddot{\eta} &= M_x/E + S_{\omega y}\ddot{\theta}. \end{aligned}$$

Решение этой системы можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \frac{N}{EF} + k \left[x_0 \left(\frac{M_{0y}}{EI_{0y}} + \frac{I_{0xy}}{I_{0y}} \frac{M_{0x}}{EI_{0x}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - y_0 \left(\frac{M_{0x}}{EI_{0x}} + \frac{I_{0xy}}{I_{0x}} \frac{M_{0y}}{EI_{0y}} \right) \right] - \omega_0\ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (6.124)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= k \left(\frac{M_{0y}}{EI_{0y}} + \frac{I_{0xy}}{I_{0y}} \frac{M_{0x}}{EI_{0x}} \right) + y_d\ddot{\theta}, \\ \ddot{\eta} &= -k \left(\frac{M_{0x}}{EI_{0x}} + \frac{I_{0xy}}{I_{0x}} \frac{M_{0y}}{EI_{0y}} \right) - x_d\ddot{\theta}. \end{aligned}$$

Здесь в дополнение к ранее введенным обозначениям (5.17), (5.19), (5.22) принято

$$\begin{aligned} x_d &= k \left[\frac{1}{I_{0x}} (S_{\omega y} - y_0 S_\omega) - \frac{I_{0xy}}{I_{0x} I_{0y}} (S_{\omega x} - x_0 S_\omega) \right], \\ y_d &= k \left[\frac{-1}{I_{0y}} (S_{\omega x} - x_0 S_\omega) + \frac{I_{0xy}}{I_{0x} I_{0y}} (S_{\omega y} - y_0 S_\omega) \right], \end{aligned} \quad (6.125)$$

$$\omega_0 = x_d y_0 - y_d x_0 - \frac{S_\omega}{F};$$

$$M_{0x} = M_x - y_0 N, \quad M_{0y} = M_y + x_0 N. \quad (6.126)$$

В теории тонкостенного стержня имеется понятие приведенного бимоента

$$B_\pi = \oint \omega_\pi \sigma_z h ds, \quad (6.127)$$

где

$$\omega_\pi = \omega(s) - x_d(y(s) - y_0) + y_d(x(s) - x_0) - \frac{S_\omega}{F}. \quad (6.128)$$

Приведенный бимомент B_{π} связан с ранее написанным B соотношением

$$B_{\pi} = B - x_d M_{0x} - y_d M_{0y} - \frac{S_{\omega}}{F} N. \quad (6.129)$$

Подставляя решение (6.124) в формулу (6.127) и учитывая соотношение (6.128), получим зависимость приведенного бимомента от меры деформации сечения

$$B_{\pi} = -EI_{\omega\pi} \bar{\theta}. \quad (6.130)$$

Здесь

$$I_{\omega\pi} = I_{\omega} - (S_{\omega y} - y_0 S_{\omega}) x_d + (S_{\omega x} - x_0 S_{\omega}) y_d - \frac{S_{\omega}^2}{F}. \quad (6.131)$$

Можно показать, что

$$I_{\omega\pi} = \oint \omega_{\pi}^2 h ds. \quad (6.132)$$

Теперь искомую формулу для нормальных напряжений получить нетрудно. Действительно, подставляя решение (6.124) и выражение для функции $\bar{\theta}$ (6.130), в равенство (6.104), получим

$$\sigma_z(z, s) = \frac{N}{F} + k \left[\frac{M_{0x}}{I_{0x}} \bar{y}(s) - \frac{M_{0y}}{I_{0y}} \bar{x}(s) \right] + \frac{B_{\pi}}{I_{\omega\pi}} \omega_{\pi}(s). \quad (6.133)$$

Здесь

$$\bar{x}(s) = x(s) - x_0 - \frac{I_{0xy}}{I_{0x}} (y(s) - y_0), \quad (6.134)$$

$$\bar{y}(s) = y(s) - y_0 - \frac{I_{0xy}}{I_{0y}} (x(s) - x_0).$$

Очевидно, первые три слагаемых формулы (6.133) совпадают с результатом элементарной теории изгиба тонкостенных балочных конструкций (5.21). Четвертое слагаемое определяет нормальные напряжения, возникающие вследствие того, что сечения стержня при кручении не остаются плоскими, а деформируются (искривляются) по закону секториальных площадей.

Поток касательных сил $q = q(z, s)$ не может быть найден подобно нормальным напряжениям из закона Гука, так как вторая кинематическая гипотеза отрицает деформацию сдвига. Его можно определить из первого уравнения (4.17) равновесия элемента срединной поверхности, выделенного сечениями $z = \text{const}$, $z + dz = \text{const}$, $s = \text{const}$, $s + ds = \text{const}$ (см. рис. 5.3):

$$\frac{\partial(\sigma_z h)}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial s} + p_z = 0. \quad (6.135)$$

Отсюда с учетом формулы для нормальных напряжений (6.133) имеем

$$q = q(z, s) = q_0(z) - \int_0^s p_z ds - \left[\frac{\dot{N}}{F} F(s) + k \left(\frac{\dot{M}_{0x}}{I_{0x}} \tilde{S}_x(s) - \frac{\dot{M}_{0y}}{I_{0y}} \tilde{S}_y(s) + \frac{\dot{B}_{\omega\Pi}}{I_{\omega\Pi}} \tilde{S}_\omega(s) \right) \right]. \quad (6.136)$$

Здесь, как и в разд. 5.3.1, введены функции отсеченной площади и статических моментов для отсеченной части контура

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \int_0^s h ds, \quad \tilde{S}_x = \int_0^s \tilde{y} h ds, \\ \tilde{S}_y &= \int_0^s \tilde{x} h ds, \quad \tilde{S}_\omega = \int_0^s \omega_\Pi h ds, \end{aligned} \quad (6.137)$$

$q_0(z)$ — функция внешних сдвигающих усилий на крайней прямолинейной кромке $s = 0$.

Первое из уравнений равновесия (6.121), дифференциальные соотношения (6.122), а также выражения для приведенных моментов (6.126) и бимоента (6.129) приводят к равенствам

$$\begin{aligned} \dot{N} &= -q_z, \quad \dot{M}_{0x} = Q_y - m_y + y_0 q_z = Q_y - m_{0x}, \\ -\dot{M}_{0y} &= Q_x + m_y + x_0 q_z = Q_x + m_{0y}, \\ \dot{B}_{\omega\Pi} &= M_\omega - b_p - x_d(Q_y - m_x) - y_d(-Q_x - m_y) - \omega_0 q_z = M_{\omega\Pi} - b_{p\Pi}. \end{aligned} \quad (6.138)$$

Здесь

$$m_{0x} = m_x - y_0 q_z, \quad m_{0y} = m_y + x_0 q_z, \quad (6.139)$$

$$b_{p\Pi} = b_p + x_d m_x + y_d m_y - \omega_0 q_z,$$

$$M_{\omega\Pi} = M_\omega - x_d Q_y + y_d Q_x. \quad (6.140)$$

Подставляя зависимости (6.138) в выражение (6.136), получим формулу для потока касательных сил:

$$\begin{aligned} q(z, s) &= q_0(z) - \int_0^s p_z ds + \frac{q_z}{F} \tilde{F}(s) - \\ &- k \left(\frac{Q_y - m_{0x}}{I_{0x}} \tilde{S}_x(s) + \frac{Q_x + m_{0y}}{I_{0y}} \tilde{S}_y(s) \right) - \frac{M_{\omega\Pi} - b_{p\Pi}}{I_{\omega\Pi}} \tilde{S}_\omega(s). \end{aligned} \quad (6.141)$$

Если сечение стержня содержит стрингеры, то формулы для статических моментов отсеченных частей (6.137) следует заменить выражениями

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= \int_0^s h ds + \sum_{i=1}^m f_i, \\ \tilde{S}_y &= \int_0^s \tilde{x} h ds + \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i f_i, \\ \tilde{S}_x &= \int_0^s \tilde{y} h ds + \sum_{i=1}^m \tilde{y}_i f_i, \\ \tilde{S}_\omega &= \int_0^s \tilde{\omega} h ds + \sum_{i=1}^m \tilde{\omega}_i f_i.\end{aligned}\tag{6.142}$$

Здесь f_i , $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{\omega}_i$ — соответственно площадь и обобщенные координаты (6.134), (6.128) i -го стержня; m — число стержней в отсеченной части $0-s$ контура.

Покажем физический смысл обобщенных сил Q_x , Q_y , M_ω . Пусть прямолинейные границы стержня $s = 0$ и $s = s_1$ свободны от внешних сдвигающих усилий. Тогда интегрирование по частям выражений (6.117), (6.118), (6.123) с учетом уравнения (6.135) и обозначений (6.109) дает следующий результат:

$$\begin{aligned}Q_x &= -m_y + \oint x \frac{d\sigma_z}{dz} h ds = -m_y + \oint x \left(-\frac{\partial q}{\partial s} - p_z \right) ds = \\ &= -\oint x \frac{\partial q}{\partial s} ds = \oint q dx, \\ Q_y &= m_x + \oint y \frac{d\sigma_z}{dz} h ds = m_x + \oint y \left(-\frac{\partial q}{\partial s} - p_z \right) ds = \\ &= -\oint y \frac{\partial q}{\partial s} ds = \oint q dy, \\ M_\omega &= b_p + \oint \omega \frac{d\sigma_z}{dz} h ds = b_p + \oint \omega \left(-\frac{\partial q}{\partial s} - p_z \right) ds = \\ &= -\oint \omega \frac{\partial q}{\partial s} ds = \oint q d\omega = \oint q \tilde{h}(s) ds.\end{aligned}$$

Следовательно, перерезывающая сила Q_x — это равнодействующая на сечении $z = \text{const}$ проекций потока касательных сил на ось Ox ; перерезывающая сила Q_y — на ось Oy . Изгибно-крутящий момент M_ω представляет собой равнодействующий крутящий момент от потока касательных сил q на всем сечении $z = \text{const}$ относительно начала координат Oxy .

6.3.4. Частный случай изгиба и кручения стержня

В инженерных задачах нередко на свободном конце стержня заданы или известны значения обобщенных сил. В этом случае для определения напряженного и деформированного состояния стержня нет необходимости решать систему дифференциальных уравнений четырнадцатого порядка (6.113). Действительно, функции продольной и перерезывающих сил, а также крутящего M_z и изгибающих моментов M_x , M_y найдутся путем интегрирования уравнений (6.121), (6.122). Уравнение относительно приведенного бимоента $B_{\omega_{\Pi}}$ нетрудно получить, если выражения (6.124) подставить в последнее уравнение системы (6.113) и учесть соотношения (6.130), (6.121), (6.122). В результате преобразований получим

$$\ddot{B}_{\omega_{\Pi}} - \frac{GI_d}{EI_{\omega_{\Pi}}} B_{\omega_{\Pi}} + m_{zd} + b_{p\Pi} = 0, \quad (6.143)$$

где $m_{zd} = m_z - x_d q_y + y_d q_x$, а функция $b_{p\Pi}$ определена равенством (6.139). Решение уравнения (6.143) будет единственным, когда известны граничные условия. Например, если на свободном конце стержня $z = l$ отсутствуют нормальные напряжения или они так распределены по сечению, что $\oint \omega_{\Pi} \sigma_z(l, s) h ds = 0$, тогда справедливо равенство

$$B_{\omega_{\Pi}}(l) = 0.$$

Для жесткозаделанного сечения $z = 0$ перемещения в его плоскости (6.93) и из плоскости (6.95) отсутствуют. Отсюда в силу линейной независимости функций $\sin \alpha \cos \alpha$, $\bar{h}(s)$, $t(s)$ и обобщенных координат 1 , $x(s)$, $y(s)$, $\omega(s)$ в точке $z = 0$ будут выполняться условия

$$\xi(0) = \xi(0) = \eta(0) = \dot{\xi}(0) = \dot{\eta}(0) = \theta(0) = \dot{\theta}(0). \quad (6.144)$$

Условие $\dot{\theta}(z_0) = 0$ в сечении $z = z_0$ каждый раз будет справедливым, когда это сечение лишено возможности депланировать (например, когда в сечении $z = z_0$ имеется мощный шпангоут, жесткий на изгиб из своей плоскости).

После определения приведенного бимоента $B_{\omega_{\Pi}}$ вместе с ранее полученными другими функциями обобщенных сил формулы (6.133) и (6.136) позволяют вычислить нормальные и касательные направления. Перемещения точек стержня и его закручивание найдутся после последовательного интегрирования уравнений (6.130), (6.124) и применения формул (6.93), (6.95).

6.3.5. Пример стесненного кручения стержня

Покажем методику расчета тонкостенной цилиндрической конструкции открытого профиля на примере.

Задача. Цилиндрическая оболочка типа корпуса летательного аппарата с длинным вырезом жестко заделана на одном конце и нагружена крутящим

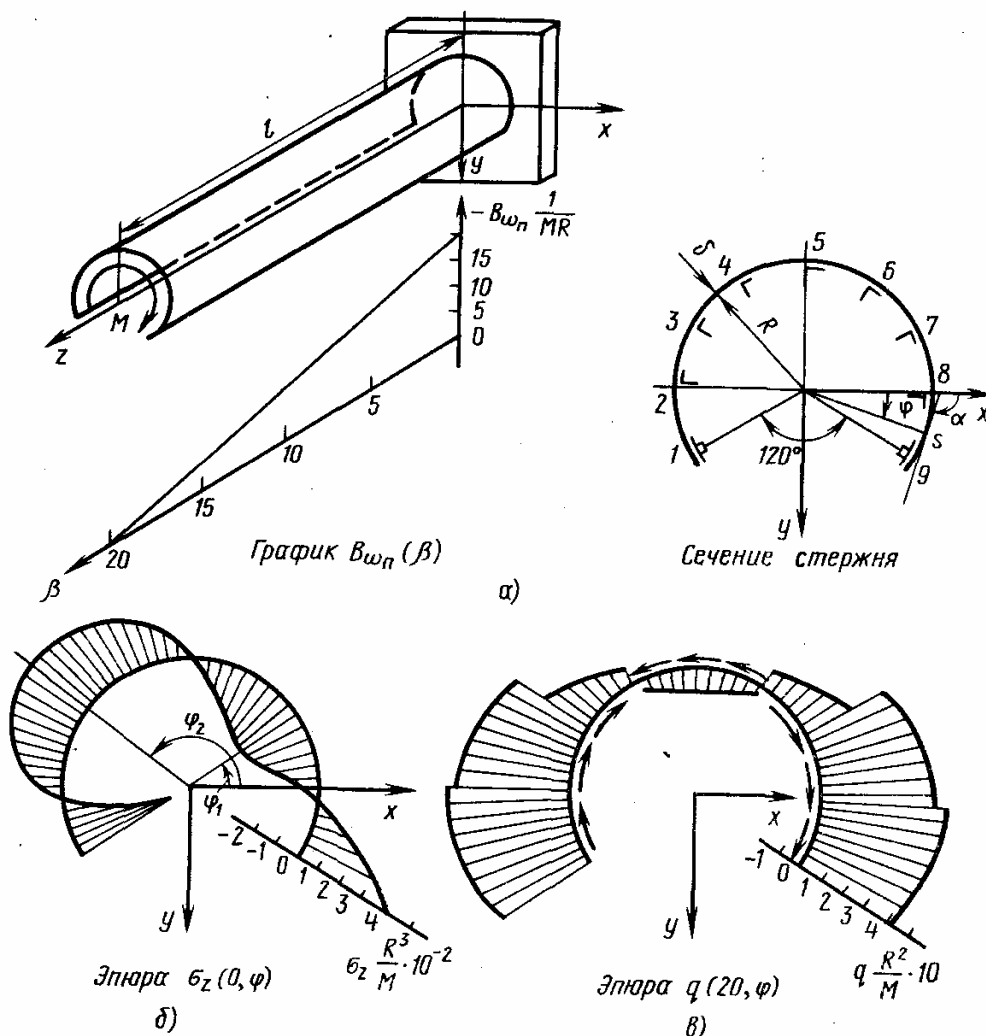


Рис. 6.18. Результаты расчета стержня на кручение

моментом M на другом конце (рис. 6.18, а). Обшивки и стрингеры выполнены из одного материала, модуль упругости которого E , а коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; $h, 2R, l$ — толщина обшивки, диаметр сечения и длина стержня. Площади крайних стрингеров имеют значения $f_1 = f_9 = Rh$, площади внутренних стрингеров равны $f_2 = f_3 = \dots = f_8 = 0,5Rh$. Соотношения между размерами заданы

$$R = 50h, \quad l = 20R. \quad (6.145)$$

Определить напряженное и деформированное состояние стержня.

Решение. Введем безразмерные координаты β и φ так, что $z = R\beta$;

$$s = R\varphi, \quad dz = R d\beta, \quad ds = R d\varphi, \quad (6.146)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

Тогда декартовы координаты точек контура, функции контурной координаты (6.94) и секториальная площадь ω с началом отсчета в точке 1 ($\varphi = -\frac{7}{6}\pi$) запишутся в виде

$$x = R \cos \alpha, \quad y = R \sin \alpha, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{R \partial \varphi} = -\sin \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \varphi,$$

$$h(\varphi) = R, \quad t(\varphi) = 0, \quad \omega(\varphi) = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{\varphi} R h d\varphi = R^2 \left(\frac{7}{6}\pi + \varphi \right).$$

Значения этих функций в точках 1, 2, ..., 9 (места расположения стрингеров) занесены в табл. 6.1. По формулам (5.15), (5.16) и (6.114) найдем величины геометрических параметров сечения:

$$F = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} Rh \, ds + \sum_{i=1}^9 f_i = 9,69Rh;$$

$$S_x = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} R^2h \sin \varphi \, d\varphi + \sum_{i=1}^9 y_i f_i = -2,6R^2h, \quad S_y = 0;$$

$$I_y = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} R^3h \cos^2 \varphi \, d\varphi + \sum_{i=1}^9 x_i^2 f_i = 6,03R^3h;$$

$$I_x = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} R^3h \sin^2 \varphi \, d\varphi + \sum_{i=1}^9 y_i^2 f_i = 3,66R^3h;$$

$$S_{\omega} = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} R^3h \left(\varphi + \frac{7}{6}\pi \right) d\varphi + \sum_{i=1}^9 \omega_i f_i = 20,3R^3h;$$

$$S_{\omega x} = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} R^4h \left(\frac{7}{6}\pi + \varphi \right) \cos \varphi \, d\varphi + \sum_{i=1}^9 \omega_i x_i f_i = 10,2R^4h;$$

$$S_{\omega y} = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} R^4h \left(\varphi + \frac{7}{6}\pi \right) \sin \varphi \, d\varphi + \sum_{i=1}^9 \omega_i y_i f_i = -5,44R^4h;$$

$$I_{\omega} = \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} R^5h \left(\varphi + \frac{7}{6}\pi \right)^2 d\varphi + \sum_{i=1}^9 \omega_i^2 f_i = 61,23R^5h.$$

Таблица 6.1

Геометрические характеристики сечения

Номер элемента	f_i/Rh	x_i/R	y_i/R	$y_i f_i/R^3h$	$x_i^2 f_i/R^3h$	$y_i^2 f_i/R^3h$	ω_i/R^2	$\omega_i f_i/R^3h$	$\frac{\omega_i x_i f_i}{R^4h}$	$\frac{\omega_i y_i f_i}{R^4h}$	$\frac{\omega_i^2 f_i}{R^5h}$
1	1,0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,5	3/4	1/4	0	0	0	0	0
2	0,5	-1	0	0	0,5	0	$\pi/6$	$\pi/12$	$-\pi/12$	0	$\pi^2/72$
3	0,5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-0,25	3/8	1/8	$\pi/3$	$\pi/6$	$-\sqrt{3}\pi/12$	$-\pi/12$	$\pi^2/18$
4	0,5	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	1/8	3/8	$\pi/2$	$\pi/4$	$-\pi/8$	$-\sqrt{3}\pi/8$	$\pi^2/8$
5	0,5	0	-1	-0,5	0	1/2	$2\pi/3$	$\pi/3$	0	$-\pi/3$	$2\pi^2/9$
6	0,5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	1/8	3/8	$5\pi/6$	$5\pi/12$	$5\pi/24$	$-5\sqrt{3}\pi/24$	$25\pi^2/72$
7	0,5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-0,25	3/8	1/8	π	$\pi/2$	$\sqrt{3}\pi/4$	$-\pi/4$	$\pi^2/2$
8	0,5	1	0	0	0,5	0	$7\pi/6$	$7\pi/12$	$7\pi/12$	0	$49\pi^2/72$
9	1,0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,5	3/4	1/4	$4\pi/3$	$4\pi/3$	$2\sqrt{3}\pi/3$	$2\pi/3$	$16\pi^2/9$
$\Sigma f_i = 5,5Rh$ $\Sigma f_i y_i = -\frac{\sqrt{3}}{3} R^3h$ $\Sigma x_i^2 f_i = \frac{7}{2} R^3h$ $\Sigma y_i^2 f_i = 2R^3h$ $\Sigma \omega_i f_i = \frac{11\pi}{3} R^3h$ $\Sigma \omega_i x_i f_i = \frac{7+10\sqrt{3}}{12} \pi R^4h$ $\Sigma \omega_i y_i f_i = -\frac{\sqrt{3}}{3} \pi R^4h$ $\Sigma \omega_i^2 f_i = \frac{67}{18} \pi^2 R^5h$											

Здесь значения для конечных сумм, соответствующих продольным элементам жесткости (стрингерам), взяты из табл. 6.1. Приведенные геометрические характеристики сечения в соответствии с формулами (5.17), (5.19), (5.22) и (6.125) будут равны

$$\begin{aligned}x_0 &= 0, \quad y_0 = -0,268R, \quad I_{0x} = 2,96R^3h; \\I_{0y} &= 6,027R^3h, \quad I_{0xy} = 0, \quad k = 1; \\x_d &= 0, \quad y_d = -1,69R, \quad \omega_0 = -2,09R^2; \\I_{\omega\Pi} &= 1,5R^5h.\end{aligned}\tag{6.147}$$

Момент инерции чистого кручения (6.105) и коэффициент отношения крутильной жесткости к секториальной принимают значения

$$I_d = \frac{h^3}{3} \int_{-\frac{7}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} R d\varphi = \frac{4}{9} \pi R h^3,\tag{6.148}$$

$$\frac{GI_d R^2}{EI_{\omega\Pi}} = \frac{I_d R^2}{2(1+\mu)I_{\omega\Pi}} = 0,326 \left(\frac{h}{R}\right)^2 = (0,01142)^2.$$

На свободном конце стержня нормальные напряжения отсутствуют, а поток касательных сил приводится к крутящему моменту. Следовательно (см. (6.116)—(6.120)),

$$N = M_x = M_y = B = Q_x = Q_y = 0 \quad \text{при} \quad \beta = \frac{l}{R},\tag{6.149}$$

$$H + M\omega = M \quad \text{при} \quad \beta = \frac{l}{R}.$$

При таких статически граничных условиях и отсутствии поверхностной нагрузки уравнения равновесия (6.121) и (6.122) приводят к тривиальному решению

$$N(\beta) \equiv M_x(\beta) \equiv M_y(\beta) \equiv Q_x(\beta) \equiv Q_y(\beta) \equiv 0,\tag{6.150}$$

$$M_z(\beta) \equiv M$$

и условию

$$H(\beta) + RB'(\beta) = M \quad \text{при} \quad \beta = \frac{l}{R}.\tag{6.151}$$

Следовательно [см. (6.129), (6.126), (6.150)] в данной задаче приведенный бимомент $B_{\omega\Pi}$ не отличается от обобщенной силы B , а поэтому граничное условие (6.151) с учетом соотношений (6.107) и (6.130) преобразуется к виду

$$\frac{GI_d R^2}{EI_{\omega\Pi}} \theta' \left(\frac{l}{R}\right) - \theta'' \left(\frac{l}{R}\right) = \frac{MR^3}{EI_{\omega\Pi}}.$$

Подставляя сюда значения (6.145), (6.147), (6.148), получим граничное условие

$$(0,01142)^2 \cdot \theta' \left(\frac{l}{R}\right) - \theta'' \left(\frac{l}{R}\right) = \frac{100}{3} \frac{M}{ER^3}.\tag{6.152}$$

Отсутствие бимоента B на свободном конце и жесткое защемление оболочки на другом конце дают другие граничные условия

$$\theta'' \left(\frac{l}{R} \right) = 0; \quad \theta(0) = 0; \quad \theta'(0) = 0. \quad (6.153)$$

Уравнение стесненного кручения (6.142) с учетом зависимости (6.130) при заданном нагружении примет вид

$$\theta^{IV}(\beta) - \frac{GI_d R^3}{EI_{\omega\Pi}} \theta''(\beta) = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$\theta(\beta) = c_1 + c_2 \beta + c_3 e^{-b\beta} + c_4 e^{b\beta},$$

где $b^2 = \frac{GI_d R^3}{EI_{\omega\Pi}}$ при граничных условиях (6.152), (6.153) дает функцию угла поворота сечения

$$\theta(\beta) = \frac{10^6 M}{ER^3} (5,03 + 0,256\beta - 13,72e^{-b\beta} + 8,687e^{b\beta}). \quad (6.154)$$

При этом функции деформации, бимоента и изгибно-крутящего момента примут вид

$$\theta'(\beta) = (2,56 - 1,566e^{-b\beta} - 0,992e^{b\beta}) \frac{10^6 M}{ER^3},$$

$$B_{\omega\Pi}(\beta) = (33,96e^{b\beta} - 53,63e^{-b\beta}) MR,$$

(6.155)

$$M_{\omega}(\beta) = (0,388e^{b\beta} + 0,612e^{-b\beta}) M,$$

где $b = 0,01142$.

Нормальные напряжения пропорциональны бимоенту, так как другие обобщенные силы отсутствуют (6.150). График функции $B_{\omega\Pi}(\beta)$ изображен на рис. 6.18, а. В сечении $z = 0$ нормальные напряжения наибольшие и распределяются по закону

$$\sigma_z(0, \varphi) = \frac{B_{\omega\Pi}(0)}{I_{\omega\Pi}} \omega_{\Pi}(\varphi),$$

где $\omega_{\Pi}(\varphi) = \omega(\varphi) - 1,69R\chi(\varphi) - 2,09R^2$.

Расчеты приведенной секториальной площади ω_{Π} и нормальных напряжений $\sigma_z(0, \varphi)$ сведены в табл. 6.2. Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 6.18, б. Здесь экстремумы в точках контура

$$\varphi_1 = -2,51; \quad \varphi_2 = -0,632.$$

В сечении $z = 0$ изгибно-крутящий момент M_{ω} , равный внешнему крутящему моменту M , статически эквивалентен распределенному по контуру потоку касательных сил (6.141)

$$q(0, \varphi) = - \frac{M_{\omega}(0)}{I_{\omega\Pi}} \tilde{S}_{\omega}(\varphi),$$

$$\text{где} \quad \tilde{S}_{\omega} = \left(\frac{1}{2} \varphi^2 + 1,571\varphi - 0,114 - 1,69 \sin \varphi \right) R^3 h + \sum_{i=1}^h \omega_{\Pi i} / i.$$

Таблица 6.2

Нормальные напряжения $\sigma_z(0, \varphi)$ и поток касательных сил $q(l, \varphi)$

Номер элемента	φ , рад	$\omega(\varphi)/R^2$	$\sigma_z \frac{R^2}{M}$	$\frac{\tilde{S}_\omega(\varphi)}{R^2 h}$	$q \frac{R^2}{M}$
1	$-\frac{7\pi}{6} + 0$	-0,63	413	-0,63	0,409
2	$-\pi - 0$	0,12	-79	-0,744	0,483
2	$-\pi + 0$	0,12	-79	-0,684	0,444
3	$-\frac{5\pi}{6} - 0$	0,417	-273	-0,524	0,340
3	$-\frac{5\pi}{6} + 0$	0,417	-273	-0,315	0,205
4	$-\frac{2\pi}{3} - 0$	0,322	-211	-0,107	0,070
4	$-\frac{2\pi}{3} + 0$	0,322	-211	0,054	-0,035
5	$-\frac{\pi}{2} \pm 0$	0,00	0	0,143	-0,093
6	$-\frac{\pi}{6} - 0$	-0,322	211	0,054	-0,035
6	$-\frac{\pi}{6} + 0$	-0,322	211	-0,107	0,070
7	$-\frac{\pi}{6} - 0$	-0,417	273	-0,315	0,205
7	$-\frac{\pi}{6} + 0$	-0,417	273	-0,524	0,340
8	-0	-0,12	79	-0,684	0,444
8	+0	-0,12	79	-0,744	0,483
9	$\frac{\pi}{6} - 0$	0,63	-413	-0,63	0,409

Результаты вычислений также занесены в табл. 6.2, а эпюра потоков касательных сил изображена на рис. 6.18.

Интегрирование уравнений (6.124) с учетом равенств (6.150), решения (6.154) и граничных условий в жестком защемлении

$$(\zeta(0) = 0, \quad \xi(0) = 0, \quad \xi'(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 0)$$

приводит к компонентам перемещений оси стержня

$$\zeta(\beta) = -\omega_0/R\theta'(\beta) = 2,09R\theta'(\beta),$$

$$\xi(\beta) = y_d\theta(\beta) = -1,69R\theta(\beta); \quad \eta(\beta) \equiv 0,$$

где $\theta(\beta)$ и $\theta'(\beta)$ — функции (6.154), (6.155).

Перемещения точек контура стержня в соответствии с зависимостями (6.93) и (6.95) определяются формулами

$$v = 1,69R\theta(\beta) \sin \varphi, \quad w = 1,69\theta(\beta) \cos \varphi,$$

$$u = R\theta'(\beta) (1,69 \cos \varphi - \varphi - 1,57).$$

Анализ этих формул показывает, что перемещения точек контура в плоскости (v, w) значительно выше перемещений из плоскости u .

В заключение заметим, что полученное напряженное и деформированное состояние стержня будет точным, если на свободном конце крутящий момент M состоит из момента свободного кручения, равного $H = 0,0256M$, и изгибно-крутящего момента, составляющего $M_\omega = 0,9744M$ и распределенного по сечению в виде потоков касательных сил, показанных на рис. 6.18, а.

ГЛАВА 7

РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

7.1. ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов (МКЭ) является приближенным численным методом и широко используется в настоящее время для расчета сложных нерегулярных конструкций. Основная идея МКЭ, как и многих приближенных методов, заключается в дискретизации исходной в общем случае континуальной системы, причем по сравнению с классическими приближенными методами, описанными в разд. 1.6, процедура дискретизации в МКЭ обладает определенной спецификой. Суть этой процедуры заключается в следующем. На первом этапе конструкция расчленяется с помощью некоторой сетки на отдельные фрагменты конечных размеров, называемые конечными элементами (КЭ), и представляется как некоторая совокупность конечных элементов. Сетку назначают с учетом геометрических и структурных свойств конструкции, а также исходя из предварительно принятой схематизации ее элементов (обшивки, стенки, подкрепляющий набор и т. п.) с привлечением известных расчетных моделей строительной меха-

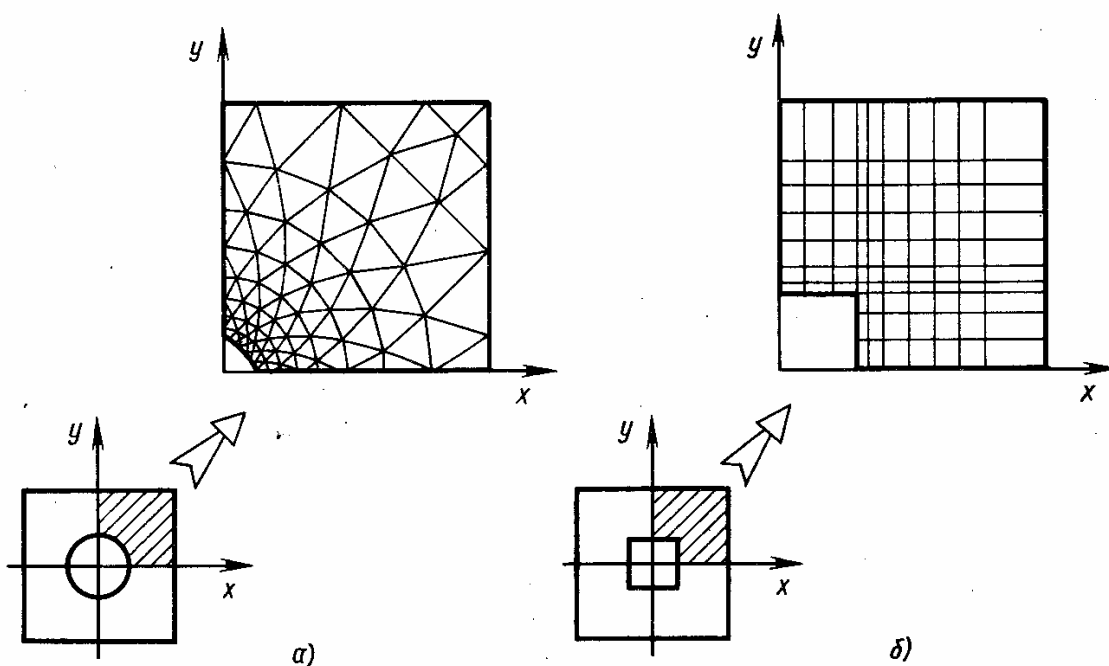


Рис. 7.1. Схема нанесения сетки на поверхность пластины с круглым (а) и квадратным (б) отверстиями

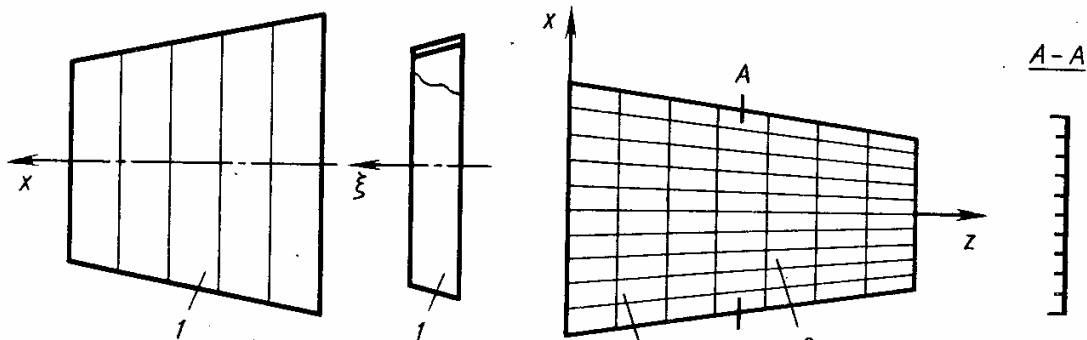
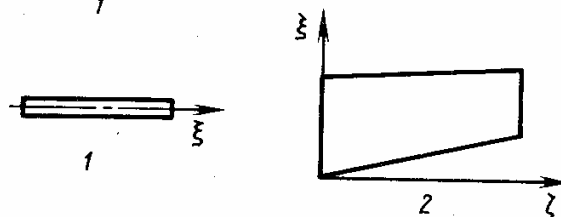


Рис. 7.2. Расчленение оболочки вращения на конечные элементы (1)

Рис. 7.3. Элементы подкрепленной панели:

1 — стрингер; 2 — обшивка



ники (стержни, пластины, оболочки). Помимо этого, выбор сетки подчиняется таким требованиям, как простота формы конечных элементов, возможно меньшая размерность модели, возможность достижения требуемой точности расчета. На рис. 7.1—7.5 показаны примеры конечно-элементной дискретизации конструкций различных типов. Следующий этап дискретизации, имеющий математический характер, заключается в аппроксимации искомой функции, например, перемещения с помощью конечного числа выбранных локализованных координатных функций. Такие функции отличны от нуля лишь в сравнительно небольшой (порядка шага сетки) области конструкции, а вне ее тождественно равны нулю. Процедура дискретизации на этом завершается. Отметим, что термином «конечный» в названии метода отражаются две особенности МКЭ. С одной стороны, подчеркивается дискрет-

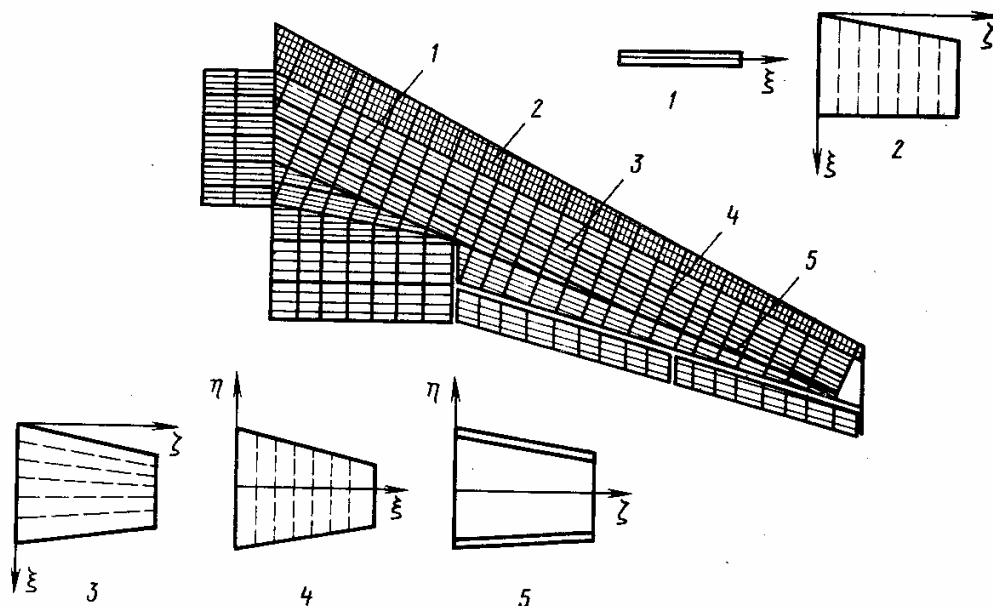


Рис. 7.4. Расчленение крыла на конечные элементы:

1 — пояс; 2, 3 — подкрепленная панель обшивки; 4 — стенка нервюры; 5 — элемент лонжерона

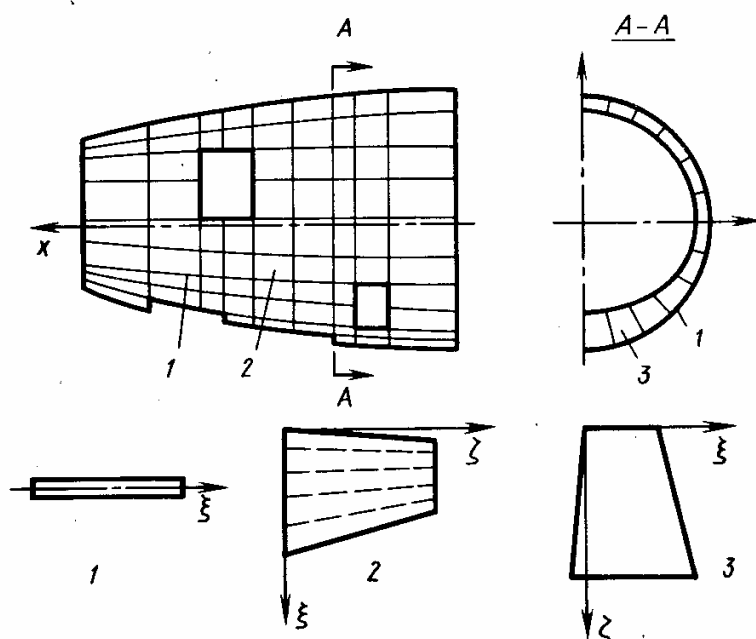


Рис. 7.5. Расчленение сечения фюзеляжа на конечные элементы:

1 — пояс шпангоута; 2 — подкрепленная панель обшивки; 3 — стенка шпангоута

ный характер метода, предполагающий расчленение конструкции на элементы конечных размеров. С другой стороны, указывается на то, что элемент обладает конечным числом степеней свободы и его состояние описывается конечным числом параметров.

Локализованность координатных функций является отличительной особенностью МКЭ. Она обеспечивает достижение таких важных качеств метода, как: простота построения координатных функций; высокая универсальность широкого класса задач строительной механики, в том числе для конструкций сложной структуры и геометрии с нерегулярным распределением параметров и при достаточно произвольных внешних воздействиях и граничных условиях; возможность реализации процедуры МКЭ с помощью стандартных алгоритмов, хорошо приспособленных к использованию ЭВМ.

7.2. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ КОНСТРУКЦИИ

Конструкция расчленяется сеткой линий на конечные элементы. Схема членения служит основой для построения конечно-элементной модели конструкции. Выбор расчетной сетки (схемы членения) зависит от ряда факторов: геометрии и структуры конструкции, ее конструктивно-силовой схемы, характера внешних воздействий, целей и требуемой точности расчета. Как правило, линии расчетной сетки совпадают с осями основных подкрепляющих элементов конструктивно-силовой схемы. Членение на конечные элементы отражает механическую сторону процесса дискретизации исходной конструкции. Выбранная схема членения влияет на точность расчета и определяет размерность задачи.

Точку пересечения линий сетки назовем узлом расчетной сетки или узлом конструкции. Точку конечного элемента, совпадающую

с узлом конструкции, назовем узлом конечного элемента. Введем следующие параметры конечно-элементной модели конструкции и их обозначения: k — число конечных элементов; n — общее число узлов конструкции; j — номер узла конструкции ($j = 1, \dots, n$); N_j — число степеней свободы в узле j ; $N = \sum_{j=1}^n N_j$ — общее число степеней свободы незакрепленной конструкции; e — номер конечного элемента ($e = 1, \dots, k$); n^e — общее число узлов конечного элемента e ; s — номер узла конечного элемента (s принимает значения номеров узлов конструкции, с которыми совпадают узлы элемента); N_s^e — число степеней свободы в узле s элемента e ; $N^e = \sum_s N_s^e$ — общее число степеней свободы элемента e . Размерность матриц будем обозначать через $[\alpha \times \beta]$, где α — число строк, β — число столбцов.

Геометрия конструкции задается координатами ее узлов в глобальной системе координат x, y, z .

В каждом узле конструкции j вводится тройка взаимно перпендикулярных орт a_j, b_j, n_j , определяющих три направления, которые будем называть главными направлениями в узле j (рис. 7.6). В частном случае эти направления могут совпадать с направлениями осей глобальной системы координат x, y, z . В случае оболочек вектор n_j обычно направляется по нормали к срединной поверхности (а векторы a_j, b_j — по касательным к этой поверхности). Для каждого конечного элемента e выбирается местная система координат ξ, η, ζ (см. рис. 7.6). В этой системе формируются все соотношения для КЭ.

В качестве обобщенных перемещений примем перемещения узлов незакрепленной (свободной) конструкции по главным направлениям. Запишем эти перемещения в виде вектора (матрицы-столбца) размерностью $[N \times 1]$

$$r_s^T = \{r_1^T \dots r_j^T \dots r_n^T\}, \quad (7.1)$$

где нижний индекс обозначает номер узла. Вид подвектора r_j зависит от кинематических особенностей конкретной задачи (вида перемещений и их числа в узле). В частности, для пространственной задачи (см. рис. 7.6)

$$r_j^T = \{u_j, v_j, w_j\}, \quad (7.2)$$

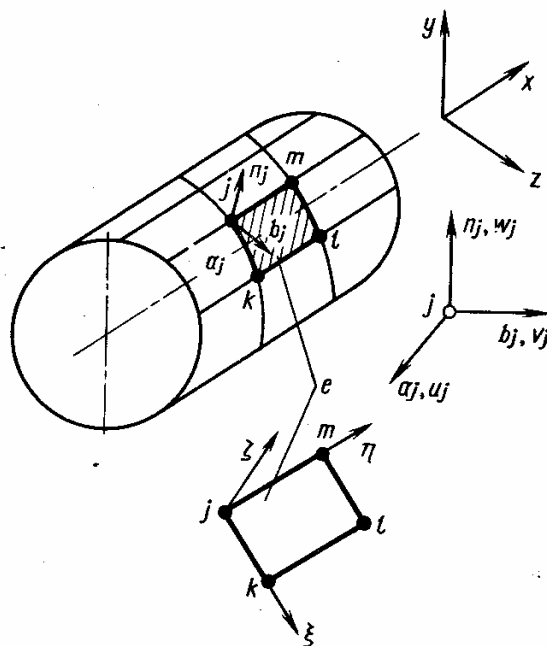


Рис. 7.6. Глобальная (x, y, z) и местная (ξ, η, ζ) системы координат конструкции и конечного элемента

где u_j, v_j, w_j — компоненты перемещений узла j соответственно по направлениям a_j, b_j, n_j .

Вектор перемещений узлов элемента e в местной системе координат будем обозначать через $p^e [N^e \times 1]$. Для четырехугольного КЭ, изображенного на рис. 7.6

$$(p^e)^T = \{p_j^T p_k^T p_l^T p_m^T\}, \quad (7.3)$$

где j, k, l, m — номера узлов расчетной сетки, с которыми совпадают узлы элемента e . Вид подвектора $p_i^e [N_i^e \times 1]$ зависит от кинематических характеристик элемента e . В пространственном случае

$$(p_i^e)^T = \{u_s, v_s, w_s\}, \quad (7.4)$$

где u_s, v_s, w_s — компоненты перемещения узла s элемента e соответственно по направлениям осей ξ, η, ζ .

Перемещения узла элемента в местной системе координат и перемещения соответствующего узла конструкции по главным направлениям связаны линейным соотношением

$$p_i^e = a_j^e r_j, \quad (7.5)$$

где $a_j^e [N_i^e \times N_j]$ — матрица преобразования перемещений для узла j элемента e . В случае, когда векторы перемещений p_i^e и r_j определены выражениями (7.2) и (7.3), матрица a_j^e состоит из направляющих косинусов между осями a_j, b_j, n_j и ξ, η, ζ

$$a_j^e = \begin{bmatrix} \cos(\xi, a_j) & \cos(\xi, b_j) & \cos(\xi, n_j) \\ \cos(\eta, a_j) & \cos(\eta, b_j) & \cos(\eta, n_j) \\ \cos(\zeta, a_j) & \cos(\zeta, b_j) & \cos(\zeta, n_j) \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

Чтобы установить связь между перемещениями узлов элемента (7.3) и перемещениями узлов конструкции (7.1), вначале необходимо выделить из общего вектора (7.1) перемещения тех узлов конструкции, с которыми совпадают узлы элемента e (например, в случае (7.3) это будут узлы j, k, l, m), а затем преобразовать выделенные перемещения к осям местной системы координат. Вектор r_j выделяется из r_e с помощью операции

$$r_j = E_j r_e. \quad (7.7)$$

Выделяющая диагональная матрица $E_j [N_j \times N]$ легко устанавливается на основании соотношения (7.1). Вектор перемещений r^e узлов конструкции, с которыми совпадают узлы элемента e , найдется по формуле

$$r^e = E^e r_e. \quad (7.8)$$

где диагональная матрица E^e составляется из блоков E_j .

Преобразование перемещений r^e к осям местной системы координат элемента e осуществляется на основе (7.5) и может быть записано как

$$p^e = C^e r^e. \quad (7.9)$$

У закрепленной конструкции в определенных узлах перемещения по некоторым направлениям равны нулю и она характеризуется вектором r , который получается из вектора перемещений свободной конструкции r_0 путем «вычеркивания» нулевых компонент, соответствующих устраненным перемещениям. Связь между r и r_0 может быть записана в виде

$$r = E_0 r_0, \quad (7.10)$$

где матрица E_0 получается из диагональной единичной матрицы путем вычеркивания из нее строк, соответствующих устраненным компонентам вектора r_0 . С учетом (7.8)—(7.10) получим связь между обобщенными перемещениями элемента в местной системе координат и обобщенными перемещениями закрепленной конструкции в глобальной системе координат

$$p^e = a^e r. \quad (7.11)$$

7.3. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МКЭ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

При решении задачи в перемещениях в качестве основных неизвестных рассматриваются перемещения по главным направлениям в узлах конструкции, т. е. компоненты вектора r .

Для получения уравнений статики в перемещениях для упругой конструкции, представленной в виде системы конечных элементов, обычно используют принцип Лагранжа (1.27) или эквивалентное ему условие минимума полной энергии (1.24). При этом в пределах каждого конечного элемента перемещения аппроксимируются с использованием заданных функций местных координат таким образом, чтобы в узловых точках элемента они были равны соответствующим обобщенным перемещениям. Заданные функции перемещений, которые в МКЭ называют функциями формы, должны удовлетворять условиям неразрывности как в пределах конечных элементов, так и на разделяющих их границах. Если эти условия выполняются точно, то конечные элементы называются совместными. В этом случае метод конечных элементов по существу является вариантом метода Ритца, в котором варьируемыми параметрами являются перемещения в узлах, а заданные функции являются локальными (отличными от нуля только на конечных элементах, для которых данный узел является общим). Условия неразрывности легко выполняются в случае одномерных тел (стержень, балка), для которых границами, разделяющими конечные элементы, являются сами узлы (точнее — проходящие

через них плоские поперечные сечения). В случае двумерных и трехмерных тел, когда границами разделения элементов являются линии или поверхности, кинематические граничные условия сопряжения элементов удовлетворяются автоматически, если в пределах каждого элемента при аппроксимации перемещений ограничиться линейным распределением. При более высокой степени аппроксимирующих полиномов точное удовлетворение кинематических условий сопряжения (например, в задачах изгиба пластин по перемещениям и углам поворота) представляет затруднения. Поэтому в таких случаях часто используются несовместные конечные элементы, кинематические условия сопряжения которых удовлетворяются точно только в отдельных точках (узлах).

Для повышения точности или для точного удовлетворения кинематических условий сопряжения элементов иногда узлы берут не только в угловых точках элементов, но и на их гранях или внутри элементов. Для этой же цели в узлах модели можно удовлетворять не только требуемым кинематическим условиям (условия непрерывности перемещений и углов поворота), но также условиям непрерывности некоторых старших производных от перемещений, например производных, входящих в выражения для напряжений, если по условиям задачи известно, что в узловых точках напряжения являются непрерывными функциями. Такой прием повышает точность выполнения не только кинематических, но и статических условий сопряжения элементов. Число степеней свободы N_s^e в узле s равно числу кинематических условий, которые требуется удовлетворить. Если же в данном узле наряду с кинематическими ставятся дополнительные условия сопряжения (по напряжениям или производным от перемещений), то число степеней свободы в таком узле соответственно увеличивается. Число степеней свободы конечного элемента N^e равно числу степеней свободы принадлежащих ему узлов.

Вектор перемещений $\bar{u}$ элемента e представляется в виде конечного разложения

$$\bar{u} = U p^e, \quad (7.12)$$

где U — матрица аппроксимирующих функций перемещений (функций форм) элемента e . В случае трехмерной задачи $\bar{u} = \{u, v, w\}^T$ и матрица $U(\xi, \eta, \zeta)$ имеет размерность $3 \times N^e$.

Функции формы элемента обычно записываются в виде степенных полиномов от координат. Коэффициенты этих полиномов (их общее число равно N^e) определяется с помощью (7.12) при условии, что значения компонент вектора $\bar{u}$ в узлах элемента совпадают с соответствующими компонентами вектора p^e . Примеры построения функций формы для одномерного элемента при растяжении-сжатии и плоского двумерного элемента при плоском напряженном состоянии приведены в разд. 7.4.

Запишем полную потенциальную энергию упругого тела как системы конечных элементов

$$\mathcal{E} = \sum_e \mathcal{E}_e, \quad (7.13)$$

где $\mathcal{E}_e$ — полная потенциальная энергия элемента e . Согласно (1.24) ее можно записать в матричном виде как

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma^T (\varepsilon - \varepsilon_0) dV - \int_{V_e} \bar{u}^T \rho dV - \int_{S_e} u^T P dS, \quad (7.14)$$

где σ , ε — векторы напряжений и деформаций; ε_0 — вектор начальных или нестесненных температурных деформаций; ρ , P — векторы удельных объемных и поверхностных нагрузок; V_e — объем элемента; S_e — поверхность граничного элемента, являющаяся частью поверхности тела S , на которой задаются статические граничные условия (если элемент e не прилегает к границе, то $S_e = 0$). В случае трехмерного элемента в местной системе координат ξ , η , ζ будем иметь

$$\sigma^T = \{\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta \tau_{\xi\eta} \tau_{\xi\zeta} \tau_{\eta\zeta}\},$$

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_\xi \varepsilon_\eta \varepsilon_\zeta \gamma_{\xi\eta} \gamma_{\xi\zeta} \gamma_{\eta\zeta}\},$$

$$\rho^T = \{\rho_\xi \rho_\eta \rho_\zeta\}, \quad P = \{P_\xi P_\eta P_\zeta\}, \quad \bar{u}^T = \{uvw\}.$$

Вектор температурных деформаций при нагреве тела до температуры T (ξ , η , ζ) будет $\varepsilon_0^T = \alpha T \{111 000\}$.

Далее напряжения выражаем через деформации на основании закона Гука (1.13), а деформации — через перемещения на основании соотношений Коши (1.3). В результате, используя матричную форму записи, будем иметь

$$\sigma = A [\varepsilon - \varepsilon_0], \quad \varepsilon = D \bar{u}, \quad (7.15)$$

где A — симметричная матрица коэффициентов упругости ($A^T = A$), а D — линейный дифференциальный оператор (матрица). Например, в случае плоского напряженного состояния для нагретого двумерного изотропного элемента:

$$\bar{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\xi\eta} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_0 = \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$A = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \xi} \end{bmatrix}. \quad (7.16)$$

С учетом (7.12), (7.15) полная потенциальная энергия элемента (7.14) записывается с точностью до несущественной константы

через компоненты вектора p^e , представляющие обобщенные перемещения данного элемента:

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} (p^e)^T K_e^0 p^e - (p^e)^T P^e,$$

$$K_e^0 = \int_{V_e} (DU)^T A D U dV, \quad (7.17)$$

$$P^e = \int_{V_e} (DU)^T A e_0 dV + \int_{V_e} (U)^T \rho dV + \int_{S_e} U^T P dS,$$

где K_e^0 является квадратной симметричной матрицей жесткости элемента порядка N^e ; P^e — вектор обобщенных сил, действующих на элемент e и соответствующих вектору обобщенных перемещений p^e . Первый член в выражении (7.17) для P^e представляет собой вектор эквивалентных обобщенных сил, с помощью которых данному элементу можно было бы сообщить деформацию, равную начальной или нестесненной температурной деформации e_0 ; далее этот член будем обозначать через P_{e0}^e .

Далее полная энергия элемента (7.17) преобразуется в глобальные обобщенные перемещения в узлах данного элемента (вектор r^e) с помощью соотношения (7.9):

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} (r^e)^T K_e r^e - (r^e)^T R^e, \quad (7.18)$$

$$K_e = (C^e)^T K_e^0 C^e, \quad R^e = (C^e)^T P^e.$$

После этого с учетом (7.8) путем суммирования по всем элементам записывается полная энергия (7.13) всей незакрепленной (свободной) конструкции

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} r_c^T K_c r_c - r_c^T R_c; \quad (7.19)$$

$$K_c = \sum_e E^e K_e E^e, \quad R_c = \sum_e E^e R^e,$$

где K_c и R_c — представляют симметричную матрицу жесткости и вектор обобщенных сил для системы в целом. Матрица жесткости свободной системы K_c , как и матрицы жесткости отдельных элементов K_e , является вырожденной. Свободная система может воспринимать только самоуравновешенные нагрузки; при этом ее перемещения (вектор r_c) могут быть определены только с точностью до перемещений системы как твердого тела.

Согласно формулам (7.19) матрицу K_c и вектор R_c удобно формировать в процессе последовательного вычисления матриц K_e и векторов R^e , разнося и добавляя их элементы в соответствующие места, которые определяются по расположению обобщенных перемещений данного элемента и системы в целом (эти места

указываются матрицей E^e , $r^e = E^e r_c$). Для систем высокого порядка с целью экономии рабочего поля ЭВМ и удобства автоматизации вычислений желательно расположение элементов вектора r_c , формируемого из векторов r^e , выбирать таким образом, чтобы матрица K_c имела ленточный вид, т. е. чтобы ее ненулевые элементы располагались вблизи диагонали.

Из условия минимума полной энергии системы (7.19) $\delta \mathcal{E} = \delta r_c^T (K_c r_c - R_c) = 0$ получаем уравнение

$$K_c r_c = R_c. \quad (7.20)$$

Это матричное уравнение представляет собой систему уравнений равновесия узлов. Если в определенных узлах по каким-либо перемещениям система закреплена, то соответствующие компоненты вектора r_c приравниваются нулю и он преобразуется в вектор r согласно (7.10). При этом из вектора R_c вычеркиваются неизвестные реакции закреплений и он обозначается соответственно через R ; аналогично (7.10) имеем $R = E_c R_c$.

Таким образом для закрепленной системы уравнение (7.20) переходит в следующее:

$$K r = R, \quad (7.21)$$

где матрица жесткости закрепленной системы K получается из матрицы K_c путем вычеркивания в последней строк и столбцов, соответствующих нулевым компонентам перемещений в узлах; $K = E_c K_c E_c^T$. Вычеркнутые уравнения могут быть использованы для определения реакций закрепления. Матрица жесткости закрепленной системы является невырожденной и система уравнений (7.21) имеет единственное решение относительно r .

Уравнение (7.21) для закрепленной конструкции можно получить непосредственно из условия минимума потенциальной энергии, если учесть наложенные на систему связи (закрепления). Подставляя в (7.17) соотношение (7.11), записанное с учетом связей, и суммируя согласно (7.13), получим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} r^T K r - r^T R, \quad (7.22)$$

$$K = \sum_e (a^e)^T K_e a^e, \quad R = \sum_e (a^e)^T P_e.$$

Из условия $\delta \mathcal{E} = \delta r^T (K r - R) = 0$ следует уравнение (7.21).

После решения уравнения (7.21) далее по приведенным выше формулам могут быть определены деформации и напряжения в элементах системы.

7.4. КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Конструктивно-силовые схемы основных агрегатов летательного аппарата (см. рис. 7.1—7.5) включают как стержневые (стержни, балки, пояса), так и тонкостенные элементы (гладкие

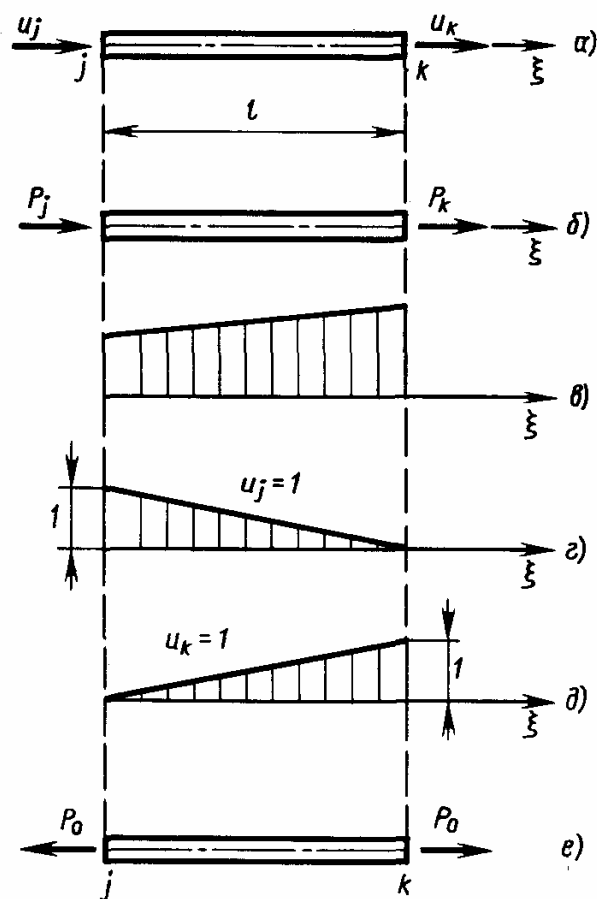


Рис. 7.7. Конечный элемент в форме пояса:

a — узловые перемещения; b — узловые силы; c — распределение перемещения по длине элемента; c, d — функции, образующие матрицу U^e ; e — температурные узловые силы

и подкрепленные панели обшивки, стенки шпангоутов, лонжеронов и нервюр). Основное напряженное состояние тонкостенных элементов будем считать безмоментным (см. гл. 4). В пределах шага расчетной сетки кривизной элементов, а также изменением их геометрических и жесткостных параметров будем пренебрегать. В этом случае конечно-элементная модель конструкции составляется из прямых и плоских КЭ постоянной жесткости, работающих в условиях одноосного (пояса) и плоского

(тонкостенные стержни, стенки, элементы обшивки) напряженного состояния. Тонкостенные элементы могут иметь форму трапеции, прямоугольника и треугольника. В данном разделе для конечных элементов указанного типа применительно к различным моделям МКЭ будут рассмотрены наиболее употребительные аппроксимации искомых функций и получены соотношения, относящиеся к КЭ и необходимые для построения вычислительной процедуры метода.

Поясом будем называть элемент, работающий в состоянии одноосного растяжения-сжатия. Поясом можно моделировать ребра жесткости, пояса шпангоутов, лонжеронов и нервюр. Заданы следующие параметры пояса jk (рис. 7.7): F — площадь поперечного сечения; l — длина; E — модуль упругости; $\epsilon_0 = \alpha T(\xi)$ — температурная деформация. Объемные и поверхностные силы отсутствуют.

Матрицы, введенные в разд. 7.2, в данном случае принимают вид

$$\bar{u} = u(\xi), \quad \sigma = \sigma(\xi), \quad \epsilon = \epsilon(\xi),$$

$$A = E, \quad D = \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Векторы перемещений и сил в узлах элемента имеют вид (см. рис. 7.7, a, b)

$$p^e = \begin{Bmatrix} u_j \\ u_k \end{Bmatrix}, \quad P^e = \begin{Bmatrix} P_j \\ P_k \end{Bmatrix}.$$

Перемещения вдоль координаты ξ аппроксимируются по линейному закону (см. рис. 7.7, в). Аппроксимирующая формула (7.12) принимает вид

$$\bar{u}(\xi) = \{1 - \bar{\xi} \quad \bar{\xi}\} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_k \end{Bmatrix}, \quad (7.23)$$

т. е. $U^T = \{1 - \bar{\xi} \quad \bar{\xi}\}$,

где $\bar{\xi} = \xi/l$ — относительная координата. Функции, образующие матрицу U и соответствующие единичным перемещениям узлов, показаны на рис. 7.7, г и д.

Используя формулы (7.17), получим:
матрицу жесткости пояса

$$K^e = \frac{EF}{l} \int_0^1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 & 1 \end{Bmatrix} d\bar{\xi} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (7.24)$$

вектор эквивалентной температурной нагрузки

$$P_0^e = EF \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \int_0^1 \alpha T d\bar{\xi}. \quad (7.25)$$

Если $\alpha T = \text{const}$, то

$$P_0^e = EF\alpha T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Эти силы показаны на рис. 7.7, е.

В соответствии с (7.15) напряжение в поясе найдем как

$$\sigma = \frac{E}{l} \begin{Bmatrix} -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_k \end{Bmatrix} - E\alpha T$$

или $\sigma = E \left(\frac{u_k - u_j}{l} - \alpha T \right).$

Если $\alpha T = \text{const}$, то и $\sigma = \text{const}$.

Формула (7.9) преобразования к перемещениям узлов конструкции по направлениям a , b , n (рис. 7.8) принимает вид

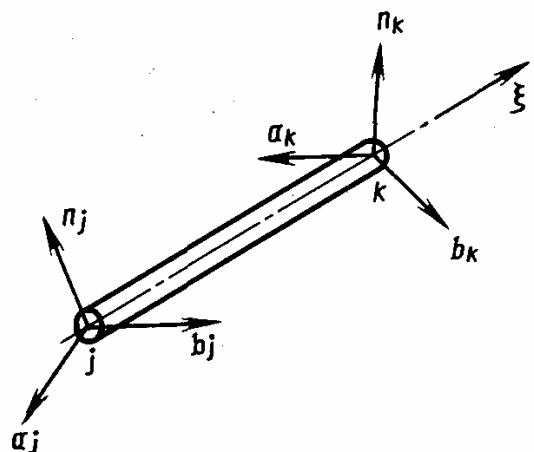
$$\begin{Bmatrix} u_j \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_j & 0 \\ 0 & C_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_j \\ r_k \end{Bmatrix},$$

где $C_s = \{\cos(\xi, a_s) \cos(\xi, b_s) \times \cos(\xi, n_s)\}$,

$$r_s = \{u_s v_s w_s\}, \quad s = j, k.$$

Треугольный тонкостенный элемент, работающий в условиях

Рис. 7.8. Главные направления, заданные в узловых точках пояса



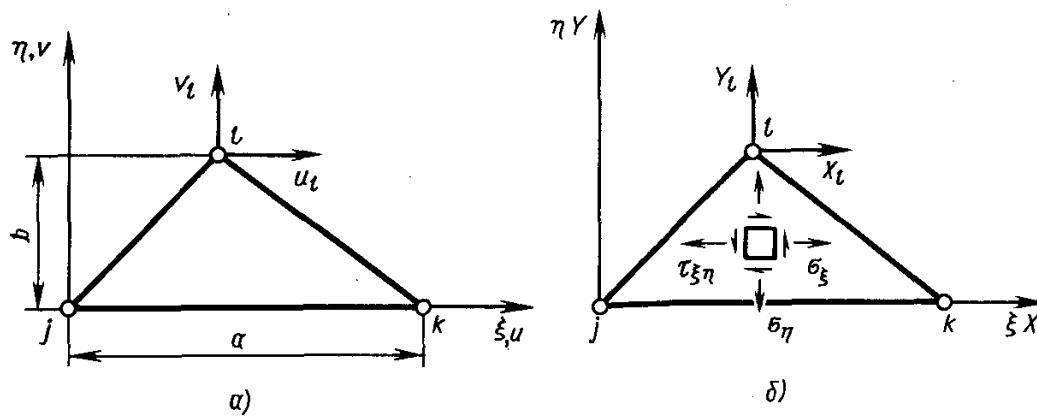


Рис. 7.9. Перемещения (а) и силы (б) в узлах треугольного элемента

плоского напряженного состояния, задается узлами j, k, l и имеет следующие параметры (рис. 7.9): δ — толщина стенки; E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона; $T(\xi, \eta)$ — температура. Объемные и поверхностные силы отсутствуют. Геометрия элемента задана координатами узлов в местной системе координат ξ, η .

Матрицы, введенные в разд. 7.3, в данном случае принимают вид (7.16).

Векторы перемещений и сил в узлах элемента (см. рис. 7.9, а и б):

$$(\mathbf{p}^e)^T = \{p_j p_k p_l\} = \{u_j v_j u_k v_k u_l v_l\}, \quad (7.26)$$

$$(\mathbf{P}^e)^T = \{P_j P_k P_l\} = \{X_j Y_j X_k Y_k X_l Y_l\}.$$

Вектор перемещений содержит шесть компонент. Для установления однозначной зависимости типа (7.12) выражения для перемещений должны также содержать шесть параметров. Аппроксимируя перемещения по линейному закону, примем

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \alpha_1 + \alpha_3 \xi + \alpha_5 \eta, \\ v(\xi, \eta) &= \alpha_2 + \alpha_4 \xi + \alpha_6 \eta. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Параметры $\alpha_1 \dots \alpha_6$ являются пока неизвестными. Подставляя в (7.27) координаты точек j, k, l , получим шесть уравнений, связывающих компоненты вектора $\mathbf{p}^e$ с параметрами $\alpha_1 \dots \alpha_6$:

$$\begin{aligned} u_j &= \alpha_1, \quad v_j = \alpha_2, \quad u_k = \alpha_1 + \alpha_3 \xi_k, \\ v_k &= \alpha_2 + \alpha_4 \xi_k, \quad u_l = \alpha_1 + \alpha_3 \xi_l + \alpha_5 \eta_l, \\ v_l &= \alpha_2 + \alpha_4 \xi_l + \alpha_6 \eta_l. \end{aligned}$$

Решая эту систему, найдем параметры $\alpha_1 \dots \alpha_6$. После подстановки их в (7.27) получим аппроксимирующие выраже-

ния для перемещений, которые в развернутой форме имеют вид

$$u = \frac{1}{2S} \{ [-\eta_l (\xi - \xi_l) - \xi_{kl} (\eta - \eta_l)] u_j + \\ + [\eta_l \xi - \xi_l \eta] u_k + \xi_k \eta u_l \}, \quad (7.28)$$

$$v = \frac{1}{2S} \{ [-\eta_l (\xi - \xi_l) - \xi_{kl} (\eta - \eta_l)] v_j + \\ + [\eta_l \xi - \xi_l \eta] v_k + \xi_k \eta v_l \},$$

где $2S = \xi_k \eta_l$ — удвоенная площадь треугольника; $\xi_{kl} = \xi_k - \xi_l$.

По формулам Коши определим компоненты деформаций:

$$e_\xi = \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2S} (-\eta_l u_j + \eta_l u_k) = \frac{1}{2S} \eta_l (u_k - u_j),$$

$$e_\eta = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{2S} (-\xi_{kl} v_j - \xi_l v_k + \xi_k v_l),$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{2S} (-\xi_{kl} u_j - \xi_l u_k + \xi_k u_l - \eta_l v_j + \eta_l v_k).$$

Отсюда с учетом того, что

$$e = (DU) p^e,$$

получим

$$DU = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} -\eta_l & 0 & \eta_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_{kl} & 0 & -\xi_l & 0 & \xi_k \\ -\xi_{kl} & -\eta_l & -\xi_l & \eta_l & \xi_k & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

Матрицу жесткости найдем, подставляя (7.16) и (7.29) в выражение (7.17) для K_e^0 . В соответствии со структурой векторов (7.26) матрицу жесткости запишем в блочном виде:

$$K_e^0 = \frac{E\delta}{4S(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj} & \bar{k}_{jk} & \bar{k}_{jl} \\ \bar{k}_{kj} & \bar{k}_{kk} & \bar{k}_{kl} \\ \bar{k}_{lj} & \bar{k}_{lk} & \bar{k}_{ll} \end{bmatrix}, \quad (7.30)$$

где

$$\bar{k}_{jj} = \left[\begin{array}{c|c} \eta_l^2 + \lambda \xi_{kl}^2 & (\lambda + \mu) \xi_{kl} \eta_l \\ \hline (\lambda + \mu) \xi_{kl} \eta_l & \xi_{kl}^2 + \lambda \eta_l^2 \end{array} \right],$$

$$\bar{k}_{kk} = \left[\begin{array}{c|c} \eta_l^2 + \lambda \xi_l^2 & -(\lambda + \mu) \xi_l \eta_l \\ \hline -(\lambda + \mu) \xi_l \eta_l & \xi_l^2 + \lambda \eta_l^2 \end{array} \right],$$

$$\bar{k}_{ll} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda \xi_k^2 & 0 \\ \hline 0 & \xi_k^2 \end{array} \right],$$

$$\bar{k}_{jk} = \left[\begin{array}{c|c} -\eta_l^2 + \lambda \xi_{kl} \xi_l & -\lambda \xi_{kl} \eta_l + \mu \xi_l \eta_l \\ \hline \lambda \xi_l \eta_l - \mu \xi_{kl} \eta_l & \xi_{kl} \eta_l - \lambda \eta_l^2 \end{array} \right],$$

$$\bar{k}_{jl} = \left[\begin{array}{c|c} -\lambda \xi_k \xi_{kl} & -\mu \xi_k \eta_l \\ \hline -\lambda \xi_k \eta_l & -\xi_k \xi_{kl} \end{array} \right],$$

$$\bar{k}_{kl} = \left[\begin{array}{c|c} -\lambda \xi_k \xi_l & \mu \xi_k \eta_l \\ \hline \lambda \xi_k \eta_l & -\xi_k \xi_l \end{array} \right],$$

$$\bar{k}_{kj} = \bar{k}_{jk}^T; \quad \bar{k}_{lj} = \bar{k}_{jl}^T; \quad \bar{k}_{lk} = \bar{k}_{kl}^T.$$

Здесь $\lambda = (1 - \mu)/2$.

Получим выражение для вектора эквивалентной температурной нагрузки. В случае плоского напряженного состояния (7.16) с учетом (7.29), а также (7.17) найдем

$$(P_0^e)^T = \frac{E\delta}{2S(1-\mu)} \int \alpha T \{-\eta_l | -\xi_{kl} | \eta_l | -\xi_l | 0 | \xi_k\} d\xi d\eta.$$

Если $\alpha T = \text{const}$, то

$$(P_0^e)^T = \frac{E\delta\alpha T}{2(1-\mu)} \{-\eta_l | -\xi_{kl} | \eta_l | -\xi_l | 0 | \xi_k\}.$$

Система сил, соответствующая этому состоянию, изображена в относительных единицах на рис. 7.10. Отметим, что эта система сил является самоуравновешенной.

Если перемещения узлов известны, напряжения в элементе находятся по формуле (7.15) с учетом (7.16), (7.29). Формула (7.9) преобразования перемещений узлов к главным направлениям a , b , n (рис. 7.11) принимает вид

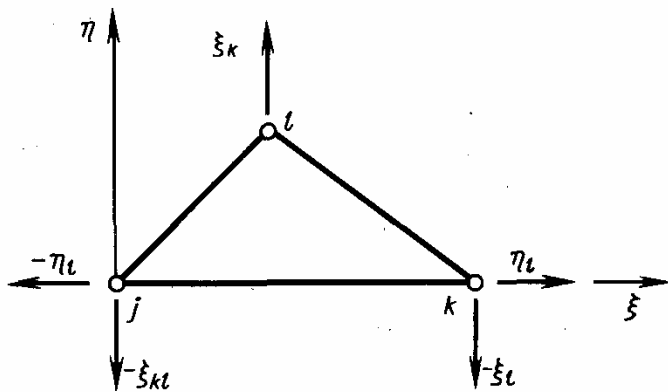


Рис. 7.10. Самоуравновешенная система температурных узловых сил треугольного элемента

$$\begin{Bmatrix} P_j \\ P_k \\ P_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_j & 0 & 0 \\ 0 & C_k & 0 \\ 0 & 0 & C_l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_j \\ r_k \\ r_l \end{Bmatrix},$$

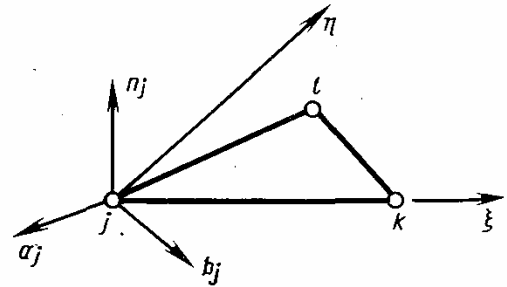


Рис. 7.11. Главные направления в узле треугольного элемента

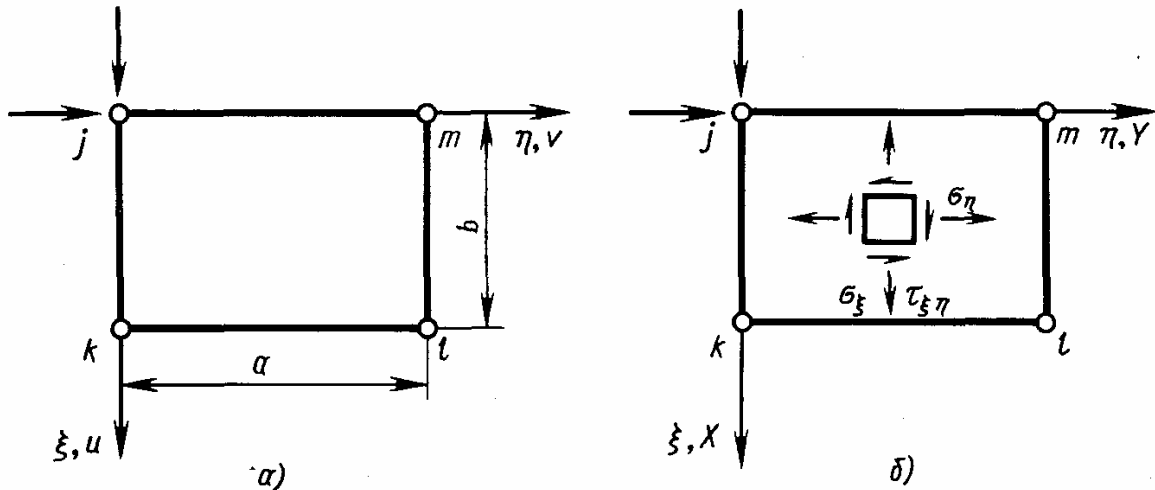


Рис. 7.12. Перемещения (а) и силы (б) в узлах прямоугольного элемента

$$\text{где } r_s = \begin{Bmatrix} u_s \\ v_s \end{Bmatrix}, \quad C_s = \begin{bmatrix} \cos(\xi, a_s) & \cos(\xi, b_s) & \cos(\xi, n_s) \\ \cos(\eta, a_s) & \cos(\eta, b_s) & \cos(\eta, n_s) \end{bmatrix}. \quad (7.31)$$

Индекс s здесь принимает значения j, k, l .

Прямоугольный тонкостенный элемент, работающий в условиях плоского напряженного состояния, задается узлами j, k, l, m и следующими параметрами (рис. 7.12): δ — толщина стенки; E, G — модули упругости; μ — коэффициент Пуассона; a, b — размеры сторон; $T(\xi, \eta)$ — температура.

Матрицы, введенные в разд. 7.3, в данном случае совпадают с (7.16). Векторы перемещений и сил в узлах элемента имеют вид (см. рис. 7.12, а, и б):

$$(p^e)^T = \{p_j p_k p_l p_m\} = \{u_j v_j u_k v_k u_l v_l u_m v_m\}, \quad (7.32)$$

$$(P^e)^T = \{P_j P_k P_l P_m\} = \{X_j Y_j X_k Y_k X_l Y_l X_m Y_m\}.$$

Перемещения на элементе аппроксимируются по линейному закону. Матрица U в формуле (7.12) в этом случае примет вид

$$U = \begin{bmatrix} (1-\bar{\xi})(1-\bar{\eta}) & 0 & \bar{\xi}(1-\bar{\eta}) & 0 & \bar{\xi}\bar{\eta} & 0 & (1-\bar{\xi})\bar{\eta} & 0 \\ 0 & (1-\bar{\xi})(1-\bar{\eta}) & 0 & \bar{\xi}(1-\bar{\eta}) & 0 & \bar{\xi}\bar{\eta} & 0 & (1-\bar{\xi})\bar{\eta} \end{bmatrix}. \quad (7.33)$$

Здесь введены относительные координаты $\bar{\xi} = \xi/b$, $\bar{\eta} = \eta/a$. Величины деформаций можно найти по формуле

$$\varepsilon = (DU) p^e,$$

$$\text{где } DU = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -\lambda(1-\bar{\eta}) & 0 & \lambda(1-\bar{\eta}) & 0 & \lambda\bar{\eta} & 0 & -\lambda\bar{\eta} & 0 \\ 0 & -(1-\bar{\xi}) & 0 & -\bar{\xi} & 0 & \bar{\xi} & 0 & (1-\bar{\xi}) \\ -(1-\bar{\xi}) & -\lambda(1-\bar{\eta}) & -\bar{\xi} & \lambda(1-\bar{\eta}) & \bar{\xi} & \lambda\bar{\eta} & (1-\bar{\xi}) & -\lambda\bar{\eta} \end{bmatrix}, \quad (7.34)$$

$$\lambda = a/b.$$

Матрицу жесткости найдем по формуле (7.17) с учетом (7.16) и (7.34). В соответствии со структурой векторов (7.32) матрицу жесткости запишем в блочном виде

$$K_e^0 = \begin{bmatrix} k_{jj} & k_{jh} & k_{jl} & k_{jm} \\ k_{hj} & k_{hh} & k_{hl} & k_{hm} \\ k_{bj} & k_{bh} & k_{bl} & k_{bm} \\ k_{mj} & k_{mh} & k_{ml} & k_{mm} \end{bmatrix}, \quad (7.35)$$

$$\text{где } k_{jj} = \begin{bmatrix} 2(\alpha + \bar{\beta}) & \gamma + \bar{\gamma} \\ \gamma + \bar{\gamma} & 2(\beta + \bar{\alpha}) \end{bmatrix}, \quad k_{hh} = \begin{bmatrix} 2(\alpha + \bar{\beta}) & -(\gamma + \bar{\gamma}) \\ -(\gamma + \bar{\gamma}) & 2(\beta + \bar{\alpha}) \end{bmatrix},$$

$$k_{ll} = \begin{bmatrix} 2(\alpha + \bar{\beta}) & -(\gamma + \bar{\gamma}) \\ -(\gamma + \bar{\gamma}) & 2(\beta + \bar{\alpha}) \end{bmatrix}, \quad k_{mm} = \begin{bmatrix} 2(\alpha + \bar{\beta}) & \gamma + \bar{\gamma} \\ \gamma + \bar{\gamma} & 2(\beta + \bar{\alpha}) \end{bmatrix},$$

$$k_{jh} = \begin{bmatrix} -2\alpha + \bar{\beta} & \gamma - \bar{\gamma} \\ -\gamma + \bar{\gamma} & \beta - 2\bar{\alpha} \end{bmatrix}, \quad k_{jl} = \begin{bmatrix} \alpha - 2\bar{\beta} & -\gamma + \bar{\gamma} \\ \gamma - \bar{\gamma} & -2\beta + \bar{\alpha} \end{bmatrix},$$

$$k_{jm} = \begin{bmatrix} -\alpha - \bar{\beta} & -(\gamma + \bar{\gamma}) \\ -(\gamma + \bar{\gamma}) & -\beta - \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \quad k_{hl} = \begin{bmatrix} -\alpha - \bar{\beta} & \gamma + \bar{\gamma} \\ \gamma + \bar{\gamma} & -\beta - \bar{\alpha} \end{bmatrix},$$

$$k_{hm} = \begin{bmatrix} \alpha - 2\bar{\beta} & \gamma - \bar{\gamma} \\ -\gamma + \bar{\gamma} & -2\beta + \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \quad k_{lm} = \begin{bmatrix} -2\alpha + \bar{\beta} & -\gamma + \bar{\gamma} \\ \gamma - \bar{\gamma} & \beta - 2\bar{\alpha} \end{bmatrix},$$

$$k_{hj} = k_{jh}^T, \quad k_{lj} = k_{jl}^T, \quad k_{lk} = k_{kl}^T,$$

$$k_{mj} = k_{jm}^T, \quad k_{mh} = k_{hm}^T, \quad k_{ml} = k_{lm}^T,$$

$$\alpha = \frac{E\delta\lambda}{6(1-\mu^2)}, \quad \beta = \frac{E\delta}{6\lambda(1-\mu^2)}, \quad \gamma = \frac{\mu E\delta}{4(1-\mu^2)},$$

$$\bar{\alpha} = \frac{G\delta\lambda}{6}, \quad \bar{\beta} = \frac{G\delta}{6\lambda}, \quad \bar{\gamma} = \frac{G\delta}{4}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Получим выражение для вектора эквивалентной температурной нагрузки. С учетом (7.16), (7.17) и (7.34) найдем

$$(P_0^e)^T = \frac{E\delta b}{1-\mu} \int_0^1 \int_0^1 \{ -\lambda(1-\bar{\eta}) \mid -(1-\bar{\xi}) \mid \lambda(1-\bar{\eta}) \mid -\bar{\xi} \mid \times \\ \times \lambda\bar{\eta} \mid \bar{\xi} \mid - \lambda\bar{\eta} \mid (1-\bar{\xi}) \mid \} \alpha T d\bar{\xi} d\bar{\eta}.$$

Если $\alpha T = \text{const}$, то

$$(P_0^e)^T = \frac{E\delta\alpha T}{2(1-\mu)} b \{ -\lambda \mid -1 \mid \lambda \mid -1 \mid \lambda \mid 1 \mid -\lambda \mid 1 \}.$$

Самоуравновешенная система сил, соответствующая этому состоянию, изображена в относительных единицах на рис. 7.13.

Если перемещения узлов известны, напряжения в элементе находятся по формуле (7.15) с учетом (7.16) и (7.34).

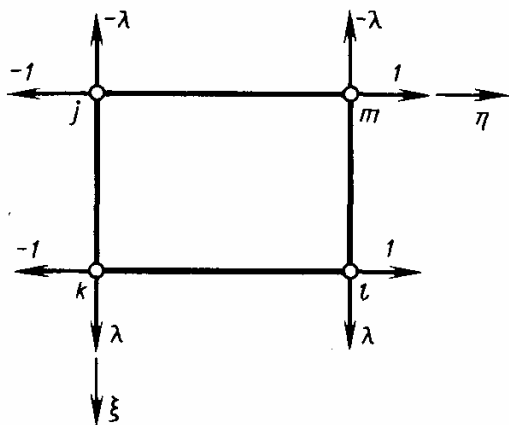


Рис. 7.13. Самоуравновешенная система температурных узловых сил прямоугольного элемента

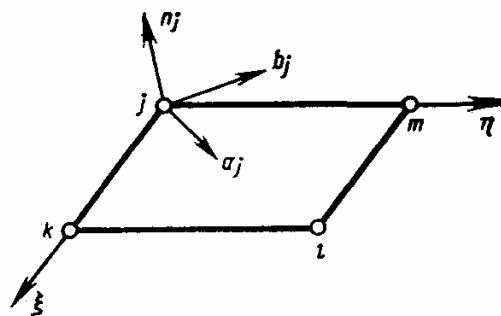


Рис. 7.14. Главные направления в узле прямоугольного элемента

Формула (7.9) преобразования перемещений узлов к главным направлениям a , b , n (рис. 7.14) принимает вид

$$\begin{Bmatrix} p_j \\ p_k \\ p_l \\ p_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_j \\ r_k \\ r_l \\ r_m \end{Bmatrix},$$

где справедливо (7.31) для $s = j, k, l, m$.

7.5. ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ К РАСЧЕТУ ТИПОВЫХ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В настоящем разделе рассматривается применение различных моделей МКЭ к расчету напряженно-деформированного состояния некоторых конструкций авиационного типа, причем наряду с иллюстрацией возможностей метода раскрываются также дальнейшие стороны процедуры МКЭ, в частности, операции, связанные с построением разрешающих систем уравнений и учетом кинематических граничных условий.

7.5.1. Плоские подкрепленные конструкции

Рассмотрим конструкции, состоящие из плоской стенки, подкрепленной в двух направлениях ребрами жесткости. В тонкостенных элементах реализуется плоское напряженное состояние, а ребра жесткости работают в условиях одноосного растяжения-сжатия. Такая расчетная модель описывает работу стеночных шпангоутов, силовых нервюр и лонжеронов, а также панелей грузового пола, крыла и оперения.

Перемещения всех узлов конструкции, включая перемещения на той части поверхности, где заданы кинематические граничные условия, запишем в виде вектора (7.1). Подвектор перемещений

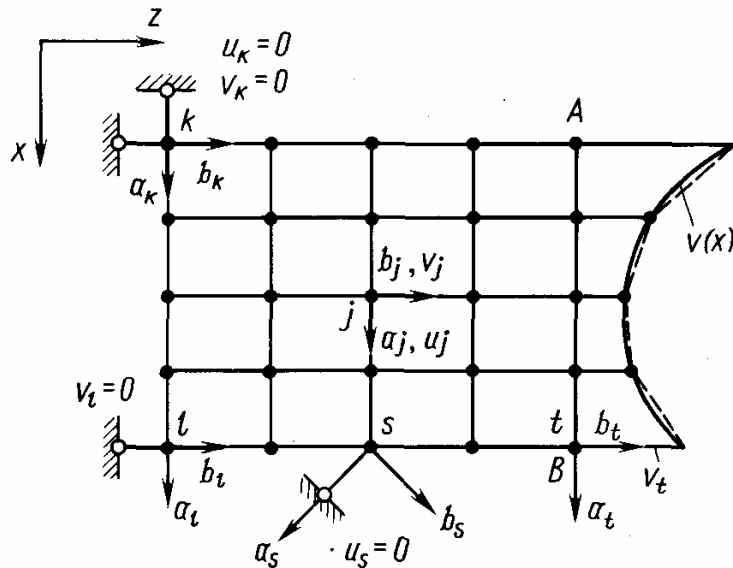


Рис. 7.15. Плоская подкрепленная конструкция

r_j узла j в случае плоских безмоментных конструкций имеет вид

$$(r_j)^T = \{u_j, v_j\},$$

где u_j, v_j — перемещения узла j соответственно по направлениям a_j, b_j (рис. 7.15). Направления a_j, b_j выбираются с учетом особенностей конкретной задачи. В тех узлах, где заданы условия статического типа (узел j на рис. 7.15), направления a_j, b_j следует согласовывать с линиями сетки или осями глобальной системы координат x, z . В узлах, где заданы однородные кинематические условия типа жестких связей (узлы k, l, s на рис. 7.15), оси a_j, b_j должны совпадать с направлениями заданных нулевых перемещений, т. е. с направлениями жестких связей. Это требование желательно выполнить также на той части границы, где заданы неоднородные кинематические условия. Например, если на участке AB перемещения в направлении оси z заданы функцией $\bar{v}(x)$, то для узлов, расположенных на этом участке, одно из главных направлений следует выбрать совпадающим с осью z . Перемещениям узлов, расположенным на участке AB , приписываются значения функции $\bar{v}(x)$ в точках расположения узлов (например, перемещения $\bar{v}_t$ в узле t на рис. 7.15). Такой способ воспроизведения кинематических условий означает, что вместо заданной функции $\bar{v}(x)$ при расчете будет использоваться ее кусочно-ломанная аппроксимация, построенная на конечно-элементной сетке (пунктирная линия на рис. 7.15).

Пусть вектор r_c , как условлено выше, содержит заданные и неизвестные перемещения. Преобразуем систему (7.20) к виду, где будут содержаться только неизвестные перемещения. С этой целью представим вектор r_c в форме

$$r_c^T = \{r_a^T r_b^T\}, \quad (7.36)$$

где r_a — заданные перемещения, отражающие граничные условия; r_b — неизвестные перемещения. В соответствии с (7.36) запишем (7.20) в блочном виде

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_a \\ r_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_a \\ R_b \end{Bmatrix}$$

или

$$K_{aa}r_a + K_{ab}r_b = R_a, \quad (7.37)$$

$$K_{ba}r_a + K_{bb}r_b = R_b. \quad (7.38)$$

Из (7.38) получаем систему уравнений относительно неизвестных перемещений r_b :

$$K_{bb}r_b = R_b + R_b^a, \quad (7.39)$$

где $R_b^a = -K_{ba}r_a$ — вектор сил, действующих по направлению перемещений r_b и обусловленных наличием заданных перемещений r_a . Решение уравнения (7.39) запишем в виде

$$r_b = K_{bb}^{-1}(R_b + R_b^a). \quad (7.40)$$

После этого на основании (7.37) можно определить реакции R_a , действующие по направлению заданных перемещений (в том числе в жестких связях). В частном случае, когда $r_a = 0$ (т. е. на конструкцию наложены только жесткие связи), имеем

$$R_b^a = 0, \quad r_b = K_{bb}^{-1}R_b, \quad R_a = K_{ab}r_b. \quad (7.41)$$

Необходимым условием существования решения уравнений (7.39) является наличие наложенных на конструкцию связей, исключающих по крайней мере возможность перемещения конструкции как твердого тела. Если это условие не выполнено, матрица K_{bb} является вырожденной и обратная матрица K_{bb}^{-1} не существует.

7.5.2. Конструкции типа крыла

Типовая конструкция несущей поверхности летательного аппарата (крыло, оперение, руль) представляет собой подкрепленную тонкостенную оболочку, образованную двумя поверхностями обшивки, соединенными перекрестной, в общем случае неортогональной системой продольных и поперечных тонкостенных балок — лонжеронов и нервюр (рис. 7.16). Срединная поверхность конструкции типа крыла может быть искривленной. Обшивка обычно подкреплена ребрами жесткости в одном или в двух направлениях, совпадающих с направлениями балок-стенок. Возможно наличие балок-стенок, не совпадающих с двумя основными семействами подкреплений («наклонные» пояса и стенки). Достаточно широкое распространение получили конструктивно-силовые схемы типа трехслойных конструкций,

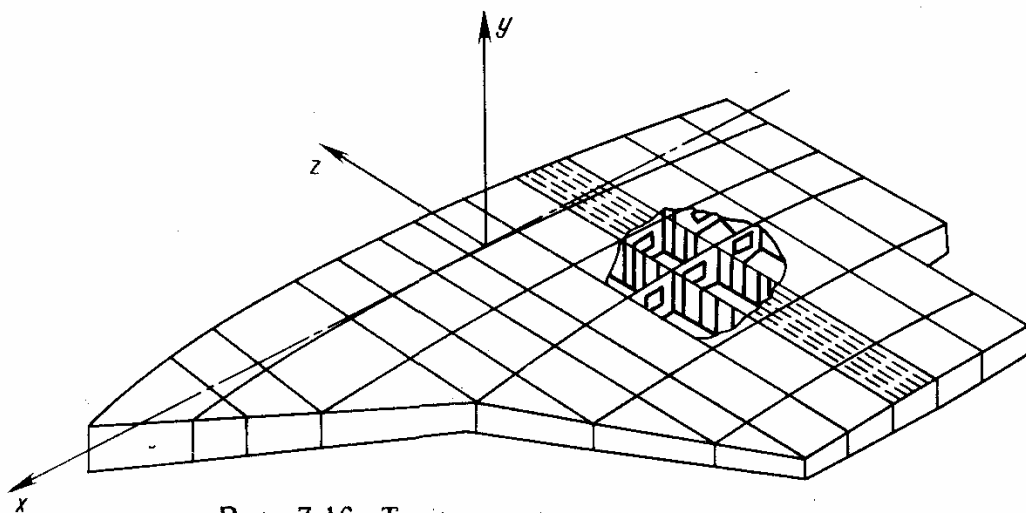


Рис. 7.16. Типовая конструкция крыла

в которых роль стенок выполняет наполнитель, а обшивка может быть либо гладкой металлической, либо выполненной из композиционных материалов. Существуют такие комбинированные конструктивно-силовые схемы, в которых сочетаются традиционные металлические конструкции с элементами из композиционных материалов и трехслойных конструкций.

Для большинства задач прочности конструкций типа крыла можно считать, что тонкостенные элементы работают в условиях плоского напряженного состояния, а подкрепляющие элементы (ребра жесткости, пояса балок) — в условиях одноосного растяжения-сжатия. Металлические подкрепленные элементы и элементы из композиционных материалов можно моделировать ортотропными и анизотропными пластинами. С позиций инженерных расчетов достаточно точной расчетной моделью легкого заполнителя может служить система перекрестных стенок, работающих на сдвиг. Поскольку строительная высота крыла значительно меньше, чем размеры крыла в плане, можно пренебречь деформациями крыла по направлению нормали к срединной поверхности и считать, что стержни, расположенные в плоскостях лонжеронов и нервюр и соединяющие верхнюю и нижнюю обшивку крыла, являются абсолютно жесткими.

Конечно-элементная сетка, которая в данном случае будет пространственной, образуется двумя идентичными сетками линий, наносимыми на обе поверхности обшивки крыла. Линии сетки, как правило, располагаются вдоль основных конструктивно-силовых элементов: лонжеронов, нервюр, ребер жесткости. Точку пересечения линий сетки на одной поверхности крыла будем называть узловой точкой, а абсолютно жесткий стержень, соединяющий две соответствующие узловые точки на верхней и нижней поверхностях — узлом конструкции (рис. 7.17).

Как и в случае плоских конструкций (см. разд. 7.5.1), перемещения всех узлов, включая также заданные, запишем в виде

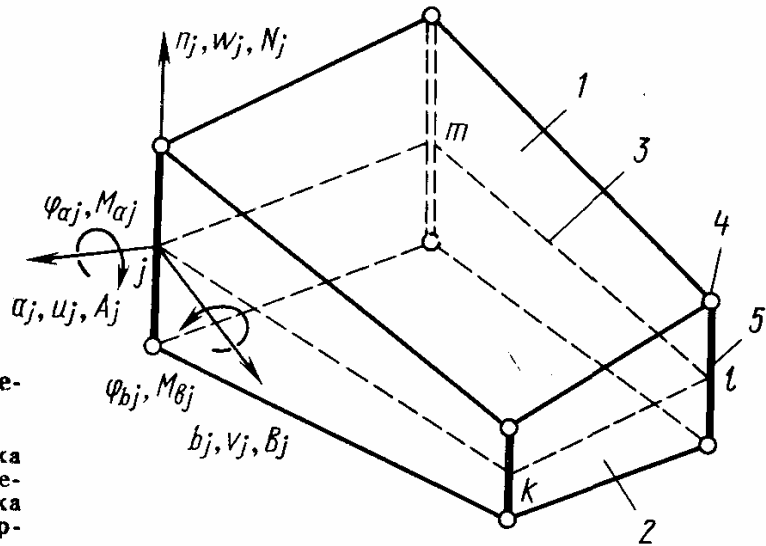


Рис. 7.17. Конечный элемент крыла:

1 — обшивка; 2 — стенка нервюры; 3 — стенка лонжерона; 4 — пояс; 5 — стойка (абсолютно жесткий стержень)

вектора (7.1). Подвектор r_j узла j в данном случае составим в виде

$$r_j^T = \{u_j, v_j, w_j, \varphi_{a_j}, \varphi_{b_j}\}, \quad (7.42)$$

где u_j, v_j, w_j — поступательные перемещения узла j соответственно по направлениям a_j, b_j, n_j , а φ_{a_j} и φ_{b_j} — повороты узла j относительно осей a_j и b_j (см. рис. 7.17). При выборе главных направлений a_j, b_j, n_j следует руководствоваться указаниями, данными в разд. 7.5.1. На рис. 7.18 показаны примеры жестких связей, которые могут быть наложены на узел конструкции по направлению перемещений (7.42). Перемещениям (7.42) соответствуют обобщенные силы

$$R_j^T = \{A_j, B_j, N_j, M_{a_j}, M_{b_j}\}. \quad (7.43)$$

Кинематические соотношения между перемещениями угловых точек и перемещениями узла (см. рис. 7.17) имеют вид

$$u_{1j} = u_j + \frac{1}{2} H_j \varphi_{b_j}; \quad u_{2j} = u_j - \frac{1}{2} H_j \varphi_{b_j},$$

$$v_{1j} = v_j + \frac{1}{2} H_j \varphi_{a_j}; \quad v_{2j} = v_j - \frac{1}{2} H_j \varphi_{a_j},$$

$$w_{1j} = w_j, \quad w_{2j} = w_j,$$

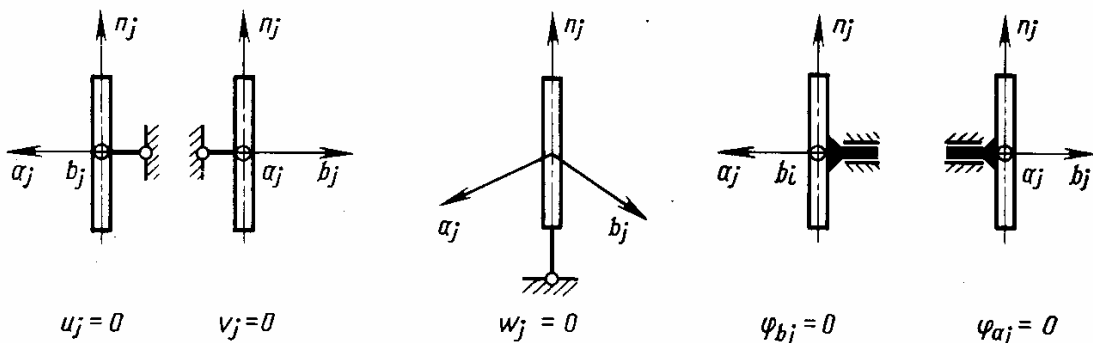


Рис. 7.18. Типы связей, накладываемых на узел

где H_j — высота стенки в узле j , а индексы 1 и 2 указывают на принадлежность угловых точек соответственно к верхней и нижней поверхностям. В матричной форме эти соотношения запишутся как

$$\begin{Bmatrix} u_{1j} \\ v_{1j} \\ w_{1j} \\ u_{2j} \\ v_{2j} \\ w_{2j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & H_j/2 \\ 0 & 1 & 0 & H_j/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -H_j/2 \\ 0 & 1 & 0 & -H_j/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \\ \varphi_{aj} \\ \varphi_{bj} \end{Bmatrix} \quad (7.44)$$

или

$$\bar{r}_j = \bar{a}_j r_j,$$

где вид матриц $\bar{r}_j$ и $\bar{a}_j$ ясен из (7.44). Внешние силы в узловых точках в соответствии с $\bar{r}_j$ запишем в виде

$$\bar{R}_j^T = \{A_{1j}B_{1j}N_{1j}A_{2j}B_{2j}N_{2j}\}.$$

Тогда

$$R_j = \bar{a}_j^T \bar{R}_j$$

или после подстановки матрицы $\bar{a}_j$ из (7.44)

$$\begin{aligned} A_j &= A_{1j} + A_{2j}, \quad B_j = B_{1j} + B_{2j}, \\ N_j &= N_{1j} + N_{2j}; \quad M_{aj} = \frac{H_j}{2} (B_{1j} - B_{2j}); \\ M_{bj} &= \frac{H_j}{2} (A_{1j} - A_{2j}). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Отсюда окончательно становится ясным физический смысл обобщенных сил (7.43): A_j , B_j , N_j — суммарные силы, действующие на узел соответственно по направлениям перемещений u_j , v_j , w_j ; M_{aj} , M_{bj} — моменты сил, действующих на узел, относительно осей a_j и b_j .

Преобразование (7.44) используется при построении матрицы жесткости конструкции и векторов нагрузок. Способ учета кинематических граничных условий рассмотрен в разд. 7.5.1. Разрешающая система уравнений $Kr = R$, являющаяся системой уравнений равновесия узлов в перемещениях, имеет решение, если конструкция закреплена от перемещений как жесткое целое тело.

7.5.3. Конструкции типа фюзеляжа

Рассмотрим применение МКЭ в перемещениях к расчету оболочки, подкрепленной стрингерами и шпангоутами. Примем следующие допущения: 1) обшивка является безмомент-

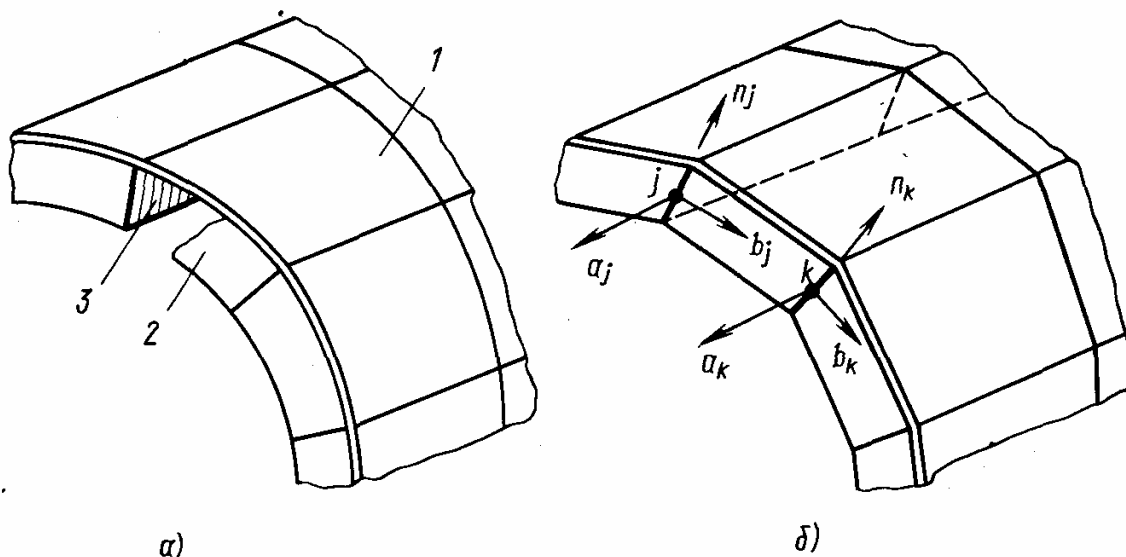


Рис. 7.19. Фрагмент подкрепленной оболочки (а: 1 — обшивка; 2 — шпангоут; 3 — лонжерон) и его конечно-элементное представление (б)

ной; 2) стрингеры работают в одноосном напряженном состоянии на растяжение-сжатие (эксцентриситетом стрингера по отношению к обшивке пренебрегаем, считая, что ось стрингера совпадает с срединной поверхностью обшивки); 3) шпангоуты моделируются искривленной рамой (тонкостенной балкой), воспринимающей растяжение-сжатие, изгиб и сдвиг; 4) деформацией элементов оболочки по направлению нормали к срединной поверхности пренебрегаем, что позволяет считать стержни, расположенные вдоль нормали и соединяющие наружный и внутренний пояса шпангоутов, абсолютно жесткими. Если необходимо учитывать работу продольного подкрепляющего набора на изгиб (в случае наличия усиленных стрингеров или продольных балок), то такие подкрепляющие элементы моделируются тонкостенными балками с поясами, работающими на растяжение-сжатие.

Линии расчетной сетки, наносимой на оболочку, совмещаются с плоскостями подкрепляющих элементов. Точку пересечения линий сетки будем называть узловой точкой, а абсолютно жесткий стержень, расположенный по нормали к оболочке и ограниченный осями наружного и внутреннего поясов шпангоута — узлом конструкции. Если безмоментная оболочка является гладкой, то узловая точка принимается за узел конструкции. В пределах шага сетки искривленные элементы заменяются прямыми и плоскими. На рис. 7.19 показан фрагмент исходной подкрепленной оболочки и ее конечно-элементной модели. На рис. 7.20 показана схематизация безмоментной гладкой оболочки с помощью треугольных КЭ.

Оси главных направлений a_j , b_j , n_j в узле выбираются таким образом, чтобы направление n_j совпало с нормалью к оболочке. В узле, где пересекаются продольные и поперечные балки подкрепляющего набора (узел j на рис. 7.19), вектор перемещений узла имеет вид (7.42). В узле, в котором изгибная жесткость обо-

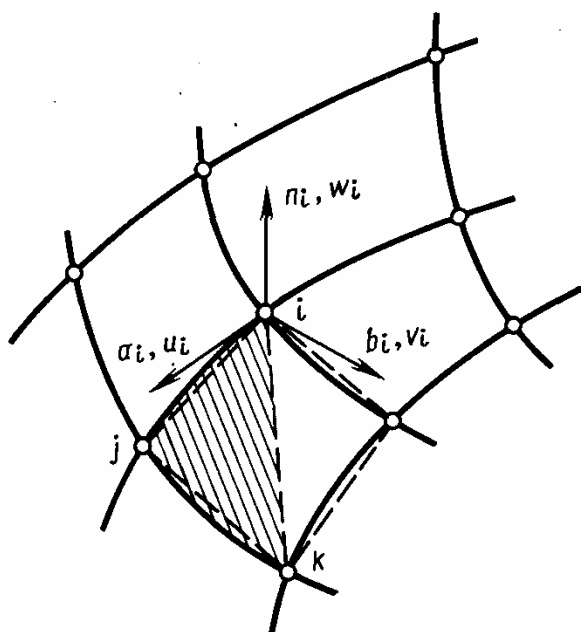


Рис. 7.20. Расчленение гладкой оболочки на конечные элементы

лочка создается только шпангоутом (узел k на рис. 7.19), вектор перемещений узла имеет вид

$$r_k^T = \{u_k v_k w_k \varphi_{ak}\}. \quad (7.46)$$

Перемещения узла безмоментной оболочки (см. рис. 7.20) записываются в виде вектора

$$r_i^T = \{u_i v_i w_i\}.$$

Задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений $Kr = R$, являющихся уравнениями равновесия узлов в перемещениях. Система уравнений имеет

решение, если на конструкцию наложены жесткие связи, исключающие возможность ее перемещений как твердого тела.

7.6. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МКЭ

Исследование точности приближенного решения заключается в выявлении источников погрешностей, анализе величин погрешностей, условий сходимости и скорости сходимости решения. Важным прикладным результатом такого исследования являются рекомендации по регулированию точности решения задачи доступными для расчетчика средствами. Курс теоретического анализа погрешностей и условий сходимости рассматривает фундаментальные свойства математической модели и способ численной реализации решения. Если решаемая задача или вычислительный алгоритм достаточно сложны и свойства математической модели в связи с этим известны лишь приближенно, теоретические оценки точности могут оказаться неполноценными. В таких случаях на практике теоретический анализ дополняется численным экспериментом, который выполняется либо с помощью исходной, либо упрощенной задачи, отражающей основные особенности рассматриваемой конструкции и ее нагружения. Цель такого эксперимента заключается в том, чтобы выбрать типы конечных элементов и параметры расчетной сетки, которые обеспечили бы достижение заданной точности на расчетной модели минимальной размерности. При планировании численного эксперимента и для подтверждения достоверности его результатов привлекаются известные теоретические решения и экспериментальные данные. План проведения численного эксперимента устанавли-

вается в зависимости от особенностей конкретной задачи. В настоящем разделе рассмотрены вопросы теоретического анализа точности МКЭ.

7.6.1. Источники погрешностей

Погрешность решения складывается из неустранимой погрешности, погрешности метода и погрешности вычислений. Рассмотрим характер этих погрешностей применительно к МКЭ.

Неустраняемая погрешность является количественной характеристикой несоответствия расчетной модели явления по отношению к самой конструкции. Это несоответствие обусловлено, с одной стороны, неточностью данных о параметрах задачи, а с другой — упрощениями, вносимыми на этапе формирования расчетной модели. В данном случае к числу таких упрощений можно отнести следующие: 1) допущение о безмоментном напряженном состоянии тонкостенных элементов; 2) аппроксимация искривленной поверхности конструкции плоскими КЭ; 3) замена поперечных сечений элементов сложной формы на более простые. Неустраняемая погрешность не контролируется в процессе численного решения задачи, ее можно уменьшить только за счет более точного описания исходной задачи и ее параметров. Знание величины неустраняемой погрешности позволяет выработать обоснованные требования к необходимой точности решения на последующих этапах. Так, очевидно, не следует добиваться численного решения с погрешностью, существенно меньшей, чем величина неустраняемой погрешности.

Погрешность математической модели МКЭ (погрешность метода) возникает вследствие того, что искомая функция аппроксимируется с помощью конечного числа координатных функций. В МКЭ координатные функции являются локализованными и определены на ячейке расчетной сетки. Поэтому величина погрешности метода зависит как от качественного соответствия координатных функций искомому решению, так и от параметров сетки (шаг, форма ячейки). Качество координатных функций оценивается по полноте используемого набора координатных функций и выполнению условий совместности для смежных КЭ на их общих границах. Для метода перемещений доказано, что при уменьшении шага сетки во всей области, занятой телом, теоретическую сходимость решения МКЭ к точному решению можно гарантировать только в том случае, если набор координатных функций будет полным, а сами они обеспечат выполнение условий совместности для смежных КЭ. Смысл этих требований будет уточнен в разд. 7.6.2.

Погрешность вычислений складывается из ошибок округления при арифметических действиях над числами, которые представлены в ЭВМ с конечным числом разрядов. Ошибки округления

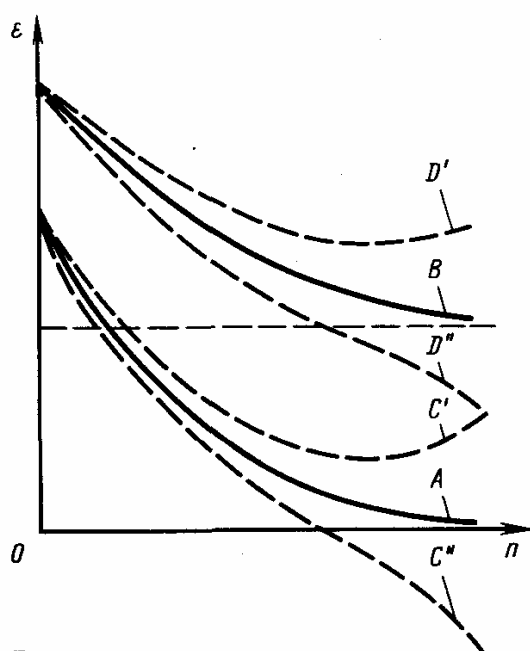


Рис. 7.21. Зависимость погрешностей МКЭ от числа элементов

возрастают при увеличении размерности задачи в связи с возрастанием числа арифметических операций.

Влияние ошибок округления на погрешность вычислений существенно зависит от обусловленности разрешающей системы линейных алгебраических уравнений МКЭ.

Проиллюстрируем возможный характер изменения погрешностей в зависимости от качества координатных функций и размерности задачи. На рис. 7.21 приведены кривые изменения погрешностей метода (A , B) и суммарной погрешности (C' , D') в зависимости от числа КЭ. Разность между кривыми C' и A (или D' и B) равна

погрешности вычислений. Кривая A соответствует использованию совместных КЭ, обеспечивающих сходимость к точному решению; кривая B — использованию несовместных КЭ, когда сходимость к точному решению не гарантируется. Кривые C' и D' соответствуют случаю, когда погрешности метода и вычислений совпадают по знаку; в противном случае имеют место кривые C'' и D'' . Из рис. 7.21 следует, что не всегда нужно стремиться к расчленению тела на максимально возможное число КЭ, так как минимальной суммарной погрешности можно достичь при ограниченном числе элементов.

7.6.2. Сходимость МКЭ

Теоретическая сходимость решения к точному определяется погрешностями метода. Важной характеристикой процесса решения является также скорость сходимости. Если скорость сходимости высока, то удовлетворительное решение можно получить уже на достаточной грубой сетке.

Метод конечных элементов в перемещениях является вариантом метода Ритца, специфика которого заключается в использовании локализованных координатных функций. Обычно сходимость метода Ритца рассматривается в энергетическом смысле и оценивается по приближению величины полной энергии системы (7.13) к ее точному значению.

Определим понятие предельного облика конечно-элементной модели. Номер приближения будем связывать с общим числом используемых координатных функций. Будем считать, что число координатных функций может меняться лишь за счет изменения

числа КЭ (т. е. изменения шага сетки); число функций, заданных на одном КЭ, остается неизменным. Пусть также с увеличением номера приближения шаг сетки уменьшается. Тогда предельным обликом конечно-элементной модели тела будет такой, в котором число КЭ, равномерно распределенных по области тела, неограниченно возрастает. В пределе решение МКЭ сводится к точному значению, если будут выполнены следующие условия:

1. На общих границах смежных КЭ координатные функции должны обеспечивать непрерывность функции перемещений и всех ее производных, порядок которых по крайней мере на единицу меньше порядка старших производных, входящих под знак интегралов в выражении энергии деформации. Этим условием устанавливаются необходимые требования к гладкости координатных функций в соответствии с принципом возможных перемещений.

В задаче теории упругости, в интегралах энергии наряду с функцией перемещений содержатся только ее первые производные. В этом случае высказанное выше условие принимает следующую формулировку: на общих границах смежных КЭ координатные функции должны обеспечивать лишь непрерывность перемещений. Вид координатных функций, удовлетворяющих минимальным требованиям гладкости, и их первых производных показан на рис. 7.22, откуда следует, что на границе КЭ первая производная от функции перемещений (т. е. деформация) терпит разрыв первого рода.

Дифференциальные уравнения теории изгиба пластин имеют четвертый порядок, и в функционал энергии входят вторые производные от перемещений. В этом случае уже требуется непрерывность не только перемещений, но и их первых производных.

Вообще для задачи, описываемой дифференциальными уравнениями порядка $2m$, решение необходимо искать в классе функций, обеспечивающих на границе КЭ непрерывность производных до порядка $m - 1$ включительно. Конечные элементы, для которых настоящее условие выполняется, являются совместными. В противном случае элементы являются несовместными.

2. Координатные функции должны обеспечивать перемещения КЭ без деформации как твердого тела, а также постоянную деформацию. Постоянная часть деформации является основным компонентом поля деформаций — при неограниченном уменьшении размеров КЭ переменная часть деформации в пределах конечного элемента неограниченно уменьшается

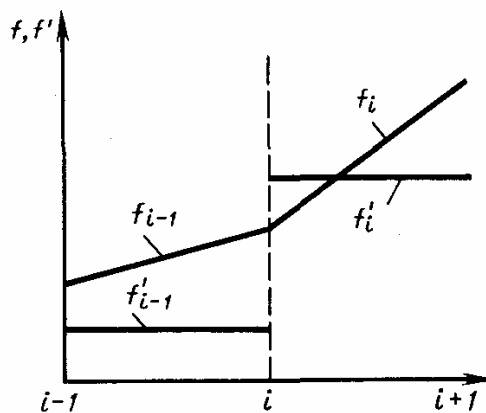


Рис. 7.22. Функции, аппроксимирующие перемещения, и их производные

по сравнению с ее постоянной частью. Это условие отражает свойство координатных функций образовывать полную систему функций. Требованию полноты системы функций в указанном смысле удовлетворяют функции в виде полных полиномов конечной степени.

Для оценки скорости сходимости установим зависимость погрешности решения от характерных параметров задачи и ее конечно-элементной модели. Пусть в качестве координатных функций используется полный полином степени p . Тогда согласно теореме Тейлора погрешность аппроксимации искомой функции перемещений пропорциональна величине $(a/l)^{p+1}$, где a — характерный размер КЭ (шаг сетки), l — характерный размер тела. В задачах, описываемых дифференциальными уравнениями порядка $2m$, выражение для энергии содержит производные порядка m . Эти производные аппроксимируются уже с погрешностью, пропорциональной величине $(a/l)^{p+1-m}$. Поскольку в выражение энергии входят квадраты производных, то погрешность в определении энергии, а следовательно, и самого решения будет равна

$$\delta = M (a/l)^{2(p+1-m)}, \quad (7.47)$$

где M — коэффициент пропорциональности. Отсюда следует, что скорость сходимости зависит от параметра p , и поскольку $(a/l) < 1$, то чем выше p , тем выше скорость сходимости. При выбранном параметре p точность решения регулируется с помощью шага сетки. Уменьшая шаг сетки, теоретически можно достигнуть любой требуемой точности.

7.6.3. Погрешности вычислений

Погрешности вычислений в основном возникают на этапе решения системы алгебраических уравнений МКЭ

$$Kr = R \quad (7.48)$$

и образуются в результате следующих причин:

1) наличие неустранимой погрешности в исходных данных, в связи с чем вместо системы (7.48) фактически решается система $(K + \Delta K)r = R + \Delta R$, где ΔK и ΔR — ошибки в определении матриц K и R ;

2) погрешности округления чисел при выполнении арифметических действий в ЭВМ на конечной разрядной сетке; в результате вместо точного решения r получается решение r^* , характеризующееся ошибкой $e = r - r^*$ или невязкой $q = R - Kr^*$.

Обычно оба источника погрешностей присутствуют одновременно. Их влияние на погрешность вычислений определяется одним из фундаментальных свойств матрицы K , а именно — ее обусловленностью. Мерой обусловленности матрицы является число обусловленности $C(K)$, которое можно определить как отношение $C(K) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, где $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ — соответственно

минимальное и максимальное собственные числа матрицы K , определяемые из уравнения $|K - \lambda E| = 0$. Если $\lambda_{\min} = 0$, т. е. $C(K) = \infty$, то матрица K является вырожденной. Чем больше число $C(K)$, тем хуже обусловленность матрицы K .

Роль числа обусловленности в погрешности вычисления проиллюстрируем на следующем примере. Наряду с системой (7.48) рассмотрим другую систему, полученную изменением правой части $K(r + \Delta r) = R + \Delta R$, где ΔR — ошибка в матрице R ; Δr — соответствующая ошибка в матрице r . Пусть матрица K невырожденная. Тогда имеет место соотношение

$$\frac{\|\Delta r\|}{\|r\|} < C(K) \frac{\|\Delta R\|}{\|R\|},$$

где $\|\Delta R\|/\|R\|$ — относительное изменение правой части; $\|\Delta r\|/\|r\|$ — относительная ошибка в решении, вызванная этим изменением; $\|\dots\|$ — норма вектора. Данное неравенство показывает, что число обусловленности выполняет роль коэффициента пропорциональности в выражении для относительной ошибки решения. Чем больше $C(K)$, тем в большее число раз может возрасти погрешность вычислений по сравнению с погрешностью задания правой части. Это же утверждение справедливо в отношении изменений ΔK в коэффициентах матрицы K .

Аналогично влияние числа обусловленности на величину погрешности вычислений, возникающей в связи с ошибками округления. Приблизительно можно считать, что десятичный порядок числа $C(K)$ равен числу десятичных значащих цифр, которые теряются в процессе вычислений. Другими словами, для относительной погрешности вычислений в связи с ошибками округления имеет место следующая оценка:

$$\delta = \frac{\|e\|}{\|r\|} \simeq 10^{-s} C(K), \quad (7.49)$$

где s — число десятичных цифр, соответствующих разрядной сетке ЭВМ.

В МКЭ число обусловленности можно связать с параметрами сетки. При равномерной сетке

$$C(K) \simeq A \left(\frac{a}{l} \right)^{-2m},$$

где A — число, зависящее от степени p аппроксимирующего полинома на КЭ. Отсюда следует, что задачи более высокого порядка (например, изгиб пластин, где $m = 2$) зависят в большей степени от погрешностей округления, чем задачи более низкого порядка (плоская задача теории упругости, $m = 1$).

Уменьшение шага сетки, т. е. отношения a/l , с одной стороны, приводит к уменьшению погрешности метода (7.47), а, с другой стороны, к увеличению погрешности вычислений (7.49). Поэтому при практических расчетах шаг сетки следует выбирать на основе компромиссного решения с учетом оценок (7.47) и (7.49).

Существует также зависимость между числом обусловленности и формой КЭ. Например, в случае плоской задачи теории упругости для сетки с треугольными КЭ и с линейной аппроксимацией перемещений существует оценка

$$C(K) \simeq \frac{B}{\sin^3 \alpha_{\min}} \left(\frac{a}{l} \right)^{-2},$$

где $\alpha_{\min}$ — минимальный угол треугольника. При $\alpha_{\min} \rightarrow 0$ обусловленность неограниченно ухудшается. Это связано с тем, что при $\alpha_{\min} \rightarrow 0$ процесс аппроксимации на треугольном КЭ вырождается. Таким образом, следует избегать тех вариантов сетки, в которых появляются удлинённые треугольные КЭ, содержащие малый угол.

ГЛАВА 8

ОСНОВЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

8.1. КОНСТРУКТИВНО-СИЛОВАЯ СХЕМА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА КАК ОБЪЕКТ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Планер летательного аппарата представляет собой механическую систему, характеризующуюся:

- сложной геометрией и структурой;

- возможностью расчленения (декомпозиции) по конструктивно-технологическим или иным удобным признакам на подсистемы (подконструкции) разных уровней — агрегаты, отсеки, элементы;

- значительным разнообразием подконструкций в геометрическом и структурном отношении и наряду с этим — возможностью выделения небольшого числа типовых элементов, из которых могут быть построены все подконструкции;

- взаимосвязью и активным взаимным влиянием подконструкций, даже непосредственно не связанных между собой, в процессе функционирования конструкции в целом.

Методологической основой исследования сложных объектов является системный анализ, основанный на декомпозиции (расчленении) объекта на системы фрагментов различных уровней, анализе этих фрагментов, описании связей между ними и синтезе декомпозированных фрагментов. Применение системного анализа, с одной стороны, позволяет построить более строгие модели функционирования и тем самым повысить эффективность создаваемых систем, а, с другой стороны, дает основу для разработки эффективных методов и алгоритмов исследования, которые не только обеспечивают выполнение заданных требований к достоверности, информативности и оперативности исследований, но и способствуют относительному снижению их трудоемкости и стоимости, в частности, снижению затрат машинного времени и памяти ЭВМ. В рамках системного подхода достигнуть этого удастся за счет:

- возможности полного учета связей между фрагментами;

- упрощения реализации вычислительного процесса благодаря переносу основного объема вычислений на уровень фрагментов, размерность и сложность математической модели которых можно регулировать;

- возможности маневрирования расчетными и математическими моделями при описании фрагментов;

расширения фронта работ на стадии анализа фрагментов;
возможности не повторять всего объема вычислений при модификации одного или нескольких фрагментов;
возможности обоснованного упрощения связей между фрагментами;

существенного снижения размерности задачи на стадии синтеза.

Элементы системного подхода практически всегда сопутствовали решению задач строительной механики. Например, основу вариационных методов, изложенных в гл. 1, составляет расчленение деформированного (или напряженного) состояния на кинематически (или статически) возможные формы с последующим синтезом решения на основе использования экстремальных свойств энергетического функционала. В случае сложных комбинированных систем широко применяется структурная декомпозиция на элементы, описываемые различными расчетными моделями, с последующим синтезом на основе условий сочленения. В связи с широким применением численных методов, ориентированных на ЭВМ, и необходимостью использования детальных расчетных схем эти подходы получили дальнейшее развитие и привели к новой методологии в строительной механике сложных систем — методу подконструкций. Метод подконструкций следует рассматривать как один из конкретных вариантов воплощения идей системного анализа применительно к исследованию сложных конструкций. Этот метод позволяет не только проводить математическую обработку более строгих расчетных моделей сложных конструкций, но и делать это рациональным способом. Метод подконструкций дает основу для построения алгоритмов декомпозиции, анализа и синтеза, реализация которых позволяет уменьшить время счета и потребные объемы памяти ЭВМ, допускает рациональную организацию обмена информацией между накопителями ЭВМ, повышает общие показатели эффективности вычислительных работ.

В настоящей главе изложена общая схема метода подконструкций применительно к задачам статического расчета планера летательного аппарата.

8.2. ОСНОВЫ МЕТОДА ПОДКОНСТРУКЦИЙ

8.2.1. Описание задачи

Рассматриваемая задача заключается в определении напряженно-деформированного состояния конструкции, удовлетворяющего уравнениям равновесия, условиям совместности деформаций и физическим соотношениям. Ограничимся случаем, когда задача для конструкции в целом и для каждой подконструкции формулируется в перемещениях. При этом разрешающие уравнения являются уравнениями равновесия в перемещениях. В част-

ности, применительно к методу конечных элементов (см. гл. 7), который является наиболее распространенным аппаратом для реализации метода подконструкций, они имеют вид

$$Kr = R. \quad (8.1)$$

Здесь K — матрица жесткости, r — координатный вектор обобщенных перемещений; R — координатный вектор обобщенных сил.

В принципе система (8.1) может быть составлена для конструкции в целом, однако при существующих требованиях к точности расчета размерность этой системы оказывается чрезвычайно высокой. Например, задача общего расчета планера современного пассажирского самолета, решаемая на основе МКЭ, содержит несколько десятков тысяч неизвестных. Структура матрицы такой системы уравнений также является достаточно сложной: матрицу не удастся привести к ленточному виду и, хотя она является слабозаполненной, неупорядоченная структура матрицы вынуждает применять для решения системы общие методы, предназначенные для полностью заполненных матриц. В этих условиях получить устойчивое решение системы (8.1) даже на современных ЭВМ представляется чрезвычайно сложной задачей. Это обстоятельство, в частности, диктует необходимость применения к задаче, описываемой уравнениями (8.1) и сформулированной для конструкции в целом, идей системного анализа.

8.2.2. Декомпозиция системы

Конструкция планера летательного аппарата расчленяется на подконструкции в соответствии с конструктивно-технологическими признаками. Схема членения является многоуровневой, в частности, планер (уровень 0) расчленяется на агрегаты (уровень 1) — крыло, фюзеляж, оперение, gondолы двигателей и т. д. Агрегат расчленяется на отсеки (уровень 2). Например, для крыла на этом уровне выделяются следующие подконструкции: центроплан, средняя часть крыла, концевая часть крыла, органы механизации и управления (закрылки, предкрылки, элероны и др.). Отсеки агрегата расчленяются на элементы (уровень 3) — стрингеры, стенки, балки, подкрепленные панели. Эта схема является примерной и отражает лишь основные этапы процедуры декомпозиции конструкции. Если применяется МКЭ, можно продолжить членение элементов конструкции (уровень 3) вплоть до конечных элементов базовой модели. Если выбран подход, основанный на использовании типовых конструкций, то членение может завершиться на уровне отсеков (уровень 2).

8.2.3. Уравнения для подконструкций

Разрешающая система уравнений для подконструкции с номером любого уровня имеет вид (индекс уровня для простоты будем опускать)

$$K^{(k)} r^{(k)} = R^{(k)}, \quad (8.2)$$

В векторе $r^{(k)}$ выделим два вида перемещений — внутренние и граничные перемещения подконструкции k . Внутренние перемещения $r_s^{(k)}$ кинематически непосредственно не связаны с перемещениями подконструкций, смежных с подконструкцией k . Граничные перемещения $r_t^{(k)}$ имеют непосредственную кинематическую связь с граничными перемещениями подконструкций, смежных с подконструкцией k . Вектор представим в виде

$$r^{(k)} = \begin{Bmatrix} r_s \\ r_t \end{Bmatrix}^{(k)}. \quad (8.3)$$

В соответствии с этим систему уравнений (8.2) перепишем в блочном виде

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{st} \\ K_{ts} & K_{tt} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} r_s \\ r_t \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} R_s \\ R_t \end{Bmatrix}^{(k)}$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} K_{ss}^{(k)} r_s^{(k)} + K_{st}^{(k)} r_t^{(k)} &= R_s^{(k)}, \\ K_{ts}^{(k)} r_s^{(k)} + K_{tt}^{(k)} r_t^{(k)} &= R_t^{(k)}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Здесь $R_s^{(k)}$ — вектор внешних сил, приложенных к подконструкции по направлению перемещений $r_s^{(k)}$; $R_t^{(k)}$ — вектор сил, которые приложены к подконструкции по направлению перемещений $r_t^{(k)}$ со стороны смежных подконструкций (силы взаимодействия для подконструкции k); $K_{ss}^{(k)}, K_{st}^{(k)} = [K_{ts}^{(k)}]^{-1}, K_{tt}^{(k)}$ — блоки матрицы жесткости подконструкции k . В (8.4) наряду с $r_s^{(k)}$ и $r_t^{(k)}$ неизвестными являются также силы взаимодействия $R_t^{(k)}$; все остальные величины известны.

8.2.4. Условия связи подконструкций

Условия связи подконструкций задаются через перемещения $r_t^{(k)}$ и силы $R_t^{(k)}$. Рассмотрим два способа схематизации условий связи — в перемещениях и в силах.

В первом случае схематизируется кинематическое взаимодействие между подконструкциями на их общих границах. С этой целью введем аппроксимации перемещений с помощью некоторого набора форм перемещений по всем границам между подконструкциями рассматриваемого уровня членения. Из амплитудных значений этих форм (т. е. коэффициентов при функциях форм) составим вектор p . Тогда перемещения на границах подконструкции k можно записать в виде

$$r_t^{(k)} = b^{(k)} p. \quad (8.5)$$

Матрица преобразования $b^{(k)}$ составлена на основе выбранных функций формы для участка границ, совпадающих с границами

подконструкции k . Введение на границах обобщенных аппроксимаций типа (8.5) дополнительно к уже выбранным аппроксимациям перемещений в пределах подконструкций обусловлено необходимостью охватить случаи, когда граничащие подконструкции относятся к кинематически разнородным объектам, т. е. к таким, для которых состав рассматриваемых перемещений и (или) формы их распределения являются различными. Примерами пар таких разнородных объектов могут служить фюзеляж и крыло, пластина и стержень и т. д. В случае, если граничащие подконструкции являются кинематически однородными, перемещения на границах аппроксимируются с помощью тех же форм перемещений, что и для подконструкций. Способ решения задачи сочленения (синтеза) подконструкций в случае схематизации кинематического взаимодействия по типу (8.5) совпадает с обычной процедурой метода перемещений, т. е. перемещения на границах p и силы взаимодействия $R_i^{(k)}$ найдутся из решения уравнений равновесия для границ.

Второй способ сочленения подконструкций связан со схематизацией силового взаимодействия и основан на аппроксимации распределения усилий $R_i^{(k)}$ с помощью некоторого набора выбранных функций формы

$$R_i^{(k)} = d^{(k)} Q, \quad (8.6)$$

где матрица преобразования $d^{(k)}$ составлена на основе выбранных функций формы для участка границ, совпадающих с границами подконструкции k ; Q — вектор амплитудных значений функций формы на границах подконструкций данного уровня членения. Данный способ схематизации условий связи иногда оказывается более удобным для практических целей, чем первый. Это чаще всего относится к тем случаям, когда конструктивно-силовая схема сочленения агрегатов является сложной и данные о характере работы агрегатов в области сочленения приходится получать из эксперимента, где проще замерить деформации (напряжения), чем перемещения.

Способ решения задачи сочленения подконструкций в случае схематизации силового взаимодействия по типу (8.6) совпадает с обычной процедурой метода сил, т. е. силы взаимодействия $R_i^{(k)}$ и перемещения $r_i^{(k)}$ найдутся из решения уравнений совместности для смежных подконструкций на их общих границах.

8.2.5. Анализ подконструкций

При формировании условий связи и в задаче сочленения подконструкций участвуют лишь перемещения $r_i^{(k)}$ и силы $R_i^{(k)}$ на границах подконструкции k . Отсюда понятна та основная задача, которую следует решить на этапе анализа подконструкций:

необходимо для каждой подконструкции получить соотношение между перемещениями и силами на ее границах, исключив из рассмотрения внутренние перемещения подконструкции. Рассмотрим решение этой задачи для случая, когда уравнения (8.4) являются алгебраическими. Выразим из первой группы уравнений (8.4) перемещения $r_s^{(k)}$ через остальные параметры (индекс k для простоты опустим)

$$r_s = K_{ss}^{-1} (R_s - K_{st} r_t) \quad (8.7)$$

или $r_s = r_{s,0} + r_{s,t}$,

где $r_{s,0} = K_{ss}^{-1} R_s$, $r_{s,t} = -K_{ss}^{-1} K_{st} r_t$.

Здесь $r_{s,0}$ — составляющая внутренних перемещений от действия нагрузки R_s при нулевых граничных перемещениях ($r_t = 0$); $r_{s,t}$ — составляющая внутренних перемещений, соответствующая граничным перемещениям r_t при $R_s = 0$.

После подстановки (8.7) во вторую группу уравнений (8.4) и несложных преобразований получим искомое соотношение

$$\bar{K}_{tt} r_t = \bar{R}_t, \quad (8.8)$$

где $\bar{K}_{tt} = K_{tt} - K_{ts} K_{ss}^{-1} K_{st}$; (8.9)

$$\bar{R}_t = R_t + R_{t,s} \quad (8.10)$$

и $R_{t,s} = -K_{ts} K_{ss}^{-1} R_s$.

Здесь $\bar{K}_{tt}$ — матрица жесткости подконструкции, составленная относительно граничных перемещений (редуцированная матрица жесткости); $\bar{R}_t$ — вектор обобщенных сил, действующих на границе подконструкции.

Если перемещения на границе r_t известны, то внутренние перемещения r_s найдутся по формуле (8.7). После этого по известным формулам можно определить напряженное состояние подконструкции. Силы взаимодействия R_t можно также непосредственно найти из второго уравнения (8.4)

$$R_t = K_{ts} r_s + K_{ss} r_t.$$

8.2.6. Синтез (сочленение) подконструкций

Рассмотрим задачу синтеза подконструкций с номерами $k = 1, 2, 3, \dots, m$, соответствующими одному уровню членения (индекс, определяющий этот уровень, для простоты опускается).

Опишем сначала решение этой задачи для случая схематизации кинематического взаимодействия (8.5) подконструкций. Для того чтобы составить уравнения равновесия на границах между подконструкциями, преобразуем силы на границах $R_t^{(k)}$ к обобщенным силам $P_t^{(k)}$, действующим по направлению обобщенных

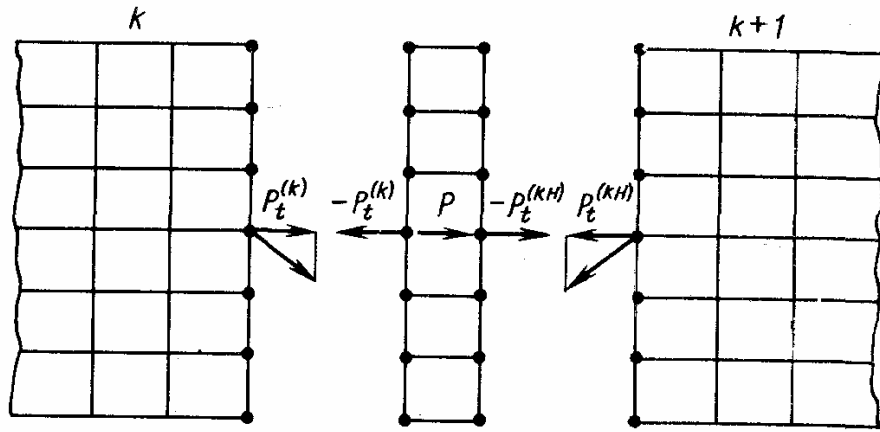


Рис. 8.1. Схема силового взаимодействия k -й и $(k+1)$ -й подконструкций через граничный элемент, нагруженный силами P

перемещений p . Если для перемещений справедливо соотношение (8.5), то для сил будем иметь

$$P_t^{(k)} = [b^{(k)}]^T R_t^{(k)}. \quad (8.11)$$

Внешние силы, приложенные на общих границах подконструкций, обозначим вектором P . Уравнение равновесия на границе примет вид (рис. 8.1)

$$P - \sum_{k=1}^m P_t^{(k)} = 0$$

или
$$\sum_{k=1}^m P_t^{(k)} = P. \quad (8.12)$$

Выразим $P_t^{(k)}$ через перемещения на границе p . Из (8.10) найдем

$$R_t^{(k)} = \bar{R}_t^{(k)} + R_{t,s}^{(k)}.$$

Учитывая (8.5) и (8.8), преобразуем это выражение к виду

$$R_t^{(k)} = \bar{K}_{tt}^{(k)} b^{(k)} p + R_{t,s}^{(k)}.$$

После подстановки в (8.11) получим

$$P_t^{(k)} = B^{(k)} p + P_{t,s}^{(k)}, \quad (8.13)$$

где $B^{(k)} = [b^{(k)}]^T \bar{K}_{tt}^{(k)} b^{(k)}$ — редуцированная матрица жесткости подконструкции k , преобразованная к перемещениям p ;

$$P_{t,s}^{(k)} = [b^{(k)}]^T R_{t,s}^{(k)}$$

— вектор усилий на границе, обусловленных действием внутренних сил $R_s^{(k)}$. Первое слагаемое правой части (8.13) можно трактовать как силы, возникающие на границе подконструкции вследствие перемещений границы. Перемещения и силы в (8.13) соответствуют направлениям p . Оба слагаемых сил $P_t^{(k)}$ в (8.13) су-

щественно зависят от жесткостных характеристик подконструкций.

Подставляя теперь (8.13) в (8.12), получим искомое уравнение равновесия, составленное относительно перемещений на внутренних границах объекта, расчлененного на подконструкции,

$$Bp = \tilde{P}, \quad (8.14)$$

где $B = \sum_{k=1}^m B^{(k)}$,

$$\tilde{P} = P - \sum_{k=1}^m P_i^{(k)}.$$

Уравнение (8.14) является разрешающим уравнением задачи синтеза для одного из уровней членения. Еще раз отметим, что уравнение (8.14) используется в случае, если условия связи подконструкций формулируются в перемещениях. Размерность задачи синтеза (порядок разрешающей системы уравнений) при этом обычно существенно меньше размерности исходной задачи для нерасчлененного объекта.

Из решения системы уравнений (8.14) определяются перемещения p :

$$p = B^{-1}\tilde{P}.$$

Далее в соответствии с (8.5) и (8.7) для каждой подконструкции можно найти перемещения и после этого по известным формулам определить ее напряженное состояние.

Рассмотрим теперь решение задачи синтеза подконструкций в случае схематизации силового взаимодействия (8.6). Каждому элементу Q_j вектора Q соответствует обобщенная сила взаимодействия, создающая статическую неопределимость силового взаимодействия между смежными подконструкциями. В строительной механике статически неопределимых систем такие силы называются лишними неизвестными. Компонента обобщенной силы взаимодействия, соответствующая подконструкции k , представляет собой систему самоуравновешенных граничных сил $R_i^{(k)}$. Из таких систем сил $R_i^{(k)}$ составлена матрица $d^{(k)}$, такая что столбец j этой матрицы есть самоуравновешенная система сил $R_i^{(k)}$, соответствующая $Q_j = 1$.

Обобщенным силам Q соответствуют обобщенные перемещения

$$q_i^{(k)} = [d^{(k)}]^T r_i^{(k)}. \quad (8.15)$$

Условия совместимости на границах подконструкций в обобщенных перемещениях примут вид

$$q = \sum_{k=1}^m q_i^{(k)} = 0. \quad (8.16)$$

Выразим условия (8.16) через жесткостные характеристики конструкций и внешние воздействия. Разрешая (8.8) относительно r_i , получим

$$G_{ii}^{(k)} \bar{R}_i^{(k)} = r_i^{(k)}, \quad (8.17)$$

где

$$G_{ii}^{(k)} = [\bar{K}_{ii}^{(k)}]^{-1}. \quad (8.18)$$

Матрица $G_{ii}^{(k)}$ является матрицей податливости подконструкции k по направлениям перемещений $r_i^{(k)}$. Операция обращения матрицы K_{ii} (8.18) выполняема только в том случае, когда подконструкция k не может перемещаться как жесткое целое. Если внешние связи, приложенные к подконструкции, не обеспечивают выполнение этого требования, необходимо приложить минимальное число дополнительных связей. Отметим, что разрешающая система уравнений задачи синтеза не зависит от того, какие конкретно дополнительные связи выбраны для закрепления подконструкции. Матрицу $G_{ii}^{(k)}$ удобнее вычислять не по формуле (8.18), а находить непосредственно из решения системы уравнений (8.4), соответствующей действию единичных сил $R_i^{(k)}$ при $R_s^{(k)} = 0$.

С учетом (8.10) приведем уравнение (8.17) к виду

$$G_{ii}^{(k)} R_i^{(k)} = r_i^{(k)} + r_{i,s}^{(k)}, \quad (8.19)$$

где $r_{i,s}^{(k)} = -G_{ii}^{(k)} R_{i,s}^{(k)}$,

— перемещения r_i от нагрузки $R_s^{(k)}$, которые могут быть найдены непосредственно из решения уравнений (8.4) при $R_i^{(k)} = 0$.

Перейдем в (8.19) к обобщенным силам и перемещениям. Для этого воспользуемся (8.6), а затем умножим (8.19) слева на матрицу $[d^{(k)}]^T$ и воспользуемся (8.15). В результате получим

$$D^k Q = q_i^{(k)} + q_{i,s}^{(k)}, \quad (8.20)$$

где

$$D^{(k)} = [d^{(k)}]^T G_{ii}^{(k)} d^{(k)}. \quad (8.21)$$

Из (8.20) следует, что

$$q_i^{(k)} = D^{(k)} Q - q_{i,s}^{(k)}.$$

С учетом этого равенства условия совместности (8.16) примут вид

$$DQ = \tilde{q}, \quad (8.22)$$

где $D = \sum_{k=1}^m D^{(k)}$,

$$\tilde{q} = \sum_{k=1}^m q_{i,s}^{(k)} = \sum_{k=1}^m [d^{(k)}]^T r_{i,s}^{(k)}.$$

Уравнение (8.22) является разрешающим уравнением задачи синтеза для одного из уровней членения. Уравнение (8.22) исполь-

зуется в том случае, если условия связи подконструкций формулируются в усилиях.

Из решения системы уравнений (8.22) находятся обобщенные силы взаимодействия Q . По формулам (8.6) определяются силы взаимодействия для каждой подконструкции. Далее из решения уравнений (8.4) находятся перемещения подконструкции, а по ним — напряжения в ее элементах. Правильность решения задачи синтеза можно установить путем проверки выполнения условий (8.16) для найденных перемещений.

8.3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Рассмотренные ниже примеры иллюстрируют применение общей теории метода подконструкций к задачам, характерным для расчета авиационных конструкций. Во всех примерах расчет подконструкций выполняется методом конечных элементов.

8.3.1. Цилиндрические оболочки, соединенные в отдельных узлах

Рассматриваемая конструкция состоит из двух одинаковых цилиндрических оболочек 1 и 2, жестко соединенных в плоскости стыка в узлах 1, 2, 3, 4 по отношению к перемещениям u , v , w (рис. 8.2). Система закреплена консольно и нагружена силой $2T$, приложенной к стыковому шпангоуту оболочки 1. Требуется определить напряженное состояние конструкций в окрестности узла стыка. Ограничимся одним уровнем членения на подконструкции, т. е. каждая из оболочек представляет собой отдельную подконструкцию, причем оболочка 1 консольно закреплена, а оболочка 2 свободна. В силу симметрии конструкции относительно плоскости xu в расчете рассматривается половина конструкции, содержащая узлы связи 1 и 2. Задача сочленения решается методом перемещений. Вектор перемещений узлов связи (по терминологии предыдущего раздела — перемещения границы) имеет вид

$$p^T = \{u_1 v_1 w_1 u_2 v_2 w_2\}.$$

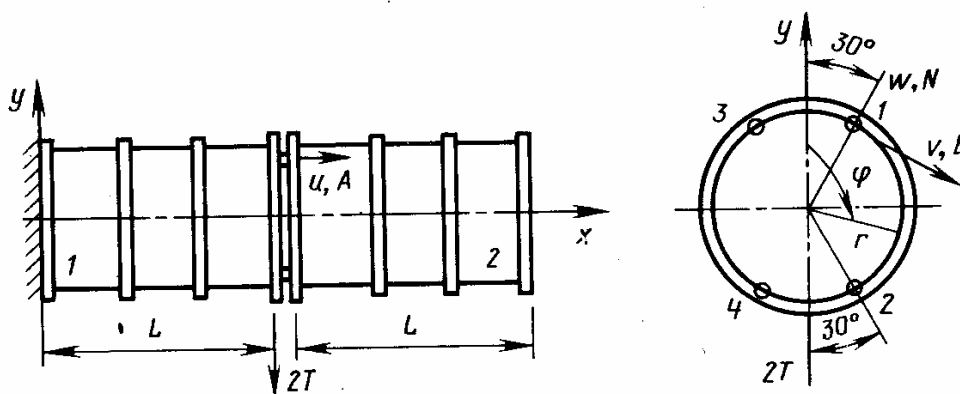


Рис. 8.2. Изгиб цилиндрических оболочек, связанных в отдельных точках

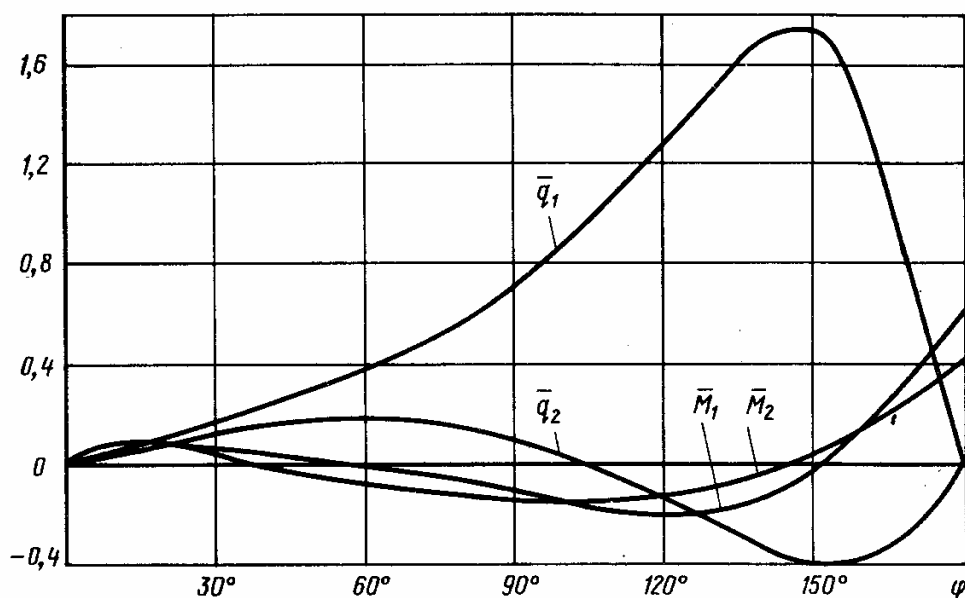


Рис. 8.3. Распределение изгибающих моментов $\bar{M} = \pi M/rT$ в стыковочных шпангоутах и потоков касательных напряжений $\bar{q} = q\pi r/2T$

Такой же вид имеют векторы граничных перемещений $r_i^{(k)}$ ($k = 1, 2$). В связи с этим $b^{(1)} = b^{(2)} = E (6 \times 6)$, где $E (6 \times 6)$ — единичная матрица шестого порядка. Таким образом, $r_i^{(1)} = r_i^{(2)} = p$. В узлах связи внешние силы равны нулю, т. е. $P = 0$. Уравнение равновесия (8.12) принимает вид $P_i^{(1)} + P_i^{(2)} = 0$, откуда следует, что силы взаимодействия связаны соотношением $P_i^{(1)} = -P_i^{(2)}$. Векторы $P_i^{(k)}$ имеют вид

$$[P_i^{(k)}]^T = \{A_1 B_1 N_1 A_2 B_2 N_2\}^{(k)},$$

где A, B, N — сосредоточенные силы, действующие соответственно по направлениям перемещений u, v, w . Положительные направления для перемещений и сил в плоскости стыка показаны на рис. 8.2.

Силы взаимодействия, полученные в результате решения задачи сочленения, приведены в табл. 8.1. На рис. 8.3 приведены

Таблица 8.1

Силы взаимодействия

№ узла (см. рис. 8.5)	1	2	3	4
A/T	0	0	0	0
B/T	0,125	—1,22	—0,125	1,22
N/T	—0,163	0,47	—0,163	0,47

графики изгибающих моментов в стыковочных шпангоутах обло-
лочек M_1 и M_2 и потоков касательных напряжений в обшивке
пролетов, примыкающих к плоскости стыка ($\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$).

8.3.2. Система двух балок

На этом простом примере показано применение метода
сочленения, основанного на схематизации силового взаимодейст-
вия. Конструкция состоит из двух балок (рис. 8.4). Применяется
один уровень членения — каждая балка представляет собой от-
дельную подконструкцию. Балка 1 консольно закреплена, балка 2
оперта на балку 1 в четырех точках. Связи между балками до-
пускают их взаимное проскальзывание в направлении оси x .
Конструкция нагружена на конце поперечной силой T . Обе балки
имеют постоянную жесткость EI , длины пролетов одинаковы и
равны a .

Внешние силы и силы взаимодействия балок 1 и 2 запишем
в виде

$$[R^{(1)}]^T = \{RR_A M_A\}, [R_i^{(1)}]^T = \{Y_1^{(1)} Y_2^{(1)} Y_3^{(1)} Y_4^{(1)}\},$$

$$[R^{(2)}]^T = 0, [R_i^{(2)}]^T = \{Y_1^{(2)} Y_2^{(2)} Y_3^{(2)} Y_4^{(2)}\}.$$

Для каждой балки необходимо рассмотреть следующие уравнения
равновесия: уравнение проекций сил на ось y и уравнение мо-
ментов относительно оси z . Эти уравнения можно записать в виде

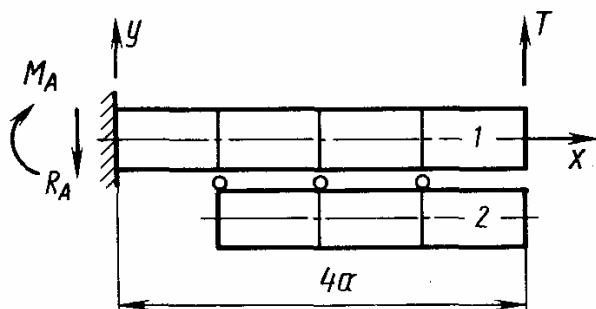
— для балки 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4a & 0 & 1 \end{bmatrix} R^{(1)} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1a & 2a & 3a & 4a \end{bmatrix} R_i^{(1)} = 0,$$

— для балки 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2a & 3a & 4a \end{bmatrix} R_i^{(2)} = 0.$$

Уравнения равновесия для узлов связи примут вид $R_i^{(1)} + R_i^{(2)} = 0$.
Уравнения равновесия необходимы для того, чтобы соста-
вить формы распределения сил взаимодействия, соответст-
вующие лишним неизвестным Q . Сочленение балок являет-
ся дважды статически неопределимым, т. е.



$$Q = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}.$$

Выбрав статически определимое
крепление балок по узлам 1 и 4,

Рис. 8.4. Система двух балок

получим следующие формы распределения усилий в состояниях Q_1 и Q_2 (рис. 8.5, б):

$$d^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{Bmatrix}, \quad d^{(1)} = -d^{(2)}. \quad (8.23)$$

Применяя известные способы определения перемещений, построим соотношения типа (8.17) для балок, закрепленных так, как показано на рис. 8.6. В результате получим:

— балка 1

$$\begin{Bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \\ v_4^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{a^3}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 5 & 16 & 28 & 40 \\ 8 & 28 & 54 & 81 \\ 11 & 40 & 81 & 128 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1^{(1)} \\ Y_2^{(1)} \\ Y_3^{(1)} \\ Y_4^{(1)} \end{Bmatrix},$$

— балка 2

$$\begin{Bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \\ v_4^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{a^3}{6EI} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1^{(2)} \\ Y_2^{(2)} \\ Y_3^{(2)} \\ Y_4^{(2)} \end{Bmatrix}.$$

Применяя преобразование (8.21) с учетом (8.23), получим

$$B^{(1)} = B^{(2)} = \frac{a^3}{18EI} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}. \quad (8.24)$$

Вычислим свободные члены уравнения (8.24). Перемещения балок будут

$$r_{t,s}^{(1)} = \frac{a^3 R}{6EI} \{11 \quad 40 \quad 81 \quad 128\},$$

$$r_{t,s}^{(2)} = 0.$$

С учетом (8.15) получим

$$q_{t,s}^{(1)} = \frac{a^3 R}{6EI} \begin{Bmatrix} 10 \\ 8 \end{Bmatrix}, \quad q_{t,s}^{(2)} = 0. \quad (8.25)$$

Основываясь на соотношениях (8.24), (8.25), найдем, что разрешающая система уравнений (8.22) будет иметь вид

$$\frac{a}{16EI} \begin{bmatrix} 16 & 14 \\ 14 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} + \frac{aR}{6EI} \begin{Bmatrix} 10 \\ 8 \end{Bmatrix} = 0.$$

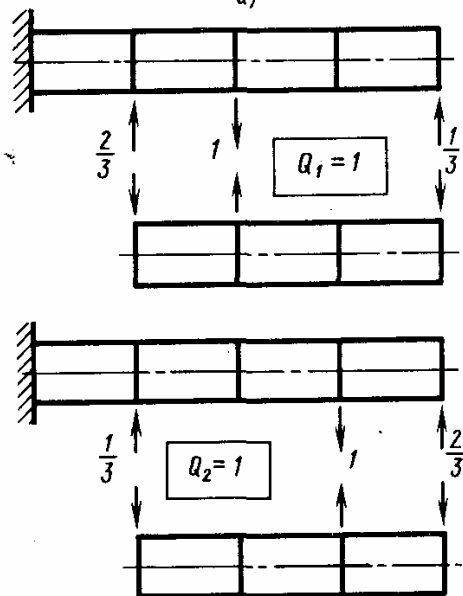
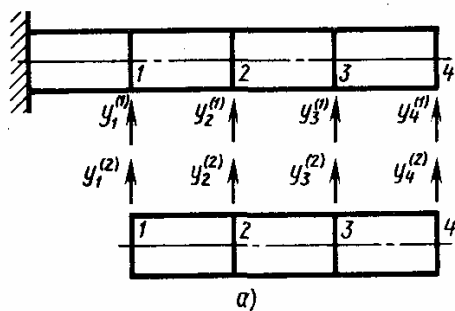


Рис. 8.5. Силы взаимодействия (а) и единичные состояния (б) системы двух балок

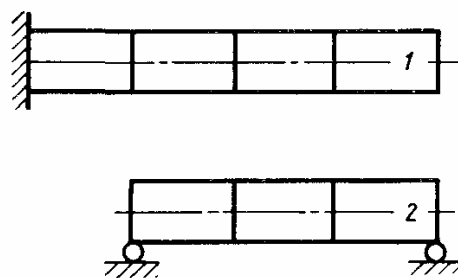


Рис. 8.6. Схемы закрепления балок, свободных от лишних связей, исключающие их смещение как твердого тела

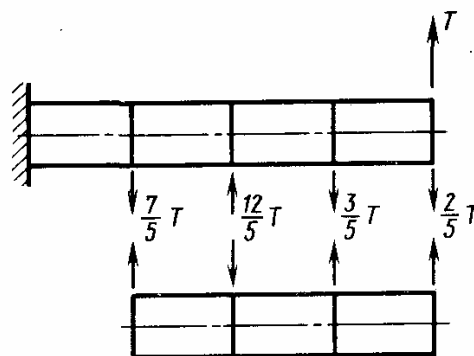


Рис. 8.7. Силы взаимодействия между балками

Решая эту систему, получим

$$Q_R = \frac{R}{5} \begin{Bmatrix} -12 \\ 3 \end{Bmatrix}.$$

Распределение сил взаимодействия показано на рис. 8.7.

8.3.3. Планер самолета с крылом малого удлинения

Рассмотрим участок планера в зоне сочленения фюзеляжа с крылом (рис. 8.8). Конструкция состоит из трех агрегатов (подконструкции уровня 1) — крыла с центропланом (ПК1), оболочки фюзеляжа (ПК2) и центральной балки (ПК3). Оболочка фюзеляжа жестко крепится к лонжеронам, бортовой нервюре и верхним панелям крыла.

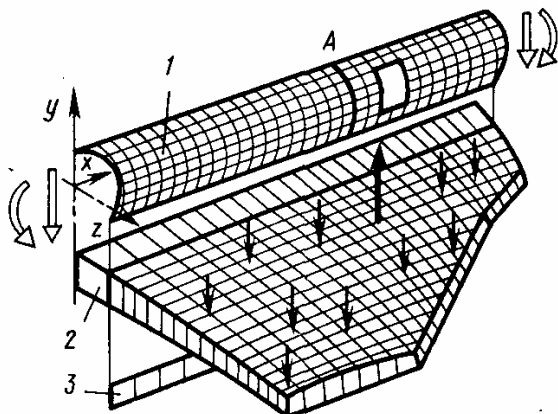


Рис. 8.8. Секция фюзеляжа (1) с крылом малого удлинения (2) и центральной балкой (3)

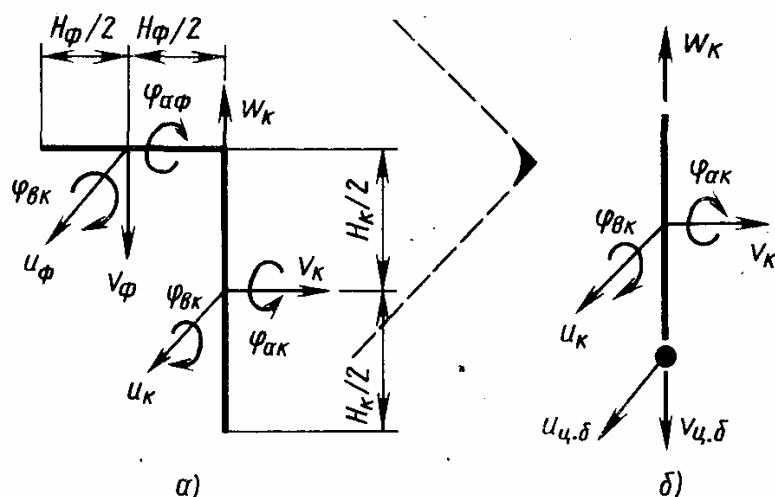


рис. 8.9. Схемы кинематического взаимодействия узлов фюзеляжа и крыла (а) и центральной балки и крыла (б)

Центральная балка жестко соединена с нервюрами и нижними панелями центроплана. Задача сочленения подконструкций решается методом перемещений. Узлы связи подконструкций отождествлены с узлами крыла, т. е. [см. (8.5)] $r_i^{(1)} = p$ и $b^{(1)} = E$, где E — единичная матрица. Схемы кинематического взаимодействия узлов фюзеляжа и крыла, а также центральной балки и крыла показаны соответственно на рис. 8.9, а, б. В этом случае соотношения типа (8.5), записанные для отдельных узлов, примут вид:

— для узлов фюзеляжа и крыла

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_b \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & H_\kappa/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -H_\phi/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & H_\kappa/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{(2)} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_a \\ \varphi_b \end{Bmatrix},$$

— для узлов центральной балки и крыла

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -H_\kappa/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(3)} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_a \\ \varphi_b \end{Bmatrix}^{(1)}.$$

Ниже приводятся результаты расчета конструкции на случай нагружения самолета на земле, для которого характерно нагружение крыла большими сосредоточенными силами от шасси. Эти силы частично уравниваются на крыле массовыми силами, а частично передаются на борт фюзеляжа. На рис. 8.10

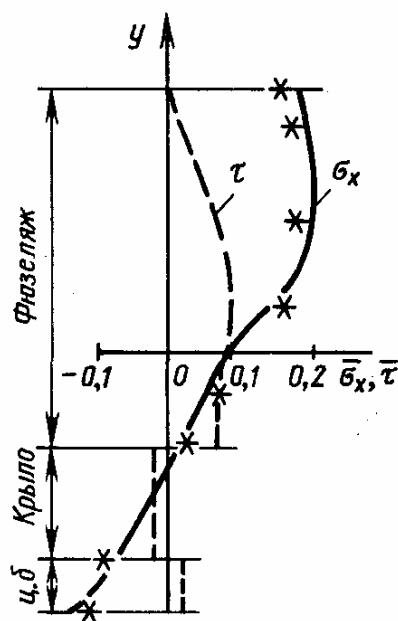


Рис. 8.10. Распределение нормальных (расчет — сплошная линия; эксперимент — звездочки) и касательных (расчет — пунктирные линии) напряжений в расчетном сечении

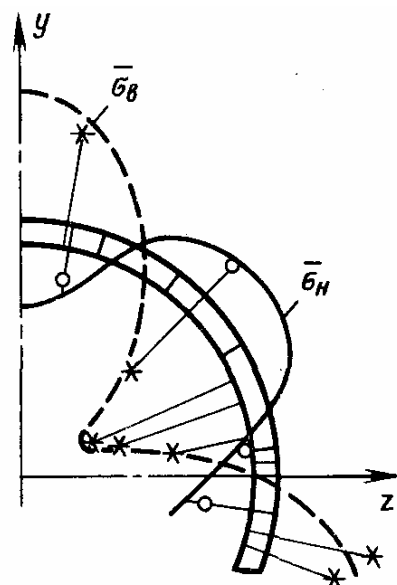


Рис. 8.11. Распределение нормальных напряжений в наружном (расчет — сплошная линия; эксперимент — кружочки) и внутреннем (расчет — пунктирная линия; эксперимент — звездочки) поясах силового шпангоута

приведено распределение напряжений в сечении, соответствующем плоскости лонжерона крыла, к которому приложена основная часть сосредоточенной силы от шасси; шпангоут фюзеляжа в этом сечении является силовым. Напряжения отнесены к пределу прочности материала σ_B , т. е. $\bar{\sigma}_x = \sigma_x / \sigma_B$, $\bar{\tau} = \tau / \sigma_B$. На рис. 8.10 показано изменение нормальных (сплошная линия) и касательных (пунктирная линия) напряжений в обшивке фюзеляжа, стенках бортовой нервюры крыла и центральной балки. На рис. 8.11 представлено распределение нормальных напряжений в наружном (сплошная линия) и внутреннем (пунктирная линия) поясах силового шпангоута. Хорошее совпадение теоретических результатов с экспериментальными (точки и звездочки) свидетельствуют о высокой точности метода подконструкций.

ГЛАВА 9

СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

9.1. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

9.1.1. Основные понятия

Потеря устойчивости, связанная с отклонением упругой системы от первоначального положения равновесия является одной из наиболее распространенных форм разрушения стержневых и тонкостенных элементов летательных аппаратов. Понятие устойчивости связано с характером реакции нагруженной системы на воздействие некоторых дополнительных возмущений — если после исчезновения этого возмущения система под действием упругих сил возвращается в исходное состояние, то это состояние считается устойчивым. Естественно, что реакция системы зависит от уровня ее нагружения, характера и величины возмущения. В дальнейшем будем считать, что возмущение по своему характеру способствует переходу системы в новое состояние, а по величине является малым. Таким образом, требуется определить уровень нагружения системы, при котором малое возмущение может привести к изменению ее состояния, т. е. к потере устойчивости. Минимальная нагрузка, при которой возникает такая ситуация, называется критической. Ввиду того, что элементы летательных аппаратов эксплуатируются при высоких уровнях нагружения и в условиях постоянного воздействия возмущающих факторов самой различной природы, конструктор должен предвидеть возможность потери устойчивости и иметь информацию о критических уровнях нагрузок, определению которых посвящена настоящая глава.

9.1.2. Статический критерий устойчивости

Основные подходы к исследованию устойчивости упругих систем можно проанализировать на простых примерах. Рассмотрим сначала сжатие вертикального жесткого стержня с упругим шарниром (рис. 9.1). Положение такого стержня как системы с одной степенью свободы вполне определяется углом φ , отсчитываемым от вертикали. Отклоним стержень от исходного вертикального положения на некоторый угол φ и исследуем его равновесие. Сила P создает опрокидывающий момент $Pl \sin \varphi$, а пружина с жесткостью c — восстанавливающий момент $m = c\varphi$, т. е. условие равновесия имеет вид

$$Pl \sin \varphi = c\varphi. \quad (9.1)$$

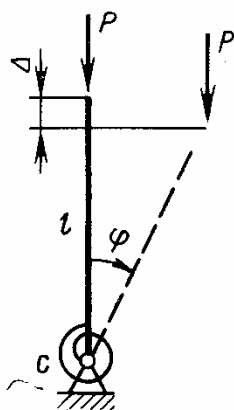


Рис. 9.1. Жесткий стержень с упругим шарниром

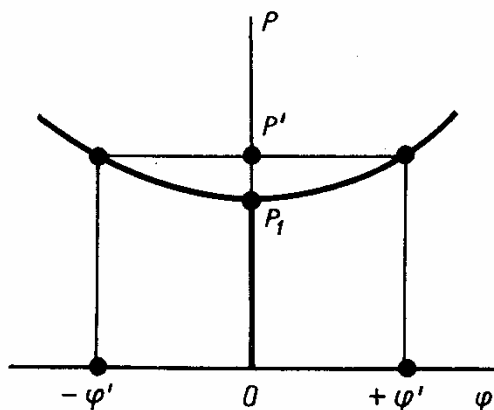


Рис. 9.2. Зависимость силы P от угла наклона стержня φ

Это уравнение при любом P имеет тривиальное (нулевое) решение $\varphi = 0$, т. е. вертикальная форма равновесия в принципе возможна при любом P . Для дальнейшего анализа представим $\sin \varphi$ степенным рядом

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

Тогда уравнение (9.1) примет вид

$$1 - \frac{\varphi^2}{3!} + \dots = \frac{P_1}{P}, \quad (9.2)$$

где

$$P_1 = c/l. \quad (9.3)$$

Поскольку левая часть уравнения (9.2) меньше 1, его решение существует только при $P \geq P_1$. Это решение показано на рис. 9.2.

Таким образом, при $P < P_1$ существует только начальное (вертикальное) положение равновесия, а при $P' > P_1$ возможны три положения равновесия, соответствующие $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi'$, $\varphi = -\varphi'$.

Точка, при переходе через которую возможна неоднозначность положения равновесия, называется точкой бифуркации или точкой ветвления решения. В рассматриваемом примере такой точкой является точка, соответствующая силе $P_1 = c/l$. Равновесное состояние упругой системы считается устойчивым, если, получив малое возмущение (малое отклонение), система возвращается к исходному положению после снятия возмущения. Нагрузка, при которой начальная форма (или положение) перестает быть устойчивой, называется критической, а соответствующее состояние — критическим. Очевидно, что в рассматриваемом примере при силе $P > P_1$ любое положение, соответствующее малому $\varphi \neq 0$, будет неравновесным и после устранения причины, вызвавшей появление угла φ , стержень под действием пружины вернется в вертикальное положение. Нагрузка $P_1 = c/l$ является критической, поскольку при $P' > P_1$ стержень сохранит после

снятия возмущения наклонное положение равновесия, соответствующее углу φ' (см. рис. 9.2), образовавшемуся в результате воздействия возмущающего фактора.

Отметим, что полный анализ поведения стержня в закритической стадии (т. е. при $P > P_1$) требует решения нелинейного уравнения (9.1). Однако для большинства реальных задач получить точное решение нелинейных уравнений не удастся. Вместе с тем в задачах устойчивости главным вопросом является вопрос о критической нагрузке. Поведение же системы в закритическом состоянии представляет меньший интерес. С учетом этого обстоятельства задачу об определении точек бифуркации и критических нагрузок можно решить на основании более простых, линеаризованных однородных уравнений. Такие уравнения строятся при рассмотрении равновесия системы в положении, близком к исходному положению. При этом важно подчеркнуть, что в задачах устойчивости уравнения равновесия составляются для деформированной системы. Линеаризованные уравнения позволяют определить условия, при которых наряду с исходным равновесным состоянием могут быть и другие, близкие к исходному, равновесные состояния. Например, для приведенного выше примера такое уравнение можно получить, если принять, что стержень отклонен от вертикали на малый угол φ , для которого можно принять, что $\sin \varphi \approx \varphi$. В результате такой линеаризации уравнение (9.1) принимает вид $Pl \varphi = c\varphi$ и имеет два решения — $\varphi = 0$ при любом P и $P = P_1 = c/l$ при $\varphi \neq 0$. Таким образом, линеаризованное уравнение позволяет определить критическую нагрузку и не позволяет в отличие от нелинейного уравнения (9.1) найти φ , т. е. определить перемещение, образующееся в результате потери устойчивости.

В заключение сформулируем статический критерий устойчивости Л. Эйлера. Согласно этому критерию *критическим называется наименьшее значение нагрузки, при котором кроме исходного положения равновесия система может иметь по крайней мере еще одно, близкое к исходному положение равновесия.*

Отметим, что для задач устойчивости характерно наличие двух или более равновесных состояний, соответствующих одной и той же нагрузке, т. е. бифуркация форм равновесия. В статическом критерии не содержится указания на то, какая из возможных форм равновесия является устойчивой, однако применительно к упругим системам достижение нагрузкой критического значения, как правило, означает, что исходная форма равновесия становится неустойчивой.

Реализация статического критерия устойчивости, т. е. определение критической нагрузки осуществляется по следующей схеме. Рассматривается докритическое (исходное) состояние системы и по заданным внешним нагрузкам определяются докритические напряжения. Ввиду того, что докритические перемещения, как правило, невелики, они не учитываются и далее исследуется исход-

ная система, на которую уже не действует внешняя нагрузка, но в которой существует найденное докритическое напряженное состояние. Этой системе придаются некоторые дополнительные малые перемещения (возмущения), соответствующие возможной форме потери устойчивости, и записываются уравнения равновесия для возмущенного состояния. Эти уравнения являются линейными и однородными относительно дополнительных перемещений и всегда включают две группы членов — члены, соответствующие упругим силам, стремящимся ликвидировать возмущения, и параметрические члены, включающие докритические напряжения и соответствующие силам, стремящимся вывести систему из исходного состояния. Необходимо найти такую комбинацию докритических напряжений, при которой уравнения равновесия имели бы нетривиальное решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям, т. е. существовали бы равновесные дополнительные перемещения, соответствующие условиям закрепления системы. Как правило, такая комбинация оказывается не единственной и выбирается та, которая соответствует минимальному значению внешней нагрузки. Это значение и является критическим. Формально отыскание критической нагрузки соответствует определению минимального собственного значения краевой задачи для уравнений равновесия, записанных в возмущенном состоянии. Отметим, что операция наложения возмущения является чисто формальной и связана с тем, что в теории устойчивости рассматриваются идеальные системы и идеальные условия нагружения. В реальных системах возмущения, вызывающие малые отклонения, всегда присутствуют — это дополнительные случайные нагрузки, несовершенства формы и т. д.

9.1.3. Энергетический критерий устойчивости

Определить критическое состояние и соответствующую нагрузку можно и на основании анализа энергетических зависимостей упругой системы при переходе ее из одного состояния в другое. При этом, как и в случае статического критерия устойчивости, нужно рассмотреть некоторое начальное (докритическое) состояние равновесия и близкое к нему возмущенное состояние. Согласно изложенному в гл. 1 вариационному принципу Лагранжа (см. разд. 1.3.2) в состоянии равновесия вариация полной энергии должна обращаться в нуль, т. е. в соответствии с формулой (1.27)

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (9.4)$$

Строго говоря, это равенство обеспечивает стационарность полной энергии, т. е. при $\delta \mathcal{E} = 0$ энергия $\mathcal{E}$ может быть минимальной или максимальной. Согласно теореме Лагранжа—Дирихле равновесное положение, определяемое условием (9.4), является устойчивым, если реализуется минимум полной энергии (т. е. $\delta^2 \mathcal{E} > 0$),

и неустойчивой, если реализуется максимум (т. е. $\delta^2 \mathcal{E} < 0$). Критическому состоянию, очевидно, соответствует условие

$$\delta^2 \mathcal{E} = 0. \quad (9.5)$$

Таким образом, согласно энергетическому критерию устойчивости критическая величина нагрузки обращает в нуль вторую вариацию полной энергии.

Рассмотрим с позиций этого критерия систему, показанную на рис. 9.1. Создадим малое отклонение φ . Тогда согласно формуле (1.24) (см. гл. 1) $\mathcal{E} = U - A$. Потенциальная энергия U накапливается в пружине, т. е.

$$U = \frac{1}{2} m \varphi = \frac{1}{2} c \varphi^2, \quad (9.6)$$

а работа A совершается силой P на перемещении $\Delta = l(1 - \cos \varphi)$ (см. рис. 9.1). Считая φ малым, учтем, что $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$, т. е.

$$A = \frac{P}{2} l \varphi^2. \quad (9.7)$$

Таким образом

$$\mathcal{E} = \frac{l}{2} \left(\frac{c}{l} - P \right) \varphi^2,$$

$$\delta \mathcal{E} = l \left(\frac{c}{l} - P \right) \varphi \delta \varphi,$$

$$\delta^2 \mathcal{E} = l \left(\frac{c}{l} - P \right) (\delta \varphi)^2.$$

Отсюда при $\delta^2 \mathcal{E} = 0$ получим $P \approx P_1 = c/l$, т. е. результат (9.3), найденный ранее с помощью статического критерия. Очевидно, при $P < P_1$ — $\delta^2 \mathcal{E} > 0$ и исходное вертикальное положение стержня является устойчивым, а при $P > P_1$ — $\delta^2 \mathcal{E} < 0$ и это положение становится неустойчивым.

Приведем еще одно энергетическое соотношение, которое часто используется для определения критической нагрузки. При переходе из начального (равновесного) состояния в смежное (не обязательно равновесное) упругая система приобретает дополнительную потенциальную энергию деформации U , которая способствует возврату системы в исходное положение, а внешние силы, способствующие развитию отклонения, совершают при этом работу A . Если эта работа меньше соответствующей энергии деформации, то начальное состояние упругой системы является устойчивым, а если больше — неустойчивым. Очевидно, критическому состоянию соответствует условие

$$U = A. \quad (9.8)$$

В частности, для рассмотренного выше стержня (см. рис. 9.1) из равенств (9.6)—(9.8) получим $P = P_1 = c/l$, т. е. прежнее выражение для критической нагрузки.

9.2. ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ

9.2.1. Устойчивость стержней

Ввиду того, что точное решение задач устойчивости удается получить лишь применительно к простейшим системам, в расчетной практике получили широкое распространение приближенные методы, общая характеристика которых была дана в разд. 1.6. В настоящем разделе описываются особенности применения этих методов к задачам устойчивости. Ввиду того, что это применение будет далее иллюстрироваться на задаче об устойчивости стержня, ниже приводятся основные уравнения для этой задачи.

Рассмотрим стержень, сжатый осевой силой P (рис. 9.3). Очевидно, в докритическом, прямолинейном состоянии в стержне будет только продольное усилие P . В соответствии со статическим критерием устойчивости придадим стержню малый прогиб $v(x)$ (см. рис. 9.3) и исследуем равновесие искривленной формы. Для вывода уравнения устойчивости применим метод, который будет неоднократно использоваться далее. Запишем уравнение изогнутой оси стержня, нагруженного некоторым поперечным давлением q . Согласно рис. 1.4 и первой формуле (1.37) имеем

$$EIv^{IV}(x) = q(x). \quad (9.9)$$

На стержень, показанный на рис. 9.3, поперечная нагрузка не действует, однако в изогнутом состоянии воздействие усилия P можно заменить воздействием статически эквивалентной условной поперечной нагрузки $\bar{q}$. Действительно, приравнивая вертикальные равнодействующие сил, показанных на рис. 9.4, получим $P \sin \alpha_1 - P \sin \alpha_2 = \bar{q} dx$. Учитывая, что для малых прогибов $v(x) \sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ и

$$\alpha_1 \approx v', \quad \alpha_2 \approx v' + \frac{dv'}{dx} dx = v' + v'' dx,$$

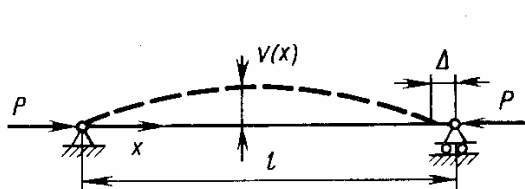


Рис. 9.3. Сжатый шарнирно опертый стержень

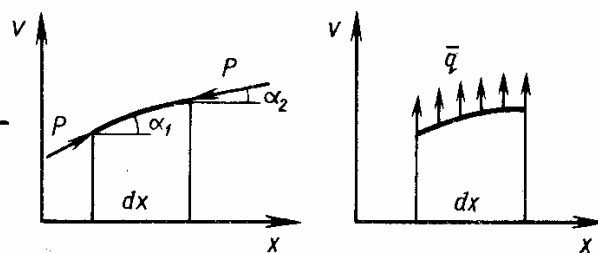


Рис. 9.4. Замена сжимающего усилия статически эквивалентной условной поперечной нагрузкой $\bar{q}$

будем иметь — $Pv'' = \bar{q}$. Этот результат можно записать в несколько иной форме, если учесть формулу для кривизны оси стержня и ее упрощение для малых прогибов ($v' \ll 1$)

$$\kappa = -\frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} \approx -v''. \quad (9.10)$$

Таким образом, для стержня

$$\bar{q} = P\kappa = -Pv''. \quad (9.11)$$

Уравнение устойчивости теперь может быть записано, если в (9.9) заменить q на $\bar{q}$ согласно (9.11). В результате получим

$$EIv^{IV} + Pv'' = 0. \quad (9.12)$$

Запишем общее решение этого уравнения

$$v = C_1 + C_2x + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx, \quad (9.13)$$

где $k^2 = P/EI$. Для шарнирно опертого стержня (см. рис. 9.3) имеем следующие граничные условия (смещение Δ является малым и не учитывается): при $x = 0$ и $x = l$ — $v = v'' = 0$, т. е. с учетом (9.13)

$$C_1 + C_4 = 0, \quad C_1 + C_2l + C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0,$$

$$C_4 = 0, \quad C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0.$$

Отсюда $C_1 = C_4 = C_2 = 0$, $C_3 \sin kl = 0$. Если принять $C_3 = 0$, то получим $v = 0$, т. е. исходную прямолинейную форму. Таким образом, для существования изогнутой формы равновесия необходимо выполнение равенства $\sin kl = 0$, возможное, если $kl = n\pi$ ($n = 1, 2, 3 \dots$). Учитывая, что $k^2 = P/EI$, получим $P_n = n^2\pi^2 EI/l^2$ — совокупность значений силы P , при которых возможна изогнутая форма равновесия. Согласно определению критической нагрузки из этих значений следует выбрать наименьшее, которое соответствует, очевидно, $n = 1$. Таким образом, получили формулу Эйлера, определяющую критическую нагрузку для сжатого шарнирно опертого стержня

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (9.14)$$

При $P = P_k$ имеем $k = \pi/l$ и, поскольку в решении (9.13) отлична от нуля только постоянная C_3 , имеем

$$v = C_3 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (9.15)$$

т. е. стержень изгибается при потере устойчивости по одной полу-волне ($n = 1$) синусоиды (см. рис. 9.3). Амплитуда прогиба C_3 , как уже отмечалось в разд. 9.1.2, из решения линеаризованного уравнения (9.12) не определяется. Для того чтобы найти прогиб, необходимо рассмотреть полное нелинейное уравнение,

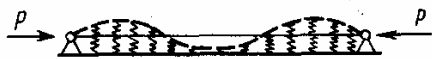


Рис. 9.5. Стержень на упругом основании

которое для исследуемого стержня записывается достаточно просто. Действительно, изгибающий момент, образующийся в сечении стержня при изгибе, связан с кривизной следующим образом $M = EI\kappa$, а внешний изгибающий момент равен Pv (см. рис. 9.3). Таким образом, $EI\kappa = Pv$, где κ определяется первым равенством (9.10). Линеаризуя это уравнение, т. е. принимая κ в соответствии со вторым равенством (9.10), получим $EIv'' + Pv = 0$ — т. е. дважды проинтегрированное уравнение (9.12).

Выше был рассмотрен метод определения критической нагрузки, основанный на непосредственном интегрировании уравнения устойчивости и удовлетворении граничных условий. В случае шарнирного опирания точное решение может быть построено также в форме ряда, каждый член которого заведомо удовлетворяет граничным условиям. Для стержня, показанного на рис. 9.3, такой ряд неоднократно использовался ранее (см. разд. 1.6.1, 1.6.2) и имеет вид

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{\pi m x}{l}. \quad (9.16)$$

Очевидно, (9.16) автоматически удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания $v(0) = v(l) = v''(0) = v''(l) = 0$. В качестве примера рассмотрим задачу об устойчивости сжатого стержня, лежащего на упругом основании (рис. 9.5). Такая расчетная схема может быть использована для анализа общей устойчивости пояса лонжерона, лежащего на упругих опорах. Уравнение устойчивости может быть получено из (9.9), в котором следует принять $q = -Pv'' - cv$. Второе слагаемое определяет реакцию упругого основания, пропорциональную прогибу v и коэффициенту упругого основания c . В результате получим

$$EIv^{IV} + cv + Pv'' = 0. \quad (9.17)$$

Подставляя ряд (9.16), будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m (EI\lambda_m^4 + c - P\lambda_m^2) \sin \lambda_m x = 0,$$

где $\lambda_m = \pi m/l$. Выполнение этого равенства возможно только в случае, когда выражение в скобках равно нулю (случай $A_m = 0$ исключается, так как при этом $v = 0$), т. е.

$$P = EI\lambda_m^2 + c\lambda_m^{-2}. \quad (9.18)$$

Для определения критической силы в формуле (9.18) следует последовательно принять $m = 1, 2, 3 \dots$ и из полученных значений P выбрать наименьшее. Для длинного стержня параметр λ_m

можно приближенно считать непрерывным и осуществить минимизацию P_n аналитически. Из условия $dP/d\lambda_m = 0$ получим $\lambda_m^4 = c/EI$, т. е. $P_{кр} = 2\sqrt{cEI}$.

9.2.2. Метод Ритца—Тимошенко

Метод Ритца—Тимошенко в задачах устойчивости является вариантом общего метода, описанного в разд. 1.6.1. Поскольку метод иллюстрируется на задаче об устойчивости стержня, приведем соответствующее выражение для полной энергии. Потенциальная энергия изогнутого стержня неоднократно записывалась ранее и имеет вид (см. разд. 1.3.3, 1.6.1)

$$U = \int_0^l \frac{EI}{2} (v'')^2 dx. \quad (9.19)$$

Работа внешней силы согласно рис. 9.3 равна $P\Delta$. Найдем величину Δ . Длину элемента дуги искривленного стержня с учетом малости прогиба ($v' \ll 1$) можно записать следующим образом:

$$ds = \sqrt{1 + (v')^2} dx \approx \left[1 + \frac{1}{2} (v')^2 \right] dx.$$

Тогда полная длина искривленной оси, равная исходной длине прямого стержня, будет

$$\int_0^{l-\Delta} \left[1 + \frac{1}{2} (v')^2 \right] dx = l,$$

отсюда

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^{l-\Delta} (v')^2 dx \approx \frac{1}{2} \int_0^l (v')^2 dx. \quad (9.20)$$

Таким образом

$$A = \frac{P}{2} \int_0^l (v')^2 dx \quad (9.21)$$

и полная энергия искривленного стержня

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l [EI (v'')^2 - P (v')^2] dx. \quad (9.22)$$

В соответствии с общим методом Ритца—Тимошенко представим прогиб в виде ряда, аналогичного (1.10)

$$v(x) = \sum_{i=1}^n B_i v_i(x), \quad (9.23)$$

где B_i — неизвестные независимые коэффициенты; $v_i(x)$ — задаваемые непрерывные функции, удовлетворяющие, по крайней мере, геометрическим граничным условиям. Если (9.23) подставить в формулу для полной энергии (9.22), то получим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EI \left(\sum_{i=1}^n B_i v_i'' \right)^2 - P \left(\sum_{i=1}^n B_i v_i' \right)^2 \right] dx, \quad (9.24)$$

т. е. при известных функциях $v_i(x)$ энергия становится квадратичной формой коэффициентов B_i . В соответствии с общим методом, изложенным в разд. 1.6.1, далее следует записать условия минимума $\mathcal{E}$, аналогичные (1.71)

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial B_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

которые образуют систему линейных однородных уравнений

$$aB - PbB = 0, \quad (9.25)$$

где B — матрица-столбец порядка n - искомых коэффициентов B_i ; a и b — квадратные матрицы порядка n , элементы которых вычисляются по формулам

$$a_{ij} = \int_0^l EI v_i'' v_j'' dx, \quad b_{ij} = \int_0^l v_i' v_j' dx \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Ввиду того, что однородная система (9.25) должна иметь ненулевое решение (случай $B_i = 0$ соответствует исходной прямолинейной форме равновесия стержня), ее определитель должен быть равен нулю, т. е.

$$\det [a_{ij} - Pb_{ij}] = 0. \quad (9.26)$$

Характеристическое уравнение (9.26) позволяет найти критическую силу.

В качестве примера рассмотрим стержень, показанный на рис. 9.3, и зададим его прогиб в виде комбинации следующих функций, удовлетворяющих геометрическим граничным условиям $v(0) = v(l) = 0$:

$$v = B_1 v_1(x) + B_2 v_2(x),$$

где $v_1 = x(l - x)$, $v_2 = x^2(l - x^2)$.

Полная энергия (9.22) после вычисления интегралов принимает вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} [EI (4B_1^2 l + 0,8B_2^2 l^5) - P (0,333B_1^2 l^3 + 6,133B_1 B_2 l^5 + 0,019B_2^2 l^7)].$$

Система (9.25)

$$\begin{aligned} (8 - 0,666\bar{P}) B_1 - 6,133\bar{P} B_2 &= 0, \\ -6,133\bar{P} B_2 + (1,6 - 0,038\bar{P}) B_1 &= 0, \end{aligned}$$

где $\bar{P} = Pl^2/EI$. Приравнивая нулю ее определитель, получим следующее характеристическое уравнение $\bar{P}^2 - 54,1\bar{P} + 1137 = 0$, имеющее минимальный корень $\bar{P}_{кр} = 11,8$, т. е. $P_{кр} = 11,8EI/l^2$, что превышает точное значение (9.14) на 19,7 %.

В случае одночленной аппроксимации прогиба $v = B_1 v_1(x)$ для получения критической силы удобнее использовать энергетическое соотношение (9.8) $U = A$. С учетом равенств (9.19) и (9.21) получим

$$P_{кр} = \frac{\int_0^l EI (v_1'')^2 dx}{\int_0^l (v_1')^2 dx}. \quad (9.27)$$

Полагая, например, для шарнирно опертого стержня (см. рис. 9.3) $v_1 = x(l-x)$ получим $P_{кр} = 12EI/l^2$.

Отметим, что задание прогиба в форме (9.23) по существу соответствует введению некоторых дополнительных связей, вынуждающих систему деформироваться в соответствии с заданным законом. Эти связи, естественно, повышают жесткость системы, а поскольку при увеличении жесткости увеличивается и критическая нагрузка, результат, полученный методом Ритца—Тимошенко, всегда будет верхней оценкой критической нагрузки. Он будет тем ближе к истинному значению, чем лучше представление (9.23) соответствует истинной форме потери устойчивости. Если в качестве аппроксимирующей функции принята действительная форма потери устойчивости, результат оказывается точным. Действительно, зададим для шарнирно опертого стержня в соответствии с точным решением (9.13) $v_1 = \sin(\pi x/l)$. Тогда по формуле (9.27) получим

$$P_{кр} = \frac{EI \frac{\pi^4}{l^4} \frac{l}{2}}{\frac{\pi^2}{l^2} \frac{l}{2}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

что совпадает с точным результатом (9.13).

9.2.3. Метод Бубнова—Галеркина

В задачах устойчивости упругой системы применение метода Бубнова—Галеркина, описанного в разд. 1.6.2 (см. гл. 1), связано с приближенным определением наименьшего собственного значения уравнения устойчивости и соответствующей собственной функции. Покажем принципиальную схему применения метода на примере сжатого стержня, уравнение устойчивости которого имеет вид (9.11), т. е.

$$L(v) = E I v^{IV} - P v'' = 0. \quad (9.28)$$

Прогиб стержня при потере устойчивости представим выражением, аналогичным (9.23), т. е.

$$v(x) = \sum_{i=1}^n B_i v_i(x), \quad (9.29)$$

где B_i — неизвестные коэффициенты, а $v_i(x)$ — аппроксимирующие функции, которые согласно методу Бубнова—Галеркина должны удовлетворять всем граничным условиям. Согласно общей схеме реализации метода, описанной в разд. 1.6.2, разложение (9.29) следует подставить в уравнение (9.28) и записать следующие условия:

$$\int_0^l L \left[\sum_{i=1}^n B_i v_i(x) \right] v_j(x) dx = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (9.29a)$$

Эти уравнения составляют линейную однородную систему, которая может быть записана в следующей матричной форме:

$$a = Pb = 0, \quad (9.30)$$

где a и b — квадратные матрицы порядка n , элементы которых вычисляются по формулам

$$a_{ij} = \int_0^l E I v_i^{IV} v_j dx, \quad b_{ij} = \int_0^l v_i'' v_j dx.$$

Так же, как и в методе Ритца—Тимошенко, критическая нагрузка определяется из характеристического уравнения (9.26), получаемого из условия равенства нулю определителя системы (9.30). Результат, найденный методом Бубнова—Галеркина, в силу причин, изложенных в разд. 9.2.2, превышает истинное значение критической нагрузки и совпадает с ним, если в разложении (9.28) содержится истинная форма потери устойчивости. Принимая, например, для шарнирно опертого стержня $v = B_1 \sin(\pi x/l)$, получим $a_{11} = \pi^4 E I / 2 l^3$, $b_{11} = \pi^2 / 2 l$ и согласно (9.30) $P_{кр} = a_{11} / b_{11} = \pi^2 E I / l^2$, т. е. точный результат.

9.2.4. Метод конечных разностей

Метод конечных разностей основан на приближенной замене дифференциальных уравнений системой алгебраических уравнений относительно значений искомых функций в узловых точках. Применение этого метода к задаче устойчивости покажем на примере стержня, уравнение устойчивости которого имеет форму (9.12), т. е.

$$E I v^{IV} + P v'' = 0. \quad (9.31)$$

Разделим стержень на n одинаковых участков длиной $\Delta x = l/n$ (рис. 9.6) и запишем уравнение (9.31) в конечных разностях с по-

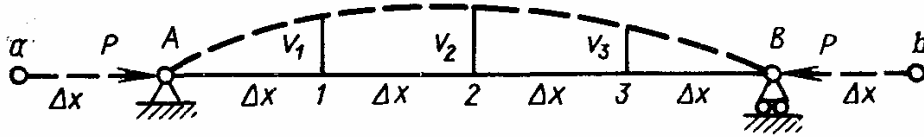


Рис. 9.6. К решению задачи устойчивости сжатого стержня методом конечных разностей

мощью формул (1.83). В некоторой внутренней точке k получим

$$\frac{EI}{\Delta x^4} [6v_k - 4(v_{k-1} + v_{k+1}) + v_{k-2} + v_{k+2}] + \frac{P}{\Delta x^2} (v_{k-1} + v_{k+1} - 2v_k) = 0. \quad (9.32)$$

Записывая это уравнение при $k = 1, 2, 3, \dots, n$ и добавляя граничные условия, которые формулируются с помощью законтурных точек, введенных в разд. 1.6.5, получим однородную систему алгебраических уравнений относительно узловых значений прогиба v_k . Для существования ненулевого решения этой системы необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю. Это условие и позволяет найти критическую нагрузку.

Для стержня, показанного на рис. 9.6, уравнения (9.32) в точках 1, 2, 3 имеют вид

$$\begin{aligned} EI \frac{1}{\Delta x^4} [6v_1 - 4(v_A + v_2) + v_\alpha + v_3] + \\ + \frac{P}{\Delta x^2} (v_A + v_2 - 2v_1) &= 0, \\ EI \frac{1}{\Delta x^4} [6v_2 - 4(v_1 + v_3) + v_A + v_B] + \\ + \frac{P}{\Delta x^2} (v_1 + v_3 - 2v_2) &= 0, \\ EI \frac{1}{\Delta x^4} [6v_3 - 4(v_2 + v_B) + v_1 + v] + \\ + \frac{P}{\Delta x^2} (v_2 + v_B - 2v_3) &= 0, \end{aligned} \quad (9.33)$$

Эти уравнения включают семь неизвестных — v_1, v_2, v_3 ; прогибы в опорных точках v_A и v_B и прогибы в двух законтурных точках v_α и v_b . Граничные условия в точках A и B имеют вид $v = v'' = 0$. Через узловые значения они формулируются с помощью равенств (1.83) следующим образом:

$$v_A = 0, \quad v_B = 0, \quad v_\alpha - 2v_A + v_1 = 0, \quad v_3 - 2v_B + v_b = 0.$$

Таким образом, к уравнениям (9.33) необходимо добавить условия $v_A = 0, v_B = 0, v_\alpha = -v_1, v_b = -v_3$. Учитывая, что в силу симметрии прогиба $v_3 = v_1$, окончательно получим следующие два уравнения ($\Delta x = l/4$):

$$\begin{aligned} (24 - 2\bar{P}) v_1 + (-16 + \bar{P}) v_2 &= 0, \\ (32 + 2\bar{P}) v_1 + (24 - 2\bar{P}) v_3 &= 0, \end{aligned}$$

где $\bar{P} = Pl^2/EI$. Приравнявая к нулю определитель этой системы, будем иметь $\bar{P}^2 - 16\bar{P} + 32 = 0$. Наименьший корень этого уравнения соответствует величине $P_{кр} = 9,43EI/l^2$, которая на 4,3 % превышает точный результат. Так же, как методы Ритца—Тимошенко и Бубнова—Галеркина, метод конечных разностей, дает завышенное значение для критической силы.

9.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

9.3.1. Основные соотношения

Плоские панели являются широко распространенными элементами, образующими обшивку крыльев летательных аппаратов. Работая в условиях плоского напряженного состояния и воспринимая сжимающие нормальные или касательные усилия, такие панели могут терять устойчивость и принимать искривленную форму типа показанной на рис. 9.7. При решении задачи о потере устойчивости пластины кроме допущений, принятых в теории изгиба пластин (см. гл. 3), предполагается, что до потери устойчивости пластина является плоской, все силы лежат в срединной плоскости и при деформациях пластины они не изменяются ни по величине, ни по направлению.

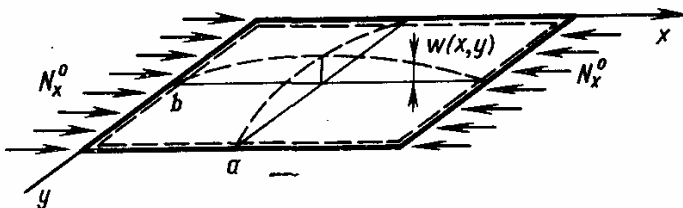
Итак будем считать, что докритическое напряженное состояние пластины является плоским и описывается уравнениями (3.28)—(3.31) (см. гл. 3), т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^0}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial N_y^0}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial x} = 0, \\ N_x^0 &= B \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right), \quad N_y^0 = B \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right), \\ N_{xy}^0 &= 0,5B(1 - \mu) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right), \quad B = \frac{Eh}{1 - \mu^2}. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Здесь N_x^0 , N_y^0 , N_{xy}^0 — докритические усилия, которые выражаются через докритические напряжения σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0 формулами

$$N_x^0 = \sigma_x^0 h, \quad N_y^0 = \sigma_y^0 h, \quad N_{xy}^0 = \tau_{xy}^0 h, \quad (9.35)$$

где h — толщина пластины; u_0 , v_0 — перемещения пластины в докритическом состоянии. Эти перемещения считаются малыми



и их влияние на размеры пластины не учитывается.

Наиболее распространенным случаем нагружения

Рис. 9.7. Возможная форма потери устойчивости сжатой в одном направлении шарнирно опертой по всем сторонам пластины

ния пластин, который и будет рассматриваться далее, является воздействие усилий, равномерно распределенных по сторонам пластины (рис. 9.8). В этом случае уравнения (9.34) удовлетворяются тождественно, если поле усилий является однородным, т. е. $N_x^0 = \text{const}$, $N_y^0 = \text{const}$, $N_{xy}^0 = \text{const}$. Таким образом, докритические усилия, действующие в пластине, будем считать известными и равными внешним усилиям N_x^0 , N_y^0 , N_{xy}^0 , действующим по сторонам пластины.

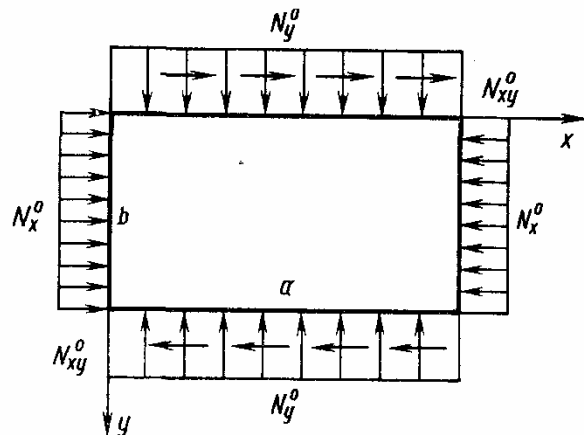


Рис. 9.8. Докритическое напряженное состояние прямоугольной пластины

Придадим теперь пластине малый прогиб $w(x, y)$ (см. рис. 9.7) и в соответствии со статическим критерием устойчивости рассмотрим ее равновесие. Линеаризованное уравнение устойчивости наиболее просто получить, если воспользоваться уравнением изгиба пластины (3.61)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (9.36)$$

и способом замены докритических усилий условной статически эквивалентной поперечной нагрузкой $\bar{q}$, изложенным применительно к стержню в разд. 9.2.1. Рассмотрим элемент пластины в изогнутом состоянии. Приравнивая вертикальные проекции сил, действующих на элемент и показанных на рис. 9.9, получим (см. также рис. 9.4)

$$\bar{q} dx dy = (N_x^0 \sin \alpha_1 - N_x^0 \sin \alpha_2) dy + (N_y^0 \sin \beta_1 - N_y^0 \sin \beta_2) dx + (N_{xy}^0 \sin \alpha_1 - N_{xy}^0 \sin \alpha_{12}) dx + (N_{xy}^0 \sin \beta_1 - N_{xy}^0 \sin \beta_{12}) dy.$$

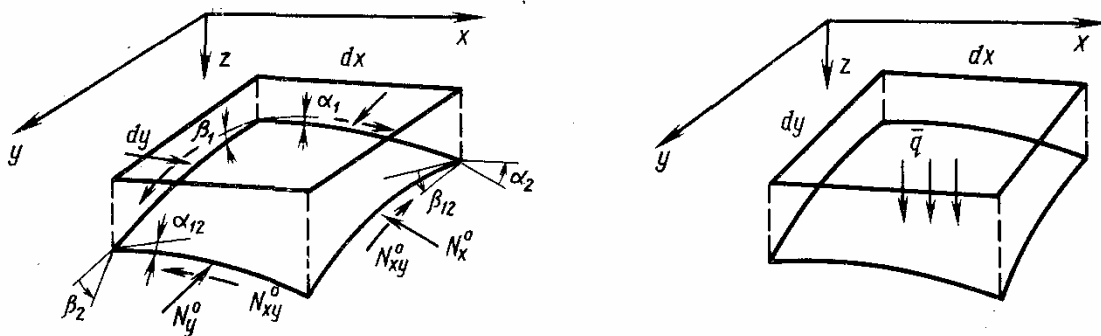


Рис. 9.9. Замена докритических усилий статически эквивалентной условной поперечной нагрузкой $\bar{q}$

Для малых прогибов и углов α и β $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, $\sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta \approx \beta$ и

$$\alpha_1 \approx \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \alpha_2 \approx \alpha_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} dx,$$

$$\beta_1 \approx \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \beta_2 = \beta_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial y} dy,$$

$$\alpha_{12} \approx \alpha_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} dy, \quad \beta_{12} = \beta_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial x} dx.$$

В результате получим

$$\bar{q} = -N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (9.37)$$

Это соотношение можно записать в другой форме, если учесть, что согласно равенствам (3.17) множители при усилиях являются величинами кривизны и кручения поверхности, в которую переходит срединная плоскость пластины при изгибании. Имеем

$$\bar{q} = N_x^0 \kappa_x + 2N_{xy}^0 \kappa_{xy} + N_y^0 \kappa_y. \quad (9.38)$$

Равенства (9.37) и (9.38) обобщают результат (9.11), полученный выше для стержня.

Подставляя в уравнение (9.36) $q = \bar{q}$ согласно (9.37), запишем уравнение устойчивости пластины

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (9.39)$$

где
$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}.$$

Граничные условия были сформулированы в разд. 3.3.1.

В заключение приведем выражение для полной энергии рассматриваемой пластины. В равенстве $\mathcal{E} = U - A$ потенциальная энергия деформации определяется соотношениями (3.58) и (3.73), т. е.

$$U = \frac{1}{2} \iint D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (9.40)$$

а работа докритических усилий записывается аналогично (9.21), т. е.

$$A = \frac{1}{2} \iint \left[N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (9.41)$$

9.3.2. Устойчивость прямоугольной пластины, сжатой в одном направлении

Рассмотрим сначала прямоугольную шарнирно опертую пластину, сжатую в направлении оси x (см. рис. 9.7). Разрешающее уравнение (9.39) в данном случае имеет вид

$$D\nabla^2\nabla^2 w + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (9.42)$$

Решение, удовлетворяющее этому уравнению и граничным условиям шарнирного опирания

$$\text{при } x = 0 \text{ и } x = a \quad w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0, \quad (9.43)$$

$$\text{при } y = 0 \text{ и } y = b \quad w = \partial^2 w / \partial y^2 = 0,$$

будем искать в форме двойного тригонометрического ряда (3.79), использованного ранее для решения задач статики пластин. Итак, пусть

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (9.44)$$

Подставляя (9.44) в (9.42), будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2 m^2}{a^2} N_x^0 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0.$$

Ввиду того, что $A_{mn} \neq 0$ (случай $A_{mn} = 0$ соответствует исходной плоской форме пластины), это равенство возможно только в том случае, когда выражение в квадратных скобках обращается в нуль. В результате получим

$$D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{m^2 N_x^0}{\pi^2 a^2} = 0,$$

откуда

$$N_x^0 = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2.$$

Представляет интерес наименьшее (критическое) значение усилия N_x^0 . Как видно из последнего выражения, для этого нужно принять $n = 1$, тогда

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2$$

или

$$N_{кр} = k_{\sigma} \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (9.45)$$

где

$$K_{\sigma} = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (9.46)$$

— коэффициент, зависящий от геометрии пластины и ее формы при потере устойчивости. На рис. 9.10 приведены графики, построенные для различных значений m и a/b . При заданном значении a/b число m , характеризующее форму пластины при потере устойчивости, будет таким, при котором k_{σ} , а следовательно, и $N_{кр}$ имеют наименьшее значение. Соответствующая кривая показана на рис. 9.10 сплошной линией. Точки пересечения отдельных ветвей определяются равенством

$$\frac{a^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 = \frac{a^2}{(m+1)^2} \left[\frac{(m+1)^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right]^2,$$

откуда следует формула

$$a/b = \sqrt{m(m+1)},$$

т. е. при $0 < a/b \leq \sqrt{2}$ $m = 1$ и пластина теряет устойчивость по одной полуволне (эта форма показана на рис. 9.7), при $\sqrt{2} \leq a/b \leq \sqrt{6}$ $m = 2$ и т. д.

Таким образом, критическое усилие сжатой шарнирно опертой пластины определяется формулой (9.45) и графиком, представленным на рис. 9.10.

Из рис. 9.10 следует, что для длинных пластин ($a/b \geq 3$) можно принять $k_{\sigma} = 4$. Этот результат может быть получен аналитической минимизацией выражения (9.46), если предположить, что величина $\lambda = mb/a$ является непрерывной. Из условия $\partial k_{\sigma} / \partial \lambda = 0$ получим $\lambda = 1$, т. е. $k_{\sigma} = 4$. Принимая в равенстве (9.45) в соответствии с (9.35) $N_{кр} = \sigma_{кр} h$, учитывая соотношение ($D = Eh^3/12 (1 - \mu^2)$) и то, что для большинства металлов $\mu = 0,3$, получим формулу для критических напряжений

$$\sigma_{кр} = 0,9k_{\sigma}E \left(\frac{h}{b} \right)^2 = 3,6E \left(\frac{h}{b} \right)^2, \quad (9.47)$$

широко используемую на практике для оценочных расчетов.

Формулу (9.45) можно представить в виде (при $n = 1$)

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right)^2.$$

Тогда первый член в скобках определяет критическую силу для полосы длиной a и шириной единица, а второй множитель показывает, во сколько раз целая пластина, т. е. система связанных полос, более устойчива, чем изолированная полоса.

Если ширина пластины велика по сравнению с длиной ($a/b \ll \ll 1$), то форма пластины при потере устойчивости имеет вид ци-

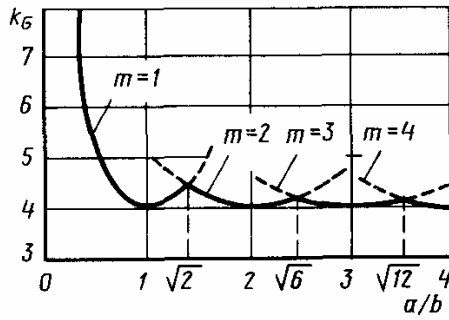


Рис. 9.10. Зависимость коэффициента устойчивости k_σ от удлинения пластины

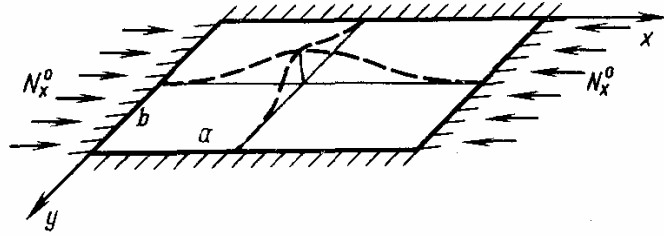


Рис. 9.11. Сжатая пластина, защемленная по контуру

цилиндрической поверхности. В этом случае следует принять $m = 1$ и формула (9.45) дает

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \frac{h^3}{a^2},$$

что соответствует формуле Эйлера для критической силы при сжатии стержня единичной ширины, толщины h и имеющего приведенный модуль упругости $E/(1-\mu^2)$.

Рассмотрим теперь устойчивость защемленной по контуру пластины (рис. 9.11). Уравнение устойчивости сохраняет прежнюю форму (9.42), а граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \text{ и } x = a \quad w = dw/dx = 0, \\ \text{при } y = 0 \text{ и } y = b \quad w = dw/dy = 0. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Ввиду того, что построение точного решения этой задачи связано с большими трудностями, получим приближенное решение, воспользовавшись методом Бубнова—Галеркина, описанным в разд. 9.2.3. Прогиб пластины зададим в виде $w(x, y) = C\varphi(x, y)$, где C — неизвестный коэффициент, а $\varphi = [1 - \cos(2\pi x/a)] \times [1 - \cos(2\pi y/b)]$ — функция, удовлетворяющая граничным условиям (9.48). Уравнение метода Бубнова—Галеркина, аналогичное (9.29а), в рассматриваемом случае имеет вид

$$\int_0^a \int_0^b L(C\varphi) \varphi(x, y) dx dy = 0, \quad (9.49)$$

где $L(C\varphi)$ есть результат подстановки $w = C\varphi$ в уравнение (9.42), т. е.

$$\begin{aligned} L(C\varphi) = CD \left[-\left(\frac{2\pi}{a}\right)^4 \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) + \right. \\ \left. + 2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^3 \left(\frac{2\pi}{b}\right)^3 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} - \left(\frac{2\pi}{b}\right)^4 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] + \\ + CN_x^0 \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right). \end{aligned}$$

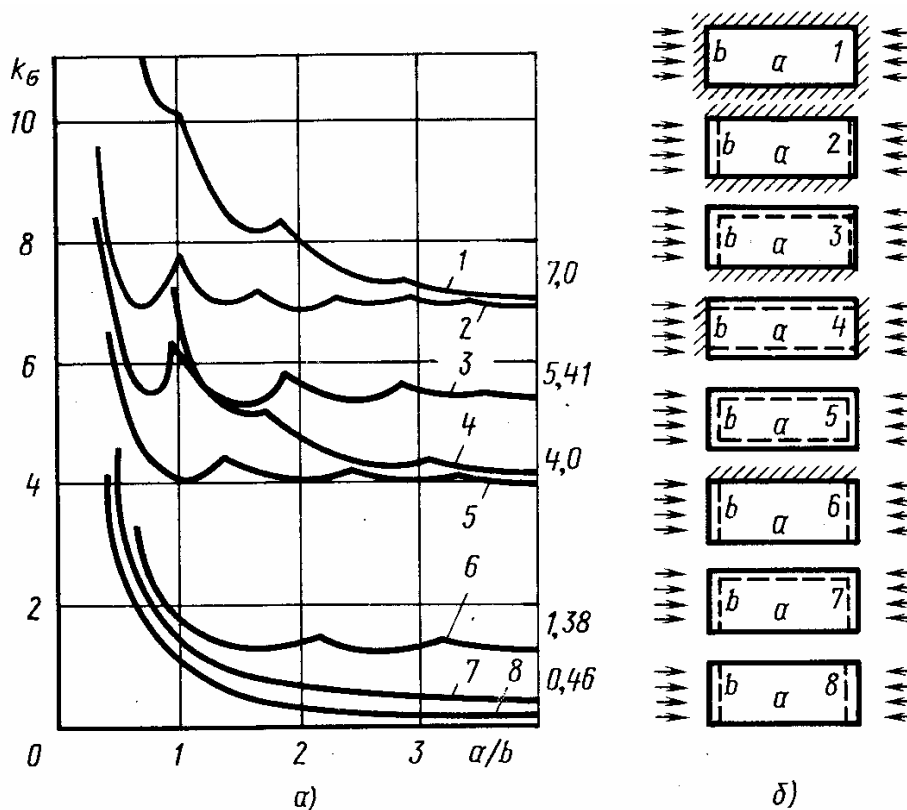


Рис. 9.12. Коэффициент устойчивости k_σ , соответствующий различным условиям закрепления пластины, в зависимости от ее удлинения. Номера кривых (а) соответствуют номерам эскизов (б). Пунктир соответствует шарнирно опертому краю, штриховка — защемленному, простая линия — свободному краю

Подставляя в (9.49) φ и выполняя интегрирование, получим

$$C \left\{ D \left[\left(\frac{2\pi}{a} \right)^4 \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{2\pi}{b} \right)^4 \right] - \right. \\ \left. - N_x^0 \frac{3}{4} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \right\} ab = 0.$$

Поскольку $C \neq 0$ имеем

$$N_x^0 = N_{кр} = k_\sigma \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (9.50)$$

где

$$k_\sigma = \frac{4}{3} \left(3 \frac{b^2}{a^2} + 2 + 3 \frac{a^2}{b^2} \right).$$

В частности, для квадратной пластины $k_\sigma = 10,67$, что отличается от точного решения на 5,5 %.

Сравнивая формулы (9.45) и (9.50), можно убедиться в том, что они отличаются только выражением для k_σ . Этот вывод справедлив и для других граничных условий — формула для критических напряжений сжатой пластины всегда может быть представлена в следующих универсальных формах:

$$\sigma_{кр} = k_\sigma \frac{\pi^2 D}{b^2 h} = k_\sigma \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2 = 0,9 k_\sigma E \left(\frac{h}{b} \right)^2.$$

Последнее равенство записано для случая $\mu = 0,3$. Коэффициент устойчивости k_σ , соответствующий различным граничным условиям, приведен на рис. 9.12.

9.3.3. Устойчивость пластин при сдвиге

В процессе эксплуатации в панелях крыла летательного аппарата могут возникать значительные сдвигающие усилия, вызываемые перерезывающей силой и крутящим моментом. Потеря устойчивости, связанная с действием касательных напряжений или усилий, сопровождается образованием в пластине прогиба в виде системы косых волн (рис. 9.13).

Уравнение устойчивости (9.39) в рассматриваемом случае принимает вид

$$D\nabla^2\nabla^2w + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (9.51)$$

Точное решение этого уравнения даже для пластин с шарнирно опертыми краями представляет, как будет видно из дальнейшего, большие трудности. Поэтому рассмотрим сначала приближенное решение, основанное на методе Ритца—Тимошенко и справедливое для пластин с большим удлинением ($a \gg b$). Зададим прогиб в следующей форме, аппроксимирующей систему косых волн, показанных на рис. 9.13

$$w = C \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi}{l} (x - ky). \quad (9.52)$$

Представление (9.52) из граничных условий шарнирного опирания (9.43) удовлетворит только условию по прогибу на длинных сторонах (рис. 9.14), т. е. $w(y=0) = w(y=b) = 0$. Условия на коротких сторонах $x=0$ и $x=a$ не выполняются, что для длинной пластины не очень существенно. Из (9.52) следует, что прогиб обращается в нуль на косых узловых линиях $x - ky = 0$, наклоненных к оси x под углом $\alpha = \arctg k$. Для реализации метода Ритца—Тимошенко найдем потенциальную энергию U и работу внешних сил A по формулам (9.40), (9.41). Осуществляя интегрирование по параллелограмму, заштрихованному на рис. 9.14, т. е. по x от ky до $l + ky$, а по y от 0 до b , получим

$$U = \frac{\pi^4 C^2 D}{8bl} \left[\left(\frac{l}{b} \right)^2 + 6k^2 + \right. \\ \left. + 2 + \left(\frac{b}{l} \right)^2 (1 + k^2)^2 \right],$$

$$A = N_{xy}^0 \frac{\pi^2 C^2 k}{4l}.$$

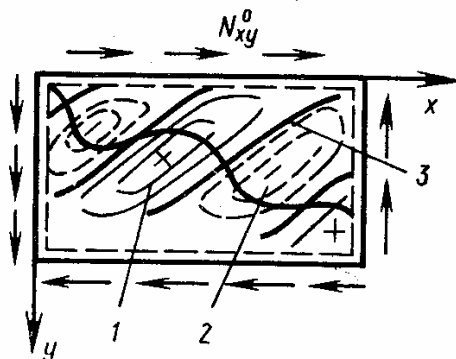


Рис. 9.13. Форма потери устойчивости пластины при сдвиге: 1 — выпуклость; 2 — впадина; 3 — узловая линия

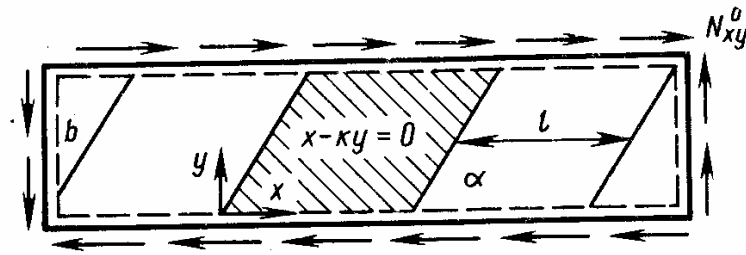


Рис. 9.14. Длинная шарнирно опертая пластина, нагруженная сдвигающими усилиями

Согласно (9.8) критическое усилие определяется из условия $U = A$. С учетом (9.35) имеем

$$\tau_{xy} = \frac{N_{xy}^0}{h} = k_{\tau} \frac{\pi^2 D}{b^3 h}, \quad (9.53)$$

где

$$k_{\tau} = \frac{1}{2k} \left[6k^2 + 2 + l^2 + \frac{1}{l^2} (1 + k^2)^2 \right], \quad l = \frac{l}{b}.$$

Величина k_{τ} зависит от двух параметров l и k . Минимизируя k_{τ} по l^2 , т. е. используя условие $\partial k_{\tau} / \partial l = 0$, получим $l^2 = 1 + k^2$. Подставляя l в k_{τ} и записывая условие минимума по k , т. е. $\partial k_{\tau} / \partial k = 0$, найдем $k = \sqrt{2}/2$. Таким образом, $\alpha = \arctg k = 54^\circ 44'$, $l = 1,22$ и $k_{\tau} = 4\sqrt{2} = 5,66$. Итак, на основании равенства (9.53) получим следующее приближенное выражение для критических касательных напряжений:

$$\tau_{кр} = 5,66 \frac{\pi^2 D}{b^3 h}.$$

Оно превышает точное значение на 6 %.

Для пластины с конечным соотношением сторон решение в принципе можно задать в форме двойного тригонометрического ряда (9.44). Каждый член этого ряда удовлетворяет условиям шарнирного опирания (9.43), однако, для того чтобы описать таким образом систему косых волн (см. рис. 9.13), требуется удерживать большое количество членов разложения. В отличие от задачи, рассмотренной в разд. 9.3.2, в данном случае непосредственная подстановка ряда (9.44) в уравнение (9.51) не позволяет тождественно удовлетворить его за счет соответствующего выбора N_{xy}^0 , поскольку четные производные будут содержать произведения синусов, а смешанная $(\partial^2 \omega / \partial x \partial y)$ — произведение косинусов (в задаче, рассмотренной в разд. 9.3.2, уравнение содержало только четные производные). В связи с этим воспользуемся для решения методом Ритца—Тимошенко. Подставляя разло-

жение для прогиба (9.44) в формулы (9.40) и (9.41) и учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{i\pi x}{a} dx &= \begin{cases} a/2 & \text{при } m = i, \\ 0 & \text{при } m \neq i, \end{cases} \\ \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} dy &= \begin{cases} b/2 & \text{при } n = j, \\ 0 & \text{при } n \neq j, \end{cases} \\ \int_0^a \sin \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{a} dx &= \begin{cases} \frac{2a}{\pi} \frac{i}{i^2 - m^2} & \text{при сумме} \\ m + i = \text{четной} \\ 0 & \text{при сумме } m + i = \text{нечетной,} \end{cases} \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} U &= \frac{\pi^4}{8} abD \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2, \\ A &= 4N_{xy}^0 \sum_m \sum_n \sum_i \sum_j \frac{A_{mn} A_{ij} m n i j}{(m^2 - i^2)(j^2 - n^2)}. \end{aligned}$$

В разложении для A учитываются только те сочетания индексов, для которых суммы $(m + i)$ и $(n + j)$ одновременно являются нечетными. В соответствии с методом Ритца—Тимошенко необходимо записать условия минимума полной энергии $\mathcal{E} = U - A$ в виде $\partial \mathcal{E} / \partial A_{mn} = 0$. В результате получим следующую систему однородных алгебраических уравнений относительно A_{mn} :

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4}{4} Dab A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - 8N_{xy}^0 \sum_i \sum_j A_{ij} \frac{m n i j}{(m^2 - i^2)(n^2 - j^2)} &= 0 \\ (m, n = 1, 2, 3 \dots). \end{aligned} \quad (9.54)$$

Здесь суммы $m + i$ и $n + j$ должны быть нечетными. Задавая различные наборы комбинаций mn (например — 11, 12, 21, 22 и т. д.) и приравнявая нулю определитель, составленный из коэффициентов уравнений (9.54), можно получить характеристическое уравнение, наименьший корень которого определяет критическое усилие сдвига. Аппроксимация результатов таких вычислений позволяет записать следующую формулу для критических касательных напряжений (при $\mu = 0,3$):

$$\tau_{кр} = k_{\tau} \frac{\pi^2 D}{b^2 h} = k_{\tau} \frac{\pi^2 E}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2 = 0,9 k_{\tau} E \left(\frac{h}{b} \right)^2. \quad (9.55)$$

Здесь

$$k_{\tau} = 5,34 + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2,$$

причем $a \geq b$.

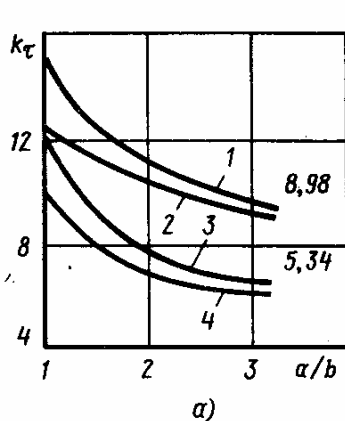


Рис. 9.15. Коэффициент устойчивости k_τ , соответствующий различным условиям закрепления пластины в зависимости от ее удлинения. Номера кривых (а) соответствуют номерам эскизов (б). Пунктир соответствует шарнирно опертому краю, штриховка — защемленному

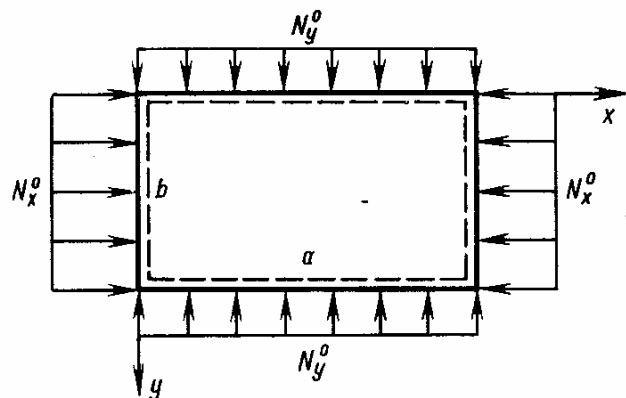
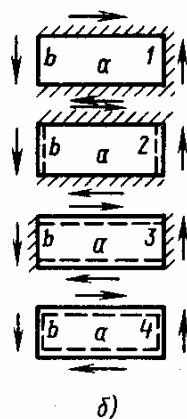


Рис. 9.16. Шарнирно опертая пластина, сжатая в двух направлениях

для k_τ . Зависимость k_τ от отношения a/b для различных условий закрепления пластины представлена на рис. 9.15.

В случае других граничных условий в формулах (9.55) изменяется только выражение

9.3.4. Устойчивость пластин при комбинированном нагружении

Рассмотрим теперь случаи, когда отличными от нуля оказываются два докритических усилия. Пусть, например, шарнирно опертая пластина сжимается в двух направлениях (рис. 9.16). Совместно действующие усилия будем отмечать верхней чертой. Уравнение устойчивости будет иметь вид

$$D\nabla^2\nabla^2 w + \bar{N}_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{N}_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Дальнейший ход решения полностью аналогичен случаю одноосного сжатия, описанному в разд. 9.3.2. Задавая прогиб в виде ряда (9.44) и подставляя его в уравнение устойчивости, получим

$$\bar{N}_x^0 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \bar{N}_y^0 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = 0.$$

Пусть для определенности $\bar{N}_x^0 \geq \bar{N}_y^0$. Тогда, обозначив $\bar{N}_y^0 = \varphi \bar{N}_x^0$ (причем $\varphi \leq 1$), запишем $\bar{N}_x^0$ в форме, аналогичной (9.45)

$$\bar{N}_{кр} = k_{\min} \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (9.56)$$

где

$$k = \frac{\left(m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2 \right)^2}{m^2 \frac{b^2}{a^2} + \varphi n^2}.$$

В формулу (9.56) подставляется найденное в результате подстановки различных значений m и n минимальное значение k , соответствующее заданной величине φ .

Для получения качественного результата рассмотрим квадратную пластину, т. е. случай $a = b$. Тогда

$$k = \frac{(m^2 + n^2)^2}{m^2 + \varphi n^2}$$

и при $\varphi \ll 1$ реализуется минимум при $m = n = 1$, т. е. $k_{\min} = 4/(1 + \varphi)$. Заменяем здесь $k_{\min}$ через $\bar{N}_{x \text{ кр}}$ с помощью формулы (9.56) и подставим $\varphi = \bar{N}_{y \text{ кр}}/\bar{N}_{x \text{ кр}}$. Тогда, учитывая, что при раздельном действии усилий их критические значения для квадратной пластины определяются согласно (9.46) равенствами

$$N_{x \text{ кр}} = N_{y \text{ кр}} = 4 \frac{\pi^2 D}{b^2},$$

окончательно получим

$$\frac{\bar{N}_{x \text{ кр}}}{N_{x \text{ кр}}} + \frac{\bar{N}_{y \text{ кр}}}{N_{y \text{ кр}}} = 1. \quad (9.57)$$

Графическая интерпретация этого соотношения представлена на рис. 9.17. Прямая (9.57) разделяет область возможных комбинаций усилий $\bar{N}_x^0$ и $\bar{N}_y^0$ на две части. Комбинации усилий, лежащие в области 1, не вызывают потери устойчивости пластины. Граничная прямая (9.57), т. е. комбинация усилий $\bar{N}_{x \text{ кр}}$ и $\bar{N}_{y \text{ кр}}$, соответствует критическому состоянию, а область 2 является областью неустойчивости.

Рассмотрим теперь другой распространенный случай комбинированного нагружения — совместное действие сжимающих и сдвигающих усилий. Предположим, что на пластину, показанную на рис. 9.14, помимо сдвигающих усилий $\bar{N}_{xy}^0$ действуют сжимающие усилия $\bar{N}_x^0$. Тогда, задавая прогиб в форме (9.52) и повторяя вывод формулы (9.53), получим вместо нее следующее соотношение:

$$\bar{N}_{x \text{ кр}} + 2\bar{N}_{xy \text{ кр}}k = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left[6k^2 + 2 + \bar{l}^2 + \frac{1}{\bar{l}^2} (1 + k^2)^2 \right].$$

Минимальное значение правой части, как было показано в разд. 9.3.3, реализуется при $\bar{l}^2 = 1 + k^2$. Тогда имеем

$$\bar{N}_{x \text{ кр}} + 2k\bar{N}_{xy \text{ кр}} = 4 \frac{\pi^2 D}{b^2} (1 + 2k^2). \quad (9.58)$$

В соответствии с результатами, полученными в разд. 9.3.2 и 9.3.3, критические значения отдельно действующих усилий равны

$$N_{x \text{ кр}} = 4 \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad N_{xy \text{ кр}} = 4 \sqrt{2} \frac{\pi^2 D}{b^2}. \quad (9.59)$$

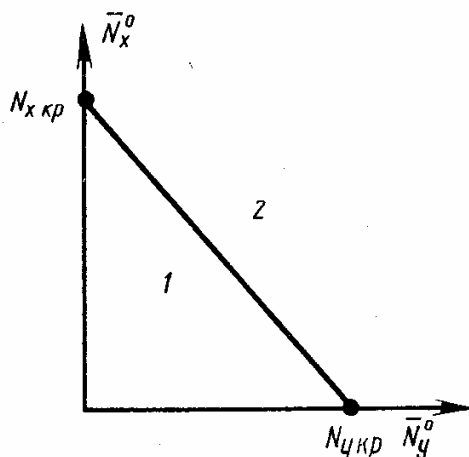


Рис. 9.17. Области устойчивости (1) и неустойчивости (2) пластинки, сжатой в двух направлениях

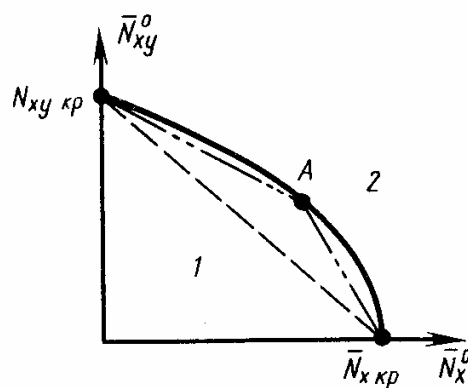


Рис. 9.18. Области устойчивости (1) и неустойчивости (2) пластины при совместном действии сжимающих и сдвигающих усилий

С учетом (9.59) равенство (9.58) принимает вид

$$\frac{\bar{N}_{xкр}}{N_{xкр}} + 2\sqrt{2} \frac{k\bar{N}_{xyкр}}{N_{xyкр}} = 1 + 2k^2. \quad (9.60)$$

Применим далее следующий приближенный прием. Зафиксируем величину касательных усилий и найдем k из условия минимума нормальных усилий, т. е. из уравнения $d\bar{N}_{xкр}/dk = 0$. В результате получим $k = \sqrt{2} \bar{N}_{xyкр}/2N_{xyкр}$ и равенство (9.60) принимает следующую окончательную форму:

$$\frac{\bar{N}_{xкр}}{N_{xкр}} + \left(\frac{\bar{N}_{xyкр}}{N_{xyкр}} \right)^2 = 1. \quad (9.61)$$

Графическая интерпретация этого соотношения представлена на рис. 9.18. Уравнение (9.61), включающее критические комбинации усилий, определяет границу, отделяющую область устойчивости (1) от области неустойчивости (2) (сплошная линия).

В заключение приведем несколько общих определений. Пусть на пластину одновременно действуют докритические усилия $\bar{N}_x^0$, $\bar{N}_y^0$, $\bar{N}_{xy}^0$. Введем декартовы оси координат и вдоль каждой из них будем откладывать величины соответствующих усилий. Тогда любая комбинация усилий будет соответствовать точке этого пространства. Область, образованная из точек, соответствующих таким комбинациям усилий, которые не вызывают потери устойчивости пластины, называется областью устойчивости. Эта область ограничена поверхностью, которая образована из точек, соответствующих критическим состояниям пластины, и называется поверхностью устойчивости. Очевидно, что поверхность устойчивости пересекает оси координат в точках $N_{xкр}$, $N_{yкр}$, $N_{xyкр}$, соответствующих критическим значениям усилий при k

раздельном действии. Определение поверхности устойчивости является важной, но в то же время и сложной задачей. Если поверхность устойчивости не определена, то приближенно предвидеть поведение системы при заданной комбинации усилий можно, руководствуясь теоремой П. Ф. Папковича о выпуклости поверхности устойчивости, которая утверждает, что эта поверхность может быть обращена выпуклостью только в сторону области неустойчивости, т. е. прямая, соединяющая две точки поверхности, всегда лежит в области устойчивости (как в случае, показанном на рис. 9.18) или принадлежит граничной поверхности (см. рис. 9.17). Таким образом, если бы мы не располагали уравнением граничной кривой, показанной на рис. 9.18 сплошной линией, о состоянии системы можно было приближенно судить по границе, показанной на рис. 9.18 пунктиром. Если имеется дополнительная информация, например, о состоянии системы при воздействии комбинации усилий, соответствующей точке A , границу области устойчивости можно уточнить (штрихпунктирная линия на рис. 9.18).

9.4. НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СИСТЕМ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ПЛАСТИН, РАБОТАЮЩИХ НА УСТОЙЧИВОСТЬ, И СТЕРЖНЕЙ

9.4.1. Панель, подкрепленная стрингерами

Пластины, используемые в конструкциях летательных аппаратов с целью повышения критической нагрузки, как правило, подкрепляются системой продольных элементов — стрингеров (рис. 9.19). Однако такое подкрепление не исключает местной формы потери устойчивости — т. е. выпучивания панелей обшивки между стрингерами (пунктирная линия на рис. 9.20, a). Это явление необходимо учитывать при расчете и конструировании панели.

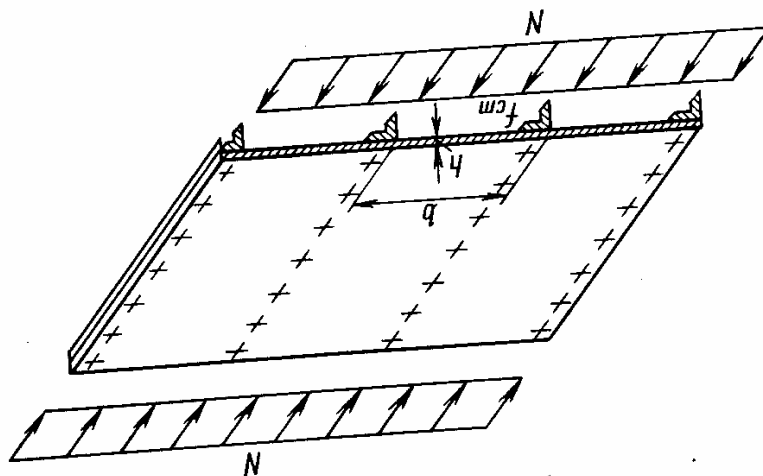


Рис. 9.19. Панель, подкрепленная стрингерами

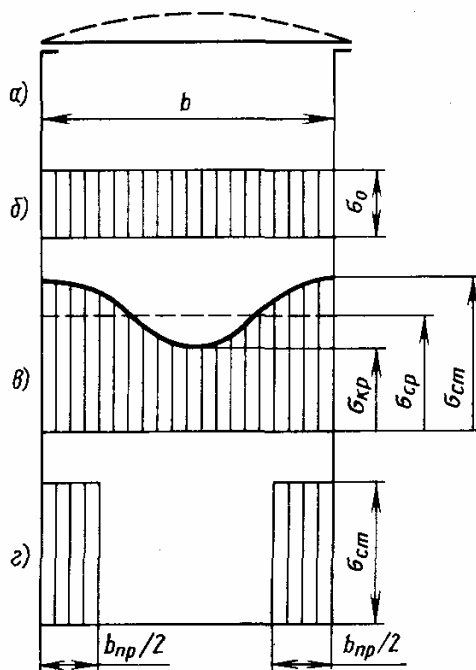


Рис. 9.20. Распределение напряжений по ширине панели (а); в докритическом состоянии (б); после потери устойчивости обшивки (в); в приведенной обшивке (г)

В докритическом состоянии напряжения распределяются равномерно по ширине панели (см. рис. 9.20, б) и определяются равенством

$$\sigma_0 = \frac{Nb}{bh + 2f_{ст}} \quad (9.62)$$

При возрастании внешнего распределенного усилия N напряжения σ_0 в пластине достигают критического значения, определяемого формулой (9.48), т. е.

$$\sigma_{кр} = 3,6E \left(\frac{h}{b} \right)^2, \quad (9.63)$$

и пластина теряет устойчивость. Усилие, при котором это происходит, можно найти по формуле (9.62), если принять в ней $\sigma_0 = \sigma_{кр}$, т. е.

$$N_{кр} = \sigma_{кр} \left(h + 2 \frac{f_{ст}}{b} \right).$$

При $N > N_{кр}$ нагрузка воспринимается в основном стрингерами, однако пластина также продолжает работать. Примерное распределение напряжений в ней показано на рис. 9.20, в сплошной линией. В средней части пластины напряжения сохраняются на уровне $\sigma_{кр}$, а вблизи стрингеров, с которыми она связана, напряжения, очевидно, будут близки к напряжениям в стрингере $\sigma_{ст}$. Для того чтобы определить восприятие нагрузки пластиной после потери устойчивости, необходимо знать точный закон распределения напряжений, который можно найти только в результате решения сложной нелинейной задачи о закритическом поведении пластины. Для приближенной оценки этого вклада можно попытаться осреднить это неизвестное распределение по ширине пластины (пунктирная линия на рис. 9.20, в). Различные подходы к решению рассматриваемой задачи различаются способами такого осреднения. Наиболее плодотворным из них оказался подход, предложенный Т. Карманом и основанный, по существу, на определении среднего напряжения по правилу среднего геометрического, т. е. (см. рис. 9.20, в)

$$\sigma_{ср} = \sqrt{\sigma_{кр} \sigma_{ст}} \quad (9.64)$$

Таким образом, доля усилия, воспринимаемого обшивкой, равна $\sigma_{ср}b$. Ввиду того, что основную роль в восприятии внешней нагрузки играют стрингеры, приведем обшивку к стрингерам, т. е. будем условно считать в соответствии с рис. 9.20, г, что в полосках шириной $b_{кр}/2$ напряжения в обшивке равны $\sigma_{ср}$.

а в средней части они вообще отсутствуют. Тем самым обшивка заменяется двумя полосками с приведенной шириной, которые присоединяются к стрингерам. Условие эквивалентности такой замены имеет вид $\sigma_{ср}b = \sigma_{ст}b_{пр}$. Отношение $\varphi = b_{пр}/b$, показывающее, на какой относительной ширине обшивку можно считать работающей с напряжениями, равными напряжению в стрингере, называется редуцированным коэффициентом по устойчивости (напомним, что в гл. 5 разд. 5.2.1 был введен редуцированный коэффициент по материалу, который также обозначался через φ_M). На основании определения редуцированного коэффициента и формул (9.63), (9.64) получим

$$\varphi = \frac{b_{пр}}{b} = \frac{\sigma_{ср}}{\sigma_{ст}} = \sqrt{\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{ст}}} = 1,9 \frac{h}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{ст}}}. \quad (9.65)$$

Усилие, воспринимаемое подкрепленной панелью, определяется, таким образом, равенством

$$N = \sigma_{ст} \left(\varphi h + 2 \frac{f_{ст}}{b} \right). \quad (9.66)$$

Для определения предельного усилия необходимо в соответствии с возможной формой разрушения стрингера задать $\sigma_{ст}$ (этот вопрос рассматривается в курсах прочности летательных аппаратов [14, 15, 17]), по формуле (9.65) найти φ и по формуле (9.66) — N .

В случае, если обшивка и стрингер изготовлены из различных материалов с модулями упругости E_0 и $E_{ст}$, необходимо сначала произвести редуцирование по материалу (см. разд. 5.2.1) и в соответствии с равенствами (5.8) и (5.10) ввести условную (редуцированную) площадь сечения стрингера f_p и условные напряжения в нем σ_p , т. е.

$$f_p = f_{ст} \frac{E_{ст}}{E_0}, \quad \sigma_p = \sigma_{ст} \frac{E_{ст}}{E_0}. \quad (9.67)$$

Стрингер с параметрами (9.67) можно условно считать изготовленным из материала с модулем упругости E_0 и использовать для расчета панели полученные выше соотношения. В частности, докритические напряжения в обшивке σ_0 и в условном стрингере σ_p определяются формулой (9.62), если заменить $f_{ст}$ на f_p , а истинные напряжения в обшивке σ_0 и стрингере $\sigma_{ст}^0$ согласно равенствам (9.67) будут

$$\sigma_0 = \frac{NbE_0}{E_0bh + 2E_{ст}f_{ст}},$$

$$\sigma_{ст}^0 = \frac{NbE_{ст}}{E_0bh + 2E_{ст}f_{ст}}.$$

Критическое значение величины внешнего усилия, вызывающего потерю устойчивости обшивки

$$N_{кр} = \sigma_{кр} \left(h + \frac{2f_{ст}}{b} \frac{E_{ст}}{E_0} \right).$$

Здесь $\sigma_{кр}$ определяется соотношением (9.63) при $E = E_0$. Формула для редуцированного коэффициента φ (9.65) преобразуется к следующему виду [$\sigma_{ст}$ заменяется на σ_p , а σ_p выражается снова через $\sigma_{ст}$ с помощью второго равенства (9.67)]:

$$\varphi = \frac{b_{пр}}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{кр} E_0}{\sigma_{ст} E_{ст}}} = \frac{1,9hE_0}{b\sqrt{\sigma_{ст} E_{ст}}}.$$

Предельное усилие определяется формулой (9.66).

9.4.2. Балка с тонкой стенкой

Тонкостенная балка (балка-стенка), показанная на рис. 9.21, а, является типовой расчетной моделью лонжерона крыла современного самолета. Балка состоит из верхнего (1) и нижнего (3) поясов, стенки (4) и стоек (2), разделяющих стенку на систему независимо работающих панелей. При расчете тонкостенной балки принимаются следующие гипотезы.

1. Внешняя нагрузка приложена только в узловых точках (если задана распределенная нагрузка, то она распределяется по узлам).

2. До потери устойчивости стенка воспринимает только касательные напряжения τ (см. рис. 9.21, б). Другими словами, здесь предполагается, что из трех возможных усилий N_x , N_y и N_{xy} плоского напряженного состояния (3.28) в стенке можно учитывать только касательные усилия N_{xy} , а нормальными усилиями N_x и N_y можно пренебрегать, поскольку их роль в восприятии внешней нагрузки мала по сравнению с ролью поясов и стоек. Итак, полагая в уравнениях (3.2.8) $N_x = N_y = 0$, получим $\partial N_{xy}/\partial x = 0$, $\partial N_{xy}/\partial y = 0$, т. е. $N_{xy} = \text{const}$, и, следовательно, касательные напряжения $\tau = N_{xy}/h$ (h — толщина стенки) в пределах панели постоянны.

3. Пояса и стойки до потери устойчивости стенки работают только на растяжение или сжатие.

С учетом принятых гипотез тонкостенная балка оказывается статически определимой, т. е. усилия и напряжения во всех ее элементах могут быть найдены из уравнений равновесия. Рассмотрим некоторое сечение cd $x = \text{const}$ (см. рис. 9.21, а), в котором внешние силы образуют поперечную силу $Q(x)$ и изгибающий момент $M(x)$ (см. рис. 9.21, б, в), и запишем условия равновесия отсеченной части балки. Проектируя все действующие силы на ось y , получим $\tau h N = Q(x)$, откуда

$$\tau = \frac{Q(x)}{hN}. \quad (9.68)$$

Равенство нулю моментов относительно точек c и d дает

$$N_{п.в} = -N_{п.н} = \frac{M(x)}{H}. \quad (9.69)$$

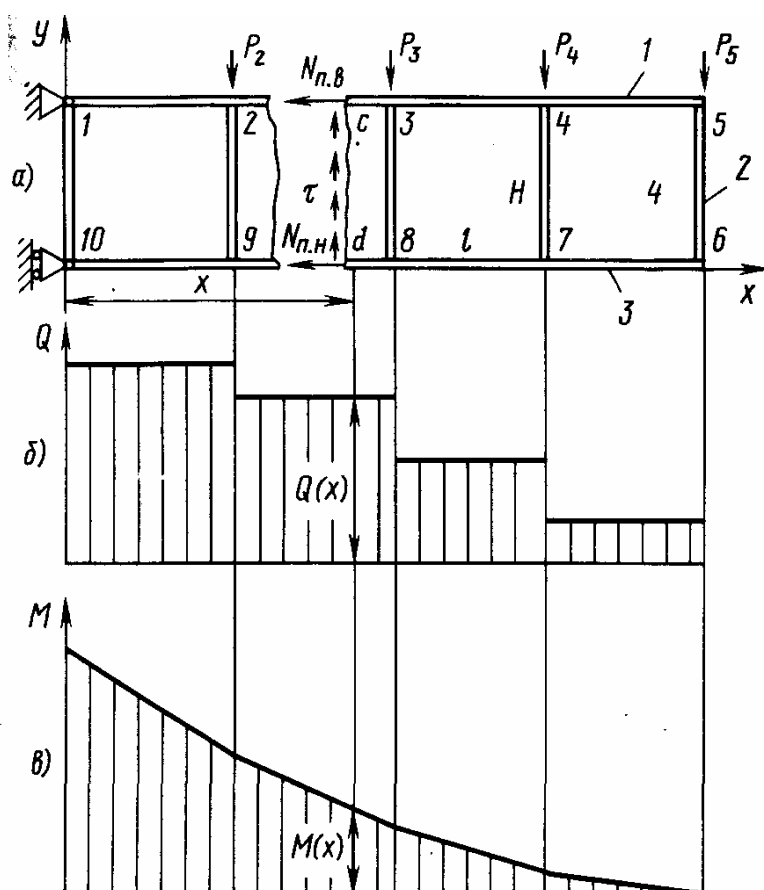


Рис. 9.21. Тонкостенная балка (а: 1 — верхний пояс; 2 — стойка; 3 — нижний пояс; 4 — стенка) и эпюры действующих на нее перерезывающих сил б) и моментов в)

рис. 9.21, а), очевидно, следует принять $\tau_1 = 0$, а для крайней правой — $\tau_{i+1} = 0$.

В качестве примера рассмотрим балку, показанную на рис. 9.23, а. Имеем $Q = P$, $M = P(2l - x)$, т. е. согласно равенствам (9.68)–(9.70) $\tau_1 = \tau_2 = P/hH$, $N_{п.в} = -N_{п.н} = = P(2l - x)/H$, $N'_{ст} = Py/H$, $N^2_{ст} = 0$, $N^3_{ст} = -Py/H$. Напряженное состояние балки показано на рис. 9.23, б.

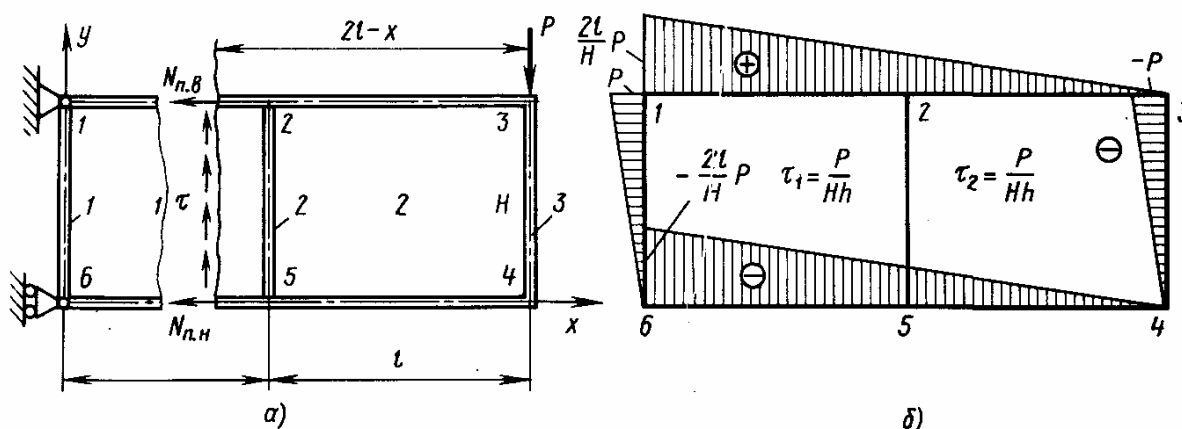


Рис. 9.23. Распределение усилий и напряжений (б) в элементах тонкостенной балки (а)

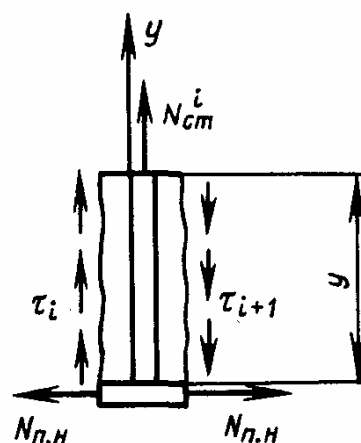


Рис. 9.22. К определению усилия в стойке

Для определения усилия в стойке рассмотрим рис. 9.22, из которого следует, что

$$N'_{ст} = h(\tau_{i+1} - \tau_i)y, \quad (9.70)$$

где τ_i и τ_{i+1} — касательные напряжения в смежных панелях. Для крайней левой стойки (см.

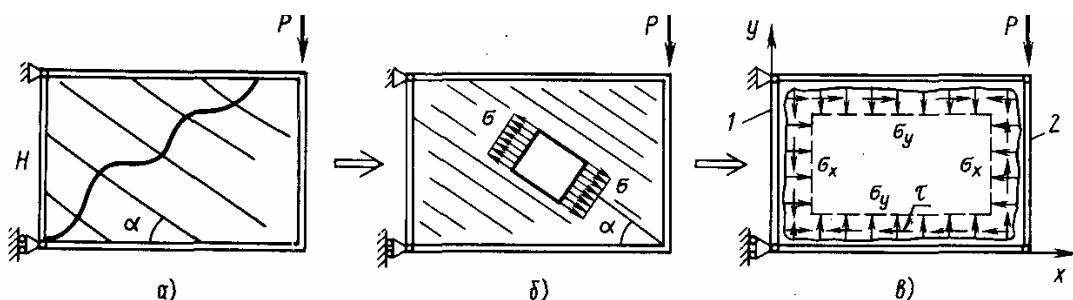


Рис. 9.24. Замена потерявшей устойчивость стенки (а) диагональным полем растягивающих напряжений (б) и системой самоуравновешенных нормальных напряжений σ_x и σ_y (в)

Из изложенного выше следует, что стенка каждой панели находится в состоянии чистого сдвига и, следовательно, когда касательные напряжения τ достигают критического значения, определяемого формулой (9.55), теряется устойчивость с образованием системы косых волн, показанных на рис. 9.13. В формуле (9.55) $a \geq b$, т. е. при $l \geq H$ $a = l$ и $b = H$, а при $l < H$, $a = H$ и $b = l$.

Для тонких стенок $\tau_{кр}$ оказывается довольно малой величиной и при дальнейшем возрастании нагрузки балка работает со стенкой, потерявшей устойчивость. Строгий анализ поведения конструкции при этом требует решения исключительно сложной нелинейной задачи о закритической деформации пластины при сдвиге, однако приближенное решение может быть построено на основании гипотезы о существовании в стенке после потери устойчивости «диагонального» поля растягивающих напряжений. Очевидно, что после образования системы косых волн (рис. 9.24, а) стенка в основном воспринимает нагрузку за счет растягивающих напряжений, параллельных гребням волн. В связи с этим будем считать, что стенка находится в состоянии одноосного растяжения под углом α по отношению к поясам (см. рис. 9.24, б). Эти напряжения, в свою очередь, можно привести к самоуравновешенной системе, напряжений σ_x , σ_y , показанной на рис. 9.24, в. Для того чтобы это сделать, выделим из стенки два элемента, показанных на рис. 9.25, и рассмотрим их равновесие. Проектируя силы, действующие на элемент 1, на оси x и y и учитывая, что напряжения σ распределены по площадке со стороны $dx \sin \alpha$, получим

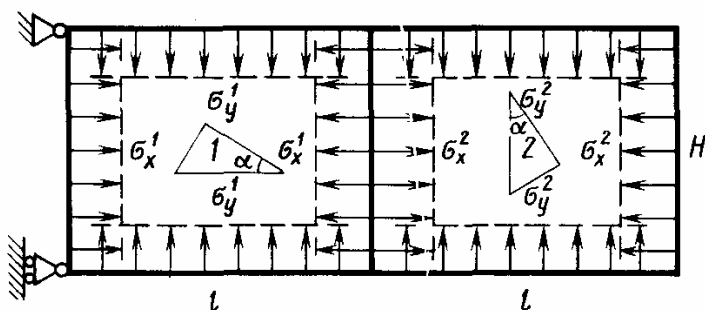


Рис. 9.25. Самоуравновешенная система напряжений, догружающая пояса и стойки после потери устойчивости стенки

$$\sigma \cos \alpha dx \sin \alpha -$$

$$- \tau dx = 0,$$

$$\sigma \sin \alpha dx \sin \alpha -$$

$$- \sigma_y dx = 0.$$

Аналогично для элемента 2

$$\sigma \cos \alpha dy \cos \alpha - \sigma_x dy = 0,$$

$$\sigma \sin \alpha dy \cos \alpha - \tau dy = 0.$$

Первое и последнее равенства одинаковые, поэтому в итоге имеем три соотношения

$$\tau = \sigma \sin \alpha \cos \alpha, \quad \sigma_x = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \sigma_y = \sigma \sin^2 \alpha.$$

Выражая из первого равенства σ и подставляя во второе и третье, будем иметь

$$\sigma = \frac{2\tau}{\sin^2 \alpha}, \quad \sigma_x = \tau \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_y = \tau \operatorname{tg} \alpha.$$

Из рис. 9.24, в следует, что, рассматривая равновесие отсеченной части балки и проектируя все силы на ось y , получим для τ прежнюю формулу (9.68). Таким образом, окончательно имеем

$$\sigma = \frac{2Q}{hH \sin^2 \alpha}, \quad \sigma_x = \frac{Q}{hH} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_y = \frac{Q}{hH} \operatorname{tg} \alpha. \quad (9.71)$$

Рассмотрим определение угла α . Из рис. 9.24, в следует, что в результате потери устойчивости стенки напряжения σ_x и σ_y догружают пояса и стойки, уже имеющие усилия (9.69) и (9.70), вызванные внешней нагрузкой, дополнительными сжимающими силами. Поскольку эти напряжения равномерно распределены по длине и ширине панели, будем иметь $\Delta N_{п.в} = \Delta N_{п.н} = 0,5\sigma_x hH$ и $\Delta N_{ст}^1 = \Delta N_{ст}^2 = 0,5\sigma_y hl$. Таким образом, с учетом равенств (9.69), (9.70) и (9.71) для балки, показанной на рис. 9.24, в, будем иметь $M = P(l - x)$ и $\tau = P/Hh$

$$\begin{aligned} N_{п.в} &= \frac{P}{H}(l - x) - \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha, \\ N_{п.н} &= -\frac{P}{H}(l - x) - \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha, \\ N_{ст}^1 &= P \frac{y}{H} - \frac{l}{2h} \operatorname{tg} \alpha, \\ N_{ст}^2 &= -P \frac{y}{H} - \frac{l}{2h} \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (9.72)$$

Напряженное состояние стенки, поясов и стоек, определяемое первым равенством (9.71) и соотношениями (9.72), при произвольном α удовлетворяет всем уравнениям равновесия (откуда и были найдены напряжения и усилия), т. е. является статически возможным. Как следует из принципа наименьшей работы, сформулированного в разд. 1.4.3, истинное напряженное состояние можно выделить из всех статически возможных, записав условие минимума дополнительной потенциальной энергии системы $\bar{U}$.

В рассматриваемом случае $\bar{U}$ складывается из энергии обшивки, поясов и стоек, т. е.

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \bar{U}_0 + \bar{U}_{п. в} + \bar{U}_{п. н} + \bar{U}_{ст}^1 + \bar{U}_{ст}^2 = \\ &= \frac{\sigma^2}{2E_0} hHl + \int_0^l \frac{N_{п. в}^2}{2E_{п}F_{п}} dx + \int_0^l \frac{N_{п. н}^2}{2E_{п}F_{п}} dx + \\ &\quad + \int_0^H \frac{(N_{ст}^1)^2}{2E_{ст}F_{ст}} dy + \int_0^H \frac{(N_{ст}^2)^2}{2E_{ст}F_{ст}} dy.\end{aligned}\quad (9.73)$$

Здесь $E_0, E_{п}, E_{ст}$ — модули упругости материала обшивки, поясов и стоек; $F_{п}, F_{ст}$ — площади сечения поясов и стоек.

Подставляя в (9.73) σ из первой формулы (9.71) и усилия согласно (9.72), после интегрирования получим

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \frac{P^2 l}{2Hh} \left(\frac{1}{E_0 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} + \frac{2l^2 h}{3HF_{п}E_{п}} + \frac{hH \operatorname{ctg}^2 \alpha}{2E_{п}F_{п}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{lh \operatorname{tg}^2 \alpha}{2F_{ст}E_{ст}} + \frac{2H^2 h}{3lF_{ст}E_{ст}} \right).\end{aligned}$$

Условие минимума $\bar{U}$ имеет вид $\partial \bar{U} / \partial \alpha = 0$. Окончательно после некоторых преобразований из этого условия получим

$$\operatorname{tg}^4 \alpha = (1 + \beta_{п}) / (1 + \beta_{ст}), \quad (9.74)$$

где $\beta_{п} = HhE_0 / 2E_{п}F_{п}$; $\beta_{ст} = lhE_0 / 2E_{ст}F_{ст}$. Формула (9.74), введенная для балки с одной стенкой, приближенно считается справедливой и в общем случае, т. е. используется для определения угла наклона волн в отдельных панелях тонкостенной балки.

Таким образом, усилия в поясах и стойках могут быть найдены с помощью равенств (9.69), (9.70), определяющих составляющие усилий, образовавшиеся до потери устойчивости стенки, и равенств (9.71), (9.63), определяющих дополнительные сжимающие составляющие, образовавшиеся в результате потери устойчивости стенки.

В качестве примера рассмотрим балку, показанную на рис. 9.23. Пусть сила P такова, что обе панели потеряли устойчивость. Предположим для простоты, что параметры балки таковы, что в формуле (9.74) $\beta_{п} = \beta_{ст}$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = 1$, т. е. $\alpha = 45^\circ$. Поскольку для обеих панелей $Q = P$, из равенств (9.72) получим $\sigma_x^1 = \sigma_y^1 = P/hH$, $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = P/hH$. В принципе для определения усилий, образовавшихся в результате нагружения по схеме, показанной на рис. 9.25, необходимо рассмотреть систему поясов и стоек как раму. Однако, учитывая приближенный характер полученных выше соотношений, нагрузку обычно распределяют равномерно. Для поясов панели 2 будем иметь $\Delta N_{п. в} = \Delta N_{п. н} = -\sigma_x^2 Hh/2$; для поясов панели 1 — $\Delta N_{п. в} =$

$= \Delta N_{п.к} = -\sigma_x^1 H h / 2$; для левой стойки $\Delta N_{ст}^1 = -\sigma_y^1 l h / 2$; для средней стойки $\Delta N_{ст}^2 = -(\sigma_y^1 + \sigma_y^2) l h / 2$; для правой стойки $\Delta N_{ст}^3 = -\sigma_y^2 l h / 2$. Окончательно будем иметь

$$N_{п.в} = P \left(\frac{2l-x}{H} - \frac{1}{2} \right),$$

$$N_{п.к} = -P \left(\frac{2l-x}{H} + \frac{1}{2} \right),$$

$$N_{ст}^1 = \frac{P}{H} \left(y - \frac{l}{2} \right), \quad N_{ст}^2 = -\frac{Pl}{H}, \quad N_{ст}^3 = -\frac{P}{H} \left(y + \frac{l}{2} \right).$$

Распределение усилий для балки с квадратными панелями ($l = H$) показано на рис. 9.26.

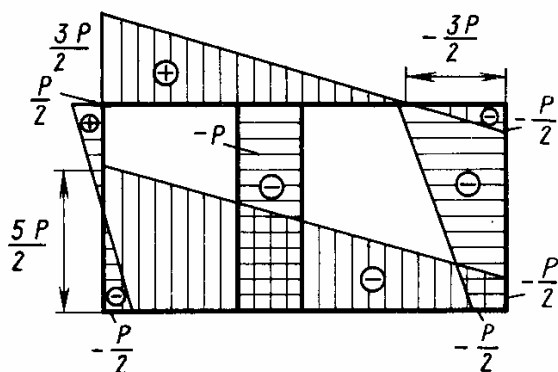


Рис. 9.26. Суммарные усилия в поясах и стойках

9.5. УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК

9.5.1. Уравнения устойчивости и постановка задачи

Гладкие и подкрепленные оболочки широко распространены в конструкциях летательных аппаратов. Так, например, несущие балки космического летательного аппарата представляют собой цилиндрическую оболочку постоянной или переменной толщины. Головные части летательных аппаратов выполняются в виде конической или оживальной оболочки. Проектируемые для погружения в плотную атмосферу Венеры летательные аппараты имеют форму сферической оболочки. При воздействии нагрузок, вызывающих сжимающие напряжения, оболочка может потерять устойчивость, при этом нарушается ее первоначальная форма и значительно снижается способность воспринимать нагрузку. Наиболее распространенными на практике случаями нагружения оболочек, приводящими к потере устойчивости, являются воздействия осевой сжимающей силы на цилиндрические и конические оболочки, внешнего давления на цилиндрические, конические и сферические оболочки.

Поведение оболочек при потере устойчивости существенно отличается от поведения стержней и пластинок. После достижения критической нагрузки деформация оболочки в закритической стадии возрастает, а нагрузка падает. В аналогичных же состояниях для стержней и пластин с увеличением деформации нагрузки непрерывно возрастает. В качестве иллюстрации на рис. 9.27 представлена примерная зависимость прогиба сферической оболочки от величины внешнего давления. До давления $P_{кр}$ оболочка равномерно обжимается, сохраняя свою форму, прогиб линейно возрастает и может быть определен по безмоментной теории оболочек

вращения, изложенной в разд. 4.3. После достижения критического давления сферическая форма нарушается и воспринимаемая оболочкой нагрузка падает. Полное описание поведения оболочки требует привлечения сложных нелинейных уравнений, учитывающих изменение ее формы в процессе нагружения. Однако для определения собственно критической нагрузки этого не требуется — достаточно воспользоваться статическим критерием и линеаризованными уравнениями устойчивости, т. е. реализовать для оболочки схему расчета, изложенную в разд. 9.1.2.

Согласно этой схеме необходимо прежде всего определить докритическое напряженное состояние оболочки. Наиболее распространенный подход к задачам устойчивости основан на предположении о безмоментном характере докритического состояния оболочки. Как было показано, в разд. 4.3.2 для получения уравнений, описывающих безмоментное состояние, изгибную жесткость оболочки D следует принять равной нулю, тогда в соответствии с равенствами (4.16) исчезают моменты и сохраняются только усилия N_α , N_β , $N_{\alpha\beta}$, связанные тремя уравнениями равновесия (4.17). Полагая в них для докритического состояния в соответствии с рис. 9.28 $N_\alpha = -N_\alpha^0$, $N_\beta = -N_\beta^0$, $N_{\alpha\beta} = -N_{\alpha\beta}^0$, $q_\alpha = q_\beta = 0$, $q_\gamma = -q$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial (BN_\alpha^0)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (AN_{\alpha\beta}^0)}{\partial \beta} - N_\beta^0 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + N_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial A}{\partial \beta} &= 0, \\ \frac{\partial (AN_\beta^0)}{\partial \beta} + \frac{\partial (BN_{\alpha\beta}^0)}{\partial \alpha} - N_\alpha^0 \frac{\partial A}{\partial \beta} + N_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial B}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{N_\alpha^0}{R_1} + \frac{N_\beta^0}{R_2} &= q. \end{aligned} \quad (9.75)$$

Здесь A , B и R_1 , R_2 — коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки (см. разд. 4.1.1).

Предположим, что решение уравнений (9.75), определяющее докритические усилия, известно. Тогда для реализации статического критерия устойчивости оболочки необходимо придать некоторое малое возмущение, характеризующееся дополнительными пере-

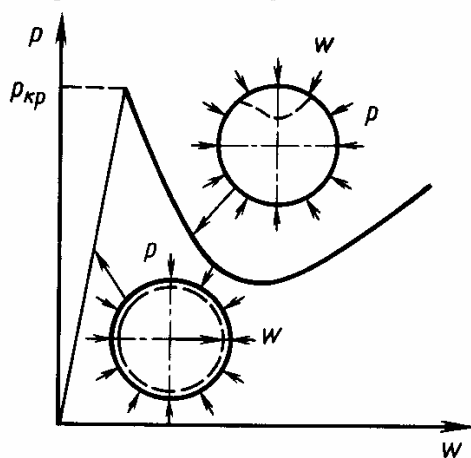


Рис. 9.27. Характер зависимости прогиба сферической оболочки от величины внешнего давления

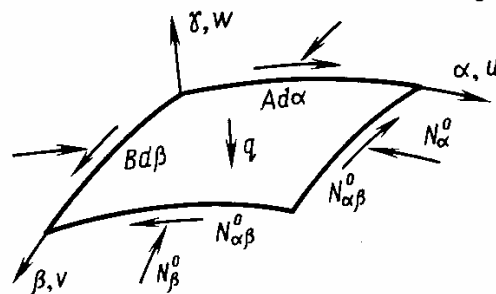


Рис. 9.28. Докритические усилия в оболочке

мещениями $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ (см. рис. 9.28). Эти перемещения вызовут дополнительные деформации срединной поверхности (4.12)

$$\begin{aligned}\epsilon_\alpha &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_1}, \\ \epsilon_\beta &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_2},\end{aligned}\quad (9.76)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha},$$

углы поворота нормали (4.10)

$$\vartheta_\alpha = \frac{u}{R_1} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \vartheta_\beta = \frac{v}{R_2} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (9.77)$$

и изменения кривизн и кручение срединной поверхности (4.13)

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta_\beta, \quad \kappa_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \vartheta_\alpha, \quad (9.78)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\vartheta_\alpha}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\vartheta_\beta}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}.$$

В соответствии с физическими соотношениями (4.16) возникнут дополнительные усилия и моменты, показанные на рис. 4.3, т. е.

$$\begin{aligned}N_\alpha &= B(\epsilon_\alpha + \mu \epsilon_\beta), \quad N_\beta = B(\epsilon_\beta + \mu \epsilon_\alpha), \quad N_{\alpha\beta} = 0,5B(1 - \mu) \gamma_{\alpha\beta}, \\ M_\alpha &= D(\kappa_\alpha + \mu \kappa_\beta), \quad M_\beta = D(\kappa_\beta + \mu \kappa_\alpha) \\ \mu_{\alpha\beta} &= 0,5D(1 - \mu) \kappa_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (9.79)$$

Здесь $B = Eh/(1 - \mu^2)$ и $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ — мембранная и изгибная жесткость оболочки.

В соответствии со статическим критерием устойчивости далее необходимо записать уравнения равновесия оболочки в возмущенном состоянии. Как было показано в разд. 9.2.1 и 9.3.1 на примерах стержня и пластины, для записи этих уравнений можно воспользоваться обычными уравнениями равновесия, если заменить в них поперечную нагрузку условной нагрузкой (9.11) и (9.38), статически эквивалентной действию докритических усилий в возмущенном состоянии. По аналогии с равенством (9.38) для оболочки будем иметь

$$\bar{q} = N_\alpha^0 \kappa_\alpha + N_{\alpha\beta}^0 \kappa_{\alpha\beta} + N_\beta^0 \kappa_\beta, \quad (9.80)$$

где κ_α , κ_β и $\kappa_{\alpha\beta}$ определяются соотношениями (9.78). Принимая теперь в уравнениях равновесия для оболочки (4.17), (4.18)

$q_\alpha = q_\beta = 0$, $q_\gamma = \bar{q}$ и учитывая (9.80), получим линеаризованные уравнения устойчивости

$$\begin{aligned} \frac{\partial (BN_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (AN_{\alpha\beta})}{\partial \beta} - N_\beta \frac{\partial B}{\partial \alpha} + N_{\alpha\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{AB}{R_1} Q_\alpha &= 0, \\ \frac{\partial (AN_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial (BN_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - N_\alpha \frac{\partial A}{\partial \beta} + N_{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{AB}{R_2} Q_\beta &= 0, \\ \frac{\partial (BQ_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (AQ_\beta)}{\partial \beta} - N_\alpha \frac{AB}{R_1} - N_\beta \frac{AB}{R_2} + \\ + AB (N_\alpha^0 \kappa_\alpha + N_{\alpha\beta}^0 \kappa_{\alpha\beta} + N_\beta^0 \kappa_\beta) &= 0, \\ \frac{\partial (BM_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (AM_{\alpha\beta})}{\partial \beta} - M_\beta \frac{\partial B}{\partial \alpha} + M_{\alpha\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} - ABQ_\alpha &= 0, \\ \frac{\partial (AM_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial (BM_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - M_\alpha \frac{\partial A}{\partial \beta} + M_{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - ABQ_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (9.81)$$

Таким образом, задача устойчивости оболочки сводится к уравнениям (9.76)—(9.79), (9.81). Методом, описанным в разд. 4.1.3, эту систему можно свести к трем уравнениям типа (4.20) относительно трех перемещений. При $q_\alpha = q_\beta = 0$ и $q_\gamma = \bar{q}$ они будут однородными относительно перемещений. Согласно статическому критерию устойчивости необходимо в общем случае найти такую критическую комбинацию усилий N_α^0 , N_β^0 , $N_{\alpha\beta}^0$, при которой эти уравнения имеют ненулевое решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям. Типы граничных условий для оболочек были описаны в разд. 4.1.4. Решение задачи устойчивости для оболочки общей формы связано с большими трудностями, поэтому в дальнейшем будут рассмотрены типовые случаи нагружения наиболее распространенных цилиндрических оболочек. Широкий класс задач устойчивости описан в книге [12].

9.5.2. Уравнения устойчивости для цилиндрической оболочки

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, показанную на рис. 4.24. Вводя вместо α и β осевую координату x и кольцевую координату y , в соответствии с разд. 4.6.3 будем иметь $A = B = 1$, $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R$. В задачах устойчивости широкое применение получила упрощенная техническая теория цилиндрических оболочек, описанная в разд. 4.6.3. Эта теория отличается от общей тем, что в первом уравнении равновесия (9.81) отбрасывается последний член, а в формулах для углов поворота (9.77) сохраняются только члены, содержащие прогиб. В результате, как было показано в разд. 4.6.3, уравнения технической теории совпадают с уравнениями теории пологих оболочек (4.113)—(4.119), в которых в рассматриваемом случае следует

принять $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R$, $q_x = q_y = 0$, $p = \bar{q}$, где в соответствии с формулами (4.118), (4.119) и (9.80)

$$\bar{q} = - \left(N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (9.82)$$

Заметим, что это выражение совпадает с соответствующим равенством для пластин (9.38).

В разд. 4.6.2 уравнения теории пологих оболочек были сведены к одному уравнению (4.127), которое после подстановки $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R$ и $p = \bar{q}$ с учетом (9.82) и является линейризованным уравнением устойчивости для цилиндрической оболочки

$$D \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nabla^2 \nabla^2 \left(N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (9.83)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Очевидно, это уравнение является следствием системы (6.39) в работе [1].

Докритические усилия определяются уравнениями (9.75), которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\frac{\partial N_x^0}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y^0}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial x} = 0, \quad N_y^0 = qR. \quad (9.84)$$

9.5.3. Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Рассмотрим условия нагружения, показанные на рис. 9.29. Очевидно, решение уравнений (9.85), т. е. докритическое поле усилий имеет вид

$$N_x^0 = N, \quad N_y^0 = N_{xy}^0 = 0. \quad (9.85)$$

Тогда уравнение устойчивости (9.83) можно записать в форме

$$D \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \nabla^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (9.86)$$

Необходимо найти минимальное значение $N = N_{кр}$, при котором уравнение (9.86) имеет ненулевое решение $w(x, y)$, удовлетворяющее соответствующим граничным условиям.

Рассмотрим сначала осесимметричную форму потери устойчивости, т. е. предположим, что прогиб w не зависит от переменной y , а возмущенная форма оболочки соответствует

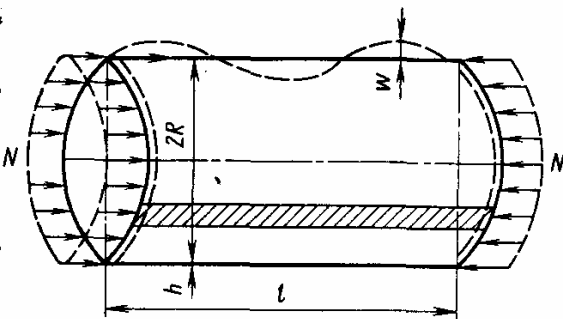


Рис. 9.29. Цилиндрическая оболочка, нагруженная осевыми сжимающими усилиями N

пунктирной линии на рис. 9.29. При $w = w(x)$ уравнение (9.86) примет вид

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^3} \frac{d^4 w}{dx^4} + N \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (9.87)$$

Предположим, что края оболочки $x = 0$ и $x = l$ шарнирно оперты, т. е.

$$\begin{aligned} x = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \\ x = l, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (9.88)$$

Решение уравнения (9.87), удовлетворяющее условиям (9.88), будем искать в форме ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (9.89)$$

где m — число полуволн изогнутой поверхности вдоль образующей оболочки. Подставляя выражение (9.89) в уравнение (9.87), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \left[D \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \frac{Eh}{R^3} - N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{l} = 0.$$

Очевидно, это равенство будет выполняться в тривиальном случае, когда $A_m = 0$, т. е. $w = 0$, что соответствует исходной форме равновесия оболочки. При $A_m \neq 0$ равенство выполняется только при условии обращения сомножителя в квадратных скобках в нуль. Из этого условия получим

$$N = D \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{Eh}{R^3} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2}. \quad (9.90)$$

Для различных целых чисел m получим соответствующие собственные значения интенсивности осевой нагрузки N . Минимальное из этих значений определяет критическое усилие $N_{кр}$. Если оболочку считать достаточно длинной, а число полуволн большим числом, то величину $(m\pi/l)^2 = \eta$ (вообще говоря, дискретную) можно полагать непрерывно меняющейся. Тогда необходимое условие минимума функции (9.90) $\partial N / \partial \eta = 0$ приводит к следующему критическому числу полуволн:

$$m_{кр} = \sqrt[4]{12(1-\mu^2)} \frac{l}{\pi R} \sqrt{\frac{R}{h}},$$

а само критическое усилие согласно (9.90) имеет вид

$$N_{кр} = 2 \frac{\sqrt{EhD}}{R} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{Eh^3}{R}. \quad (9.91)$$

Критические осевые напряжения будут

$$\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{h} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{Eh}{R}.$$

Эта формула была выведена Лоренцем и Тимошенко. Для большинства металлов коэффициент Пуассона μ равен 0,3. Тогда выражение для критических напряжений принимает более простой вид

$$\sigma_{кр} = 0,6 \frac{Eh}{R} \quad (9.92)$$

и показывает, что отношение критических напряжений сжатия к модулю упругости материала одного порядка с отношением толщины оболочки к ее радиусу.

Формула (9.92) получена в предположении, что форма потери устойчивости является осесимметричной. Неосесимметричную форму потери устойчивости оболочки удастся аналитически исследовать только при единственной совокупности граничных условий на торцах $x = 0$ и $x = l$, соответствующих условиям свободного опирания (4.24), т. е.

$$w = 0, \quad M_x = 0, \quad v = 0, \quad N_x = 0. \quad (9.93)$$

Физически эти условия обозначают шарнирное крепление в отношении прогиба, защемление в отношении тангенциального перемещения и свободный край по отношению к осевым усилиям. Отметим, что последнее условие (9.93) не противоречит схеме нагружения, показанной на рис. 9.29. Усилие N_x в (9.93) является дополнительным усилием, образующимся в результате потери устойчивости, а внешнее усилие уравнивается докритическим усилием (9.85). Как было показано в разд. 4.62 [см. равенства (4.129), (4.133)], условиям свободного опирания удовлетворяет разложение типа (9.89). Учитывая, что прогиб должен быть еще и периодической функцией полярного угла $\beta = y/R$, представим его в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n \frac{y}{R}. \quad (9.94)$$

Подставляя (9.94) в уравнение (9.86) и повторяя рассуждения, которые привели к соотношению (9.90), получим следующее, аналогичное ему равенство:

$$\bar{N} = \frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{(1+\vartheta^2)^2}{\vartheta^2} \eta + \frac{\vartheta^2}{(1+\vartheta^2)^2} \eta, \quad (9.95)$$

где $N = \frac{NR}{Eh^2}$, $\vartheta = \frac{m\pi R}{nl}$, $\eta = \frac{n^2 h}{R}$.

Условие минимума приведенной нагрузки $\bar{N}$ при условии непрерывности переменной

$$\rho = \frac{(1 + \vartheta^2)^2}{\vartheta^2} \eta$$

дает значение критического напряжения, которое определяется равенством (9.92), т. е. анализ неосесимметричной формы потери устойчивости приводит к результату, который соответствует осесимметричной форме. Критическая величина параметра ρ позволяет установить соотношение между числом осевых и кольцевых полуволн изогнутой поверхности оболочки. Отказ от допущения о непрерывности переменной ρ в формуле для критических нагрузок (9.95) и учет дискретности параметров m и n позволяет обосновать приемлемость формулы (9.92) для широкого класса оболочек средней длины [12], таких что

$$1,38 \sqrt{\frac{h}{R}} < \frac{l}{R} < 0,57 \sqrt{\frac{R}{h}}.$$

Экспериментальные исследования, выполненные зарубежными и советскими учеными, не подтвердили результатов, следующих из решения (9.92). Критические напряжения оказываются значительно ниже теоретических, причем, чем меньше относительная толщина оболочки, тем различие больше. Ниже приведены ориентировочные экспериментальные значения коэффициента устойчивости k в формуле $\sigma_{кр} = kEh/R$ [14]:

R/h	250	500	750	1000	1500
k	0,18	0,14	0,12	0,10	0,09

Отмеченное различие между теоретическим и экспериментальными результатами в настоящее время связывают в основном с наличием в оболочке начальных несовершенств ее цилиндрической формы.

Определенное влияние на величину критических напряжений оказывают и краевые условия, которые в действительности могут отличаться от теоретических условий свободного опирания. Исследования устойчивости оболочки при граничных условиях, отличных от (9.93), проводятся по следующему алгоритму. Решение разрешающего уравнения (9.86) отыскивается в виде суммы

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \frac{y}{R} \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{r_i x}. \quad (9.96)$$

Здесь n — количество волн в окружном направлении; r_i — один из восьми корней характеристического уравнения, которое получается при подстановке в дифференциальное уравнение (9.86) функции

$$w_{in} = A_i e^{r_i x} \sin n \frac{y}{R}.$$

В целях удовлетворения восьми граничных условий (по четыре на каждом торце) выражение (9.96) подставляется в однородные краевые условия. В результате получается однородная линейная относительно коэффициентов A_i система алгебраических уравнений. Равенство нулю определителя этой системы дает уравнение относительно критической нагрузки. В этом алгоритме для определения корней уравнения восьмого порядка и для раскрытия определителя восьмого порядка используется ЭВМ.

Расчеты показывают, что граничные условия типа

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = N_x = N_{xy} = 0$$

или

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = u = N_{xy} = 0$$

для не очень коротких оболочек снижают величину критических напряжений примерно вдвое. Конечно, эти граничные условия так же, как и условия свободного опирания, в конструкции летательного аппарата в чистом виде не реализуются, но упругости закрепления краев оболочки безусловно проявляется в сторону снижения критической нагрузки по сравнению с классическим решением. Дальнейшие уточнения величины критической нагрузки осуществляются путем учета моментности начального напряженного состояния реальной оболочки, эксцентриситета приложения внешней нагрузки, начального изгиба и т. п.

9.5.4. Устойчивость цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении

Перейдем к задаче устойчивости цилиндрической оболочки под действием наружного равномерно распределенного по боковой поверхности давления (рис. 9.30). Уравнения (9.84) при $q = \text{const}$ дают

$$N_x^0 = 0, N_{xy}^0 = 0, N_y^0 = qR. \quad (9.97)$$

Уравнение устойчивости (9.83) принимает вид

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + qR\nabla^2\nabla^2 w \times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (9.98)$$

В случае шарнирного опирания краев $x = 0$ и $x = l$ граничные условия (9.88), как и ранее, автоматически удовлетворяются, если задать прогиб в форме ряда (9.94). Подставляя (9.94) в уравнение (9.98), после уже неоднократно повторявшихся рас-

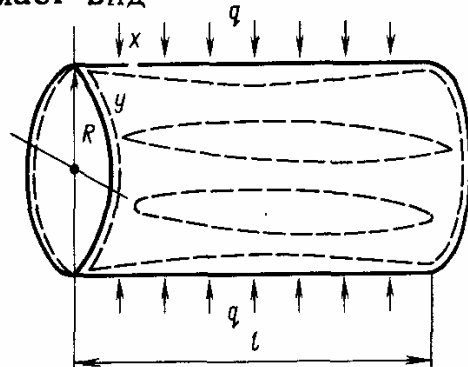


Рис. 9.30. Цилиндрическая оболочка, нагруженная равномерным боковым давлением

суждений получим следующее равенство, являющееся аналогом (9.95):

$$q = \frac{DR \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]}{n^3} + \frac{Eh \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4}{n^3 \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2}.$$

Собственные значения наружного давления q зависят от числа полуволи n в окружном направлении и m в направлении образующей. Из множества чисел m при $m = 1$ величина q будет наименьшей. Следовательно, прогиб оболочки по образующей будет осуществляться по одной полуволе (см. рис. 9.30) и формула для наружного давления примет более простой вид

$$q = \frac{Dn^3}{R^3} \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\pi R}{l} \right)^2 \right] \frac{Eh}{R} \frac{\left(\frac{\pi R}{l} \right)^4}{n^6 \left[1 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\pi R}{l} \right)^2 \right]^2}. \quad (9.99)$$

Отыскивая минимум функции $q = q(n, n/R, R/l)$ по n для различных параметров h/R и R/l , можно получить критическое давление и соответствующую ему форму потери устойчивости.

Для оболочки средней длины, такой что

$$0,3 \sqrt{\frac{R}{h}} > \frac{l}{R} > \sqrt{\frac{h}{R}},$$

можно принять, что число полуволи в окружном направлении n велико и получить приближенный аналитический результат. Полагая, что $n^2 \gg (\pi R/l)$, можно упростить равенство (9.99) следующим образом:

$$q = \frac{D}{R^3} n^3 + \frac{Eh}{R} \frac{\left(\frac{\pi R}{l} \right)^4}{n^6}.$$

Минимум этой функции имеет место при

$$n_{кр}^2 = \sqrt[4]{36(1-\mu^2)} \frac{\pi R}{l} \sqrt{\frac{R}{h}}$$

и равен

$$q_{кр} = 0,856 \frac{E}{(1-\mu^2)} \frac{R}{l} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}.$$

Последнюю формулу обычно называют формулой Саутуэлла — Папковича. Она подтверждается экспериментальными результатами значительно лучше, чем формула (9.92) для осевого сжатия (экспериментальные значения получаются в среднем на 70—75 % меньше теоретических). Уточнение $q_{кр}$ осуществляется в результате учета факторов, перечисленных в разд. 9.5.3.

9.5.5. Устойчивость сферической оболочки при внешнем давлении

Потеря устойчивости сферической оболочки под действием внешнего давления, равномерно распределенного по поверхности, начинается с появления небольшой локальной вмятины или возникновения серии вмятин и выпуклостей по поверхности сферы. Будем рассматривать идеальную сферическую оболочку, нагруженную нормальными к поверхности статическими усилиями, для которой толщина h и радиус срединной поверхности R совершенно не меняются, а материал оболочки абсолютно однороден и предел его пропорциональности значительно выше ожидаемых критических напряжений.

Для определения критических напряжений в сфере (критического внешнего давления) воспользуемся статическим критерием устойчивости и составим линеаризованное уравнение устойчивости.

Согласно уравнениям (9.75) докритическое устойчивое равновесное состояние рассматриваемой оболочки описывается усилиями

$$N_{\alpha}^0 = N_{\beta}^0 = N^0 = qR/2, \quad N_{\alpha\beta}^0 = 0, \quad (9.100)$$

соответствующими нормальным напряжениям

$$\sigma = qR/2h. \quad (9.101)$$

В силу локального возникновения вмятины на поверхности сферы в момент потери устойчивости смежное изгибное равновесное состояние оболочки можно описать уравнениями теории пологих оболочек. Согласно этой теории криволинейные координаты α, β срединной поверхности идентифицируются с декартовыми координатами x, y на плоскости.

Для случая сферической оболочки в уравнениях (4.125), (4.126), следует принять $R_1 = R_2 = R$, $p = -\bar{q}$. Тогда эти уравнения сводятся к одному

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2w + \frac{Eh}{R^2}\nabla^2w + \nabla^2\bar{q} = 0. \quad (9.102)$$

Здесь под символом ∇^2 понимается оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Условная нагрузка (9.80) для докритических усилий (9.100), соответствующих напряжениям (9.101), и для кривизн пологой оболочки (4.118), (4.119) запишется в виде

$$\bar{q} = qR^2\nabla^2w/2 = \sigma h\nabla^2w.$$

Тогда уравнение устойчивости (9.102) будет таким:

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2w + \sigma h\nabla^2\nabla^2w + \frac{Eh}{R^2}\nabla^2w = 0. \quad (9.103)$$

Одна из возможных форм потери устойчивости сферы — осесимметричная. Представление о такой форме может дать водная поверхность, когда в воду сбросили камень. При этом высота гребней расходящихся кругов уменьшается по мере удаления от места падения камня. Для описания осесимметричной формы потери устойчивости перейдем к полярной системе координат (r, φ) на пологой сферической оболочке. Оператор Лапласа в полярной системе координат для осесимметричной функции прогиба $w(r)$ имеет вид

$$\nabla^2 w = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right)$$

и в уравнении устойчивости (9.103) тогда следует понимать именно этот символ $\nabla^2 w$.

Положим [12], что форма потери устойчивости описывается функциями Бесселя $I_0(\lambda r)$ первого рода с индексом 0. Эти функции удовлетворяют уравнения

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \lambda^2 w = 0$$

или

$$\nabla^2 w + \lambda^2 w = 0.$$

Здесь λ^2 — неопределенный параметр. Тогда из уравнения (9.103) будем иметь выражение для напряжений в точке бифуркации

$$\sigma = \frac{D}{h} \lambda^4 + \frac{E}{R^2 \lambda^2}.$$

Минимум этой функции $\sigma = \sigma(\lambda^2)$ реализуется при

$$\lambda^2 = \sqrt{\frac{Eh}{DR^2}} = \sqrt{12(1-\mu^2)} \frac{1}{Rh} \quad (9.104)$$

и равен значению

$$\sigma = \sigma_{кр} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{Eh}{R} \simeq 0,6 \frac{Eh}{R}. \quad (9.105)$$

Критическое внешнее давление q , соответствующее этому напряжению согласно формуле (9.101) [14]

$$q_{кр} = \frac{2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} E \left(\frac{h}{R} \right)^2 \simeq 1,21 E \left(\frac{h}{R} \right)^2. \quad (9.106)$$

Таким образом, формула для критических напряжений сферы (9.105) совпадает с выражением (9.92) для критических напряжений цилиндрической оболочки.

Опыт показывает, что реальные сферические формы тонкостенных конструкций теряют устойчивость при напряжениях, не превышающих четверти напряжений, вычисляемых по формуле (9.105). Дело в том, что технология изготовления сферических оболочек позволяет получить конструкции лишь с определенной

степенью точности как по толщине ее, так и по радиусу сферичности. Исследованиями же установлено, что жесткость оболочки существенно уменьшается при даже малом начальном прогибе и смежное равновесное состояние возникает при внешнем давлении, более низком, чем получаемое по формуле (9.106). Наличие локальных зон пластических деформаций, возможных внешних возмущений, микронеоднородностей в материале — все это также снижает уровень критических напряжений. В практике экспериментальных исследований известен случай, когда реальные критические напряжения в сферической оболочке достигали 90 % от классического значения (9.105). Конструкция была столь совершенна, что при отношении радиуса к толщине, равном 165, максимальные отклонения по толщине составляли $3/4$ %, а изменения по сферическим — 0,01 % от радиуса.

На практике для определения расчетных критических напряжений и внешнего давления сферических тонкостенных конструкций высокого класса изготовления можно пользоваться формулами $\sigma_{расч} = k_1 E h / R$, $q_{расч} = k_2 E (h/R)^2$ и приведенной ниже таблицей [14]:

R/h	≤ 250	500	750	1000	1500
k_1	0,15	0,12	0,10	0,08	0,075
k_2	0,3	0,25	0,20	0,16	0,15

Нередко реальные конструкции летательных аппаратов не удовлетворяют перечисленным выше условиям, при которых получают формулы для критических напряжений (9.92), (9.105).

Удовлетворительные результаты по сравнению с экспериментальными данными получаются при расчете локальной потери устойчивости в виде одной или нескольких вмятин или выпуклостей. При этом учитываются условия сопряжения с невозмущенной поверхностью оболочки [1]. Решение задачи рассматривается с позиции теории пологих оболочек при различных вариантах условий сопряжений по контуру волнообразования. Наименьшее значение из получающихся критических напряжений предлагается применять при практических расчетах.

ГЛАВА 10

КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

10.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СИСТЕМ

10.1.1. Расчетная схема конструкции

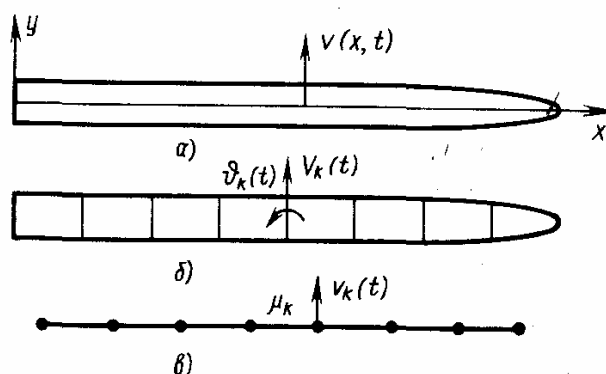
Современные летательные аппараты различных форм и назначений являются сложными динамическими системами. Силовая конструкция летательного аппарата состоит из тонкостенных элементов, является упругодеформируемой и в процессе эксплуатации может совершать колебательные движения. В динамике упругих летательных аппаратов возникает много различных проблем, связанных с определением динамических нагрузок, обеспечением устойчивости, снижением уровня вибраций и шума. Эти проблемы должны решаться при проектировании и доводке конструкции и системы автоматического управления летательного аппарата. Для этого должны быть выполнены соответствующие теоретические исследования и расчеты и проведены необходимые эксперименты на моделях или натурных объектах.

Для теоретического решения проблемы должна быть выбрана соответствующая расчетная схема, математическая модель которой адекватно описывает все характерные особенности рассматриваемого явления. В зависимости от вида конструкции и характера возбуждения в колебаниях может участвовать вся конструкция или только ее части. Например, для самолетов с легкими гибкими крыльями и массивным жестким фюзеляжем при колебаниях крыльев фюзеляж практически остается неподвижным. Аналогичная картина может наблюдаться при колебаниях других частей или элементов летательного аппарата, таких как рули, панели обшивки, тяги рулевого управления, блоки аппаратуры и пр. Такие локальные вибрации могут происходить только при существенной неоднородности жесткостей и масс, что является характерным для сложных составных тонкостенных конструкций летательных аппаратов.

При выборе расчетной схемы для конструкции в целом или для отдельных ее элементов обычно используются известные приближенные модели в виде пружин, балок, пластин, оболочек, пространственных тонкостенных систем и их комбинаций. Например, самолет с прямыми или стреловидными крыльями большого удлинения может рассматриваться как система перекрестных балок, работающих на изгиб и кручение; панель обшивки может рассматриваться как пластина или пологая оболочка, опираю-

Рис. 10.1. Расчетная схема корпуса летательного аппарата:

a — балка; b — совокупность отсеков;
 ϵ — совокупность дискретных масс



стоящая на неподвижные полки лонжеронов и нервюры (шпангоуты).

В качестве примера построения расчетной схемы рассмотрим тонкостенную конструкцию типа корпуса летательного аппарата (рис. 10.1, a). Для анализа поперечных колебаний расчетная схема может быть выбрана в виде балки, удовлетворяющей гипотезе плоских сечений без учета сдвигов, поперечное перемещение оси которой характеризуется функцией $v(x, t)$. При распределенной массе балки $m(x)$ поперечные колебания описываются дифференциальным уравнением в частных производных и система имеет бесконечное число степеней свободы. Может быть построена более простая дискретная модель, обладающая конечным числом степеней свободы. Для этого балка разбивается поперечными сечениями на конечное число отсеков, а в качестве неизвестных рассматриваются поперечные перемещения $v_k(t)$ и углы поворота $\vartheta_k(t)$ в сечениях, разделяющих отсеки (см. рис. 10.1, b). Через них выражается перемещение $v(x, t)$ в других точках отсеков, причем для упрощения вычислений часто считается, что жесткость и масса не изменяются по длине отсека. И, наконец балка может быть заменена системой упругосвязанных сосредоточенных масс μ_k , при этом в качестве неизвестных рассматриваются поперечные перемещения этих масс $v_k(t)$ (см. рис. 10.1, c). Более точная расчетная схема рассматриваемой конструкции получается при учете сдвигов, инерции вращения и относительных движений наполнителя, а также деформаций сечений и местных податливостей в районе вырезов и сочленений. Такие уточнения необходимы, например, если предполагается рассчитывать колебания по более высоким формам (сильно меняющимся вдоль длины) или колебания, вызванные ударными воздействиями.

Таким образом, расчетная схема представляет собой некоторую упрощенную модель конструкции, справедливую в определенных пределах и ориентированную на решение определенного класса задач.

Далее будут рассматриваться только малые колебания, причем считается, что система является физически и геометрически линейной. Связи, наложенные на систему, считаются стационарными и идеальными.

10.1.2. Принцип Даламбера—Лагранжа

Уравнения колебаний систем с сосредоточенными или распределенными параметрами можно составить исходя из об-

шего принципа Даламбера — Лагранжа, который является обобщением на задачи динамики вариационного принципа Лагранжа (см. разд. 1.3, гл. 1). Согласно равенству (1.28) для статической задачи должно выполняться условие $\delta U - \delta A = 0$. Применительно к задаче динамики идеальной упругой системы, у которой не происходит рассеяния энергии, учитывая согласно принципу Даламбера силы инерции, будем иметь

$$\delta U - \delta A_p - \delta A_i = 0. \quad (10.1)$$

Здесь δU — вариация потенциальной энергии системы; δA_p и δA_i — вариации работы внешних и инерционных сил. Отметим, что вариации энергии и работы вычисляются на любых возможных перемещениях, т. е. таких, которые не нарушают сплошности тела и наложенных на систему геометрических связей. При этом вариации перемещений считаются бесконечно малыми, чтобы в пределах их изменения инерционные силы и внешние силы (если последние зависят от перемещений или их производных) можно было считать постоянными при вычислении их работы.

Для системы с распределенной массой плотности ρ , находящейся под действием поверхностной нагрузки с вектором $\mathbf{p}$, вариации работы внешних и инерционных сил равны

$$\delta A_p = \iint_S \mathbf{p} \delta \mathbf{u} dS, \quad \delta A_i = - \iiint_V \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dV, \quad (10.2)$$

где V и S — объем и поверхность тела; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений точки тела. Для системы сосредоточенных масс μ_k , где $k = 1, 2, \dots$, имеем

$$\delta A_p = \sum_k \mathbf{P}_k \delta \mathbf{u}_k, \quad \delta A_i = - \sum_k \mu_k \ddot{\mathbf{u}}_k \delta \mathbf{u}_k. \quad (10.3)$$

Здесь $\mathbf{P}_k$ и $\mathbf{u}_k$ — векторы внешних сил и перемещений, отсчитываемых от положения равновесия.

Уравнение в вариациях (10.1) рассматривается совместно с уравнениями геометрических связей (уравнения неразрывности, геометрические условия сопряжения, геометрические граничные условия). Из уравнения (10.1) могут быть получены дифференциальные уравнения движения, статические граничные условия, а также статические условия сопряжения.

10.1.3. Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах

Пусть расчетная схема системы с учетом геометрических связей имеет s -степеней свободы, т. е. s взаимно независимых движений, которые она может совершать. При этом перемещения системы выражаются через s -обобщенных координат $q_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, s$, которые являются скалярными функциями вре-

мени и могут быть перемещениями или углами поворота в отдельных точках системы

$$u_k(t) = u_k(q_1(t), \dots, q_s(t)) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (10.4)$$

или параметрами, характеризующими движения по любым заданным линейно независимым возможным перемещениям

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z, q_1(t) \dots q_s(t)). \quad (10.5)$$

Из уравнения (10.1) с учетом независимости произвольных вариаций обобщенных координат δq_i могут быть получены известные из теоретической механики уравнения Лагранжа в обобщенных координатах

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (10.6)$$

Здесь T и U — кинетическая и потенциальная энергия системы, записанная в обобщенных координатах; $Q_i(t)$ — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате $q_i(t)$. Чтобы получить выражения для обобщенных сил, необходимо с учетом зависимостей (10.4) или (10.5) записать вариацию работы внешних нагрузок в виде

$$\delta A_p = \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i. \quad (10.7)$$

Если внешние силы отсутствуют или если в более общем случае они имеют потенциал $\Pi(q_1, \dots, q_s)$ и

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (10.8)$$

то рассматриваемая система с идеальными стационарными связями является консервативной. В этом случае, используя уравнения (10.6) с учетом (10.8), можно показать, что для такой системы имеет место закон сохранения механической энергии

$$T + U + \Pi = \text{const}. \quad (10.9)$$

Внешние силы, удовлетворяющие условиям (10.8), называются консервативными.

10.1.4. Уравнения малых колебаний системы с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим малые колебания (отклонения) системы относительно некоторого положения равновесия, в котором она находится, если на нее не действуют возмущающие силы. Для общности положение равновесия будем считать как устойчивым, так и неустойчивым. Последний случай часто встречается в динамике упругих летательных аппаратов, находящихся в условиях свободного полета.

Будем отсчитывать обобщенные координаты от положения равновесия, считая, что в положении равновесия они равны нулю, т. е. $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$. В положении равновесия потенциальная энергия U имеет стационарное значение (см. разд. 9.1), поэтому

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (10.10)$$

где нижний индекс «0» показывает, что производные вычисляются при $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$. Если в положении равновесия системы ее потенциальная энергия является минимальной, то это положение устойчиво, в противном случае положение равновесия неустойчиво. Запишем выражение для потенциальной энергии как функции обобщенных координат $U(q_1, q_2, \dots, q_s)$. Раскладывая ее в ряд Тейлора в окрестности положения равновесия и ограничиваясь квадратичными членами, получим

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j. \quad (10.11)$$

Здесь $U_0 = U(0, 0, \dots, 0)$ является несущественной константой, которую можно приравнять нулю, если считать, что в положении равновесия потенциальная энергия равна нулю. С учетом условий (10.10) потенциальная энергия системы (10.11) при малых колебаниях относительно положения равновесия принимает вид квадратичной формы обобщенных координат

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{ij} q_i q_j. \quad (10.12)$$

Коэффициенты

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0$$

называются коэффициентами обобщенных жесткостей; они являются симметричными, т. е. $k_{ij} = k_{ji}$.

Если положение равновесия, около которого колеблется система, устойчиво, то квадратичная форма (10.12) является положительно определенной. Это значит, что при любых действительных значениях переменных $q_1, q_2, \dots, q_s$, если все они одновременно не равны нулю, потенциальная энергия принимает только положительные значения.

Рассмотрим сначала распределенную систему. Раскладывая вектор перемещения (10.5) в ряд Тейлора вблизи положения равновесия $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$ и ограничиваясь линейными членами, получим

$$u = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_0 q_i, \quad (10.13)$$

где производные $(\partial u / \partial q_i)_0$ не зависят от времени. Тогда вариация перемещения, скорость и ускорение определяются как

$$\begin{aligned}\delta u &= \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \right)_0 \delta q_i, \\ \dot{u} &= \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \right)_0 \dot{q}_i, \\ \ddot{u} &= \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \right)_0 \ddot{q}_i.\end{aligned}\tag{10.14}$$

Запишем выражение для кинетической энергии системы с учетом формулы для скоростей (10.14)

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \dot{u}^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \right)_0 \dot{q}_i \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \right)_0 \dot{q}_j dV$$

или

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.\tag{10.15}$$

Коэффициенты

$$m_{ij} = \iiint_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \right)_0 \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \right)_0 dV\tag{10.16}$$

называются коэффициентами обобщенных масс. Они являются симметричными, т. е. $m_{ij} = m_{ji}$. Для определения обобщенных сил $Q_i(t)$ выражение для вариации работы внешних сил (10.2) приведем к виду (10.7) с учетом (10.13)

$$\delta A_p = \iint_S p \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \right)_0 \delta q_i dS = \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i.$$

Отсюда

$$Q_i(t) = \iint_S p \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \right)_0 dS.\tag{10.17}$$

Аналогичным образом получаются выражения кинетической энергии системы сосредоточенных масс и вариации работы сосредоточенных сил. В этом случае производные $(\partial u / \partial q_i)_0$ заменяются на $(\partial u_k / \partial q_i)_0$, которые определяются из зависимостей (10.4), а интегралы заменяются суммами по всем сосредоточенным массам.

$k = 1, 2, \dots$. В результате коэффициенты обобщенных масс и обобщенные силы записываются в виде

$$m_{ij} = \sum_k \mu_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial q_i} \right)_0 \left(\frac{\partial u_k}{\partial q_j} \right)_0, \quad (10.18)$$

$$Q_i(t) = \sum_k P_k(t) \left(\frac{\partial u_k}{\partial q_i} \right)_0.$$

Если распределенная система в некоторых точках (x_k, y_k, z_k) имеет сосредоточенные массы μ_k , на которые действуют сосредоточенные силы P_k , то в этом случае коэффициенты обобщенных масс представляются в виде сумм выражений (10.16) и (10.18), а обобщенные силы — в виде сумм (10.17) и (10.18). Если при этом сосредоточенные массы μ_k крепятся к распределенной системе жестко, так что их относительные смещения отсутствуют, то

$$u_k(t) = u(x_k, y_k, z_k, t).$$

Подставим выражения кинетической и потенциальной энергии (10.15) и (10.12) в уравнения Лагранжа (10.6). Получим систему линейных дифференциальных уравнений малых колебаний

$$\sum_{j=1}^s m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^s k_{ij} q_j = Q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (10.19)$$

К этим уравнениям следует добавить заданные начальные условия для обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ при $t = 0$. Уравнения (10.19) можно также получить исходя из общего уравнения принципа Даламбера — Лагранжа (10.1). На основании (10.12) с учетом условий симметрии коэффициентов k_{ij} вариация потенциальной энергии равна

$$\delta U = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{ij} q_j \delta q_i. \quad (10.20)$$

Запишем выражение (10.2) для вариации работы инерционных сил в системе с распределенной массой. С учетом (10.13), (10.14) получим

$$\begin{aligned} \delta A_i &= - \iiint_V \rho \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \right)_0 \ddot{q}_j \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \right)_0 \delta q_i = \\ &= - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s m_{ij} \ddot{q}_j \delta q_i. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения δU и δA_i , а также выражение (10.7) для δA_p в уравнение (10.1) и перенесем все члены в левую часть

$$\sum_{i=1}^s \left[\sum_{j=1}^s k_{ij} q_j + \sum_{j=1}^s m_{ij} \ddot{q}_j - Q_i \right] \delta q_i = 0.$$

Так как вариации обобщенных координат δq_i произвольны и независимы, то выражения в квадратных скобках должны равняться нулю. Таким образом получаются уравнения (10.19).

Систему линейных дифференциальных уравнений (10.19) запишем в матричном виде

$$M\ddot{q} + Kq = Q. \quad (10.21)$$

Здесь M и K являются матрицами коэффициентов обобщенных масс и обобщенных жесткостей, q и $Q(t)$ являются векторами-столбцами обобщенных координат и обобщенных сил;

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{s1} & \dots & m_{ss} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & \dots & k_{ss} \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_s \end{bmatrix}. \quad (10.22)$$

Матрица инерции M и матрица жесткости K являются симметричными матрицами, т. е.

$$M^T = M, \quad K^T = K, \quad (10.23)$$

где индексом «т» обозначено транспонирование.

Запишем также выражения для кинетической и потенциальной энергии (10.15), (10.12) и вариации работы внешних сил (10.7) в матричном виде

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q},$$

$$U = \frac{1}{2} q^T K q, \quad (10.24)$$

$$\delta A_p = Q^T \delta q = \delta q^T Q.$$

10.1.5. Дифференциальные уравнения колебаний упругих систем с непрерывно распределенными параметрами

В предыдущих главах были рассмотрены различные расчетные модели упругих систем (трехмерные тела, стержни, пластины, оболочки) и получены дифференциальные уравнения статики этих систем. Соответствующие уравнения колебаний можно получить, если в дифференциальных уравнениях статики наряду с внешними силами учесть инерционные силы.

Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях элемента упругой системы в общем случае можно представить в векторном виде

$$Lu = p, \quad (10.25)$$

где u — вектор перемещения точки системы; p — вектор распределенных внешних сил, действующих на элемент системы; L — линейный дифференциальный оператор в виде квадратной матрицы, размерность которой равна размерности векторов u и p . Векторы u и p можно рассматривать как обычные векторы или как векторы-столбцы; в последнем случае наряду с величинами перемещений и сил они могут содержать элементы, представляющие углы поворота и моменты. При колебаниях внешняя нагрузка и перемещения зависят не только от координат рассматриваемой точки системы, но и от времени t . На основании принципа Даламбера вектор инерционных сил, действующих на элемент системы, равен

$$p_i = -m\ddot{u}, \quad (10.26)$$

где m — удельная масса рассматриваемого элемента, отнесенная к единице длины, площади или объема. Дифференциальное уравнение равновесия (10.25) с учетом сил инерции (10.26) переходит в дифференциальное уравнение колебаний

$$Lu = p - m\ddot{u}. \quad (10.27)$$

При этом граничные условия остаются такими же, как и в задаче статики. Для уравнения колебаний должны быть заданы начальные условия: в начальный момент времени $t = 0$ должны быть заданы векторы перемещения u и скорости $\dot{u}$ для всех точек системы. Таким образом, если известны дифференциальные уравнения статики упругой системы, то составление уравнений колебаний не вызывает затруднений. Для примера далее приведены дифференциальные уравнения поперечных колебаний стержня и пластины, которые получаются из соответствующих дифференциальных уравнений изгиба (1.37), (3.62).

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний прямолинейного стержня переменного сечения под действием распределенной поперечной нагрузки $q(x, t)$ записывается в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = q(x, t) - m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (10.28)$$

где $v(x, t)$ — поперечное перемещение; $m(x)$ — распределенная масса стержня.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний тонкой изотропной пластины постоянной толщины h под действием поперечной нагрузки $q(x, y, t)$ имеет вид

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q(x, y, t) - m\ddot{w}, \quad (10.29)$$

где $w = w(x, y, t)$, $m = \rho h$, ρ — плотность материала пластины.

Дифференциальные уравнения колебаний тонких оболочек получаются из уравнений статики (4.20), если в последних учесть

силы инерции, отнесенные к единице площади срединной поверхности оболочки

$$\begin{aligned} L_{1u}u + L_{1v}v + L_{1w}w &= q_\alpha = m\ddot{u}, \\ L_{2u}u + L_{2v}v + L_{2w}w &= q_\beta = m\ddot{v}, \\ L_{3u}u + L_{3v}v + L_{3w}w &= q_\gamma = m\ddot{w}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

10.1.6. Интегральные уравнения колебаний упругой системы

Принцип составления интегральных уравнений, которые широко используются в задачах динамики, рассмотрим на примере поперечных колебаний прямолинейного стержня (рис. 10.2). Пусть для закрепленного стержня построена функция $G(x, \xi)$, называемая функцией влияния и представляющая собой поперечное перемещение в точке x от единичной силы, приложенной в точке ξ [22]. В силу теоремы о взаимности перемещений для линейной системы функция влияния является симметричной, т. е. $G(x, \xi) = G(\xi, x)$. Перемещение в точке x от действия в точке ξ силы P_ξ тогда будет равно $v = G(x, \xi) P_\xi$. При колебаниях на стержень действует распределенная нагрузка $q(x, t) - m(x) \ddot{v}(x, t)$. Разбивая стержень на элементы длиной $d\xi$, полагая $P_\xi = [q(\xi, t) - m(\xi) \ddot{v}(\xi, t)] d\xi$ и суммируя перемещения от нагрузок, действующих на все элементы ($0 \leq \xi \leq l$), получим интегральное уравнение поперечных колебаний стержня

$$v(x, t) = \int_0^l G(x, \xi) [q(\xi, t) - m(\xi) \ddot{v}(\xi, t)] d\xi. \quad (10.31)$$

К этому уравнению необходимо добавить заданные начальные условия при $t = 0$ для $v(x, 0)$ и $\dot{v}(x, 0)$. Граничные условия здесь удовлетворены при построении функции влияния $G(x, \xi)$. Аналогичным образом можно записать интегральное уравнение поперечных колебаний закрепленной пластины, если предварительно построить функцию влияния $G(x, y; \xi, \eta)$, представляющую собой перемещение в точке (x, y) от действия единичной силы в точке (ξ, η) :

$$w(x, y, t) = \iint_S G(x, y; \xi, \eta) [q(\xi, \eta, t) - m(\xi, \eta) \ddot{w}(\xi, \eta, t)] d\xi d\eta. \quad (10.32)$$

Здесь S — площадь пластины; текущие координаты ξ и η , отсчитываемые в направлениях x и y , меняются в пределах площади пластины S ; $G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y)$.

В случае свободной или геометрически изменяемой системы, которая допускает перемещения без деформаций, функция влияния в обычном понимании не существует. Чтобы получить инте-

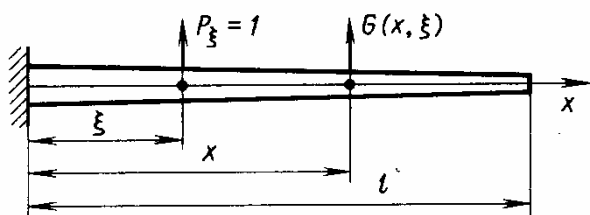


Рис. 10.2. К определению функции влияния для стержня

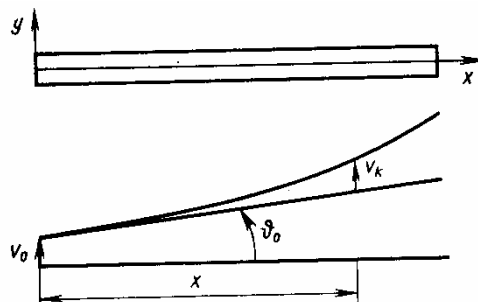


Рис. 10.3. К выводу интегральных уравнений движения для свободного стержня

гральные уравнения колебаний для таких систем, используются различные специальные приемы. Для примера рассмотрим свободный стержень, показанный на рис. 10.3. Пусть определена функция влияния $G_k(x, \xi)$ при условии, что стержень неподвижно закреплен, как консоль на левом конце $x = 0$. Перемещение свободного стержня представим в виде

$$v(x, t) = v_0(t) + \vartheta_0(t)x + v_k(x, t), \quad (10.33)$$

где v_0 и ϑ_0 — перемещение и угол поворота на крае при $x = 0$; $v_k(x, t)$ — прогиб стержня как консоли, закрепленной на крае $x = 0$.

Для функции v_k записывается интегральное уравнение (10.31) и к нему добавляются уравнения динамического равновесия стержня в виде уравнения проекций сил и уравнения моментов. В результате получим

$$\begin{aligned} v_k(x, t) &= \int_0^l G_k(x, \xi) [q(\xi, t) - m(\xi) \ddot{v}(\xi, t)] d\xi, \\ \int_0^l [q(\xi, t) - m(\xi) \ddot{v}(\xi, t)] d\xi &= 0, \\ \int_0^l [q(\xi, t) - m(\xi) \ddot{v}(\xi, t)] \xi d\xi &= 0. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Три интегральных уравнения (10.34) с учетом (10.33) позволяют определить три неизвестные функции $v_k(x, t)$, $v_0(t)$ и $\vartheta_0(t)$.

10.1.7. Уравнения колебаний систем с сосредоточенными массами

Такая дискретная система часто используется в качестве расчетной модели. Для ее построения конструкция делится на элементы, ее распределенная масса заменяется системой сосредоточенных в узловых точках масс μ_j , а внешняя нагрузка заменяется эквивалентной системой сосредоточенных сил $Q_j(t)$.

$j = 1, 2, \dots, s$. В качестве обобщенных координат $q_j(t)$ рассматриваются перемещения узловых точек. В некоторых случаях наряду с перемещениями учитываются углы поворота в узловых точках; при этом можно также учесть моменты инерции приведенных масс и моменты внешних сил. Уравнения колебаний расчетной модели в виде невесомого упругого «скелета», несущего в отдельных узловых точках приведенные сосредоточенные массы, могут быть получены, как для системы с конечным числом степеней свободы с помощью уравнений Лагранжа в виде (10.19). Кроме того, уравнения колебаний такой системы могут быть получены с использованием коэффициентов влияния для перемещений в узловых точках, так же как и интегральные уравнения для распределенных систем. Пусть для закрепленной системы известна матрица коэффициентов влияния для перемещений $G = [g_{ij}]$, где g_{ij} представляет i -е перемещение (угол поворота) от действия единичной силы (момента) $Q_j = 1$, соответствующей по направлению j -му перемещению ($g_{ij} = g_{ji}$). При колебаниях системы на нее действуют сосредоточенные внешние силы $Q_j(t)$ и инерционные силы $-\mu_j \ddot{q}_j$, $j = 1, 2, \dots, s$. Перемещения в узловых точках системы, вызванные этими силами,

$$q_i = \sum_{j=1}^s g_{ij}(Q_j - \mu_j \ddot{q}_j) \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (10.35)$$

Эти уравнения по существу являются дискретными аналогами интегральных уравнений (10.31), (10.32). Уравнения (10.35) в матричной форме с учетом обозначений (10.22) имеют вид

$$q = GQ - M\ddot{q}. \quad (10.36)$$

Здесь $M = [\mu_j]$ является диагональной матрицей. Уравнение (10.36) путем умножения слева на G^{-1} может быть преобразовано к виду (10.21), т. е.

$$M\ddot{q} + Kq = Q.$$

Здесь $K = G^{-1}$ является матрицей жесткости.

Для незакрепленной или геометрически изменяемой системы матрица K является вырожденной, ее определитель равен нулю и обратная матрица $G = K^{-1}$ не существует. Уравнения колебаний для свободной дискретной системы удобнее составлять в форме уравнений Лагранжа (10.21). Их можно также составить, используя коэффициенты влияния для системы, закрепленной статически определенным образом, с учетом ее перемещений как твердого тела. В этом случае уравнения колебаний в форме (10.36) дополняются уравнениями динамического равновесия системы в целом, аналогично интегральным уравнениям колебаний свободного стержня (10.34).

10.1.8. Редуцирование системы уравнений

В определенных случаях в расчетной модели можно пренебречь инерцией движений, соответствующих некоторым степеням свободы. Например, при поперечных колебаниях тонкостенных балок с учетом сдвигов и деформаций поперечных сечений можно пренебречь инерцией вращения и деформаций этих сечений. В таких случаях неизвестные функции (обобщенные координаты), представляющие степени свободы, инерция которых не учитывается, могут быть исключены из уравнений, за счет чего порядок системы уравнений может быть понижен.

Рассмотрим систему, колебания которой описываются матричным уравнением (10.21). Часть обобщенных координат вектора-столбца q , инерция которых учитывается, обозначим вектором q_I , остальные, инерция которых не учитывается, обозначим вектором q_{II} . Соответственно этому матричное уравнение (10.21) запишем в блочном виде

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_I \\ q_{II} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_I \\ q_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_I \\ Q_{II} \end{bmatrix}.$$

Отсюда следуют два матричных уравнения:

$$\begin{aligned} M_{11}\ddot{q}_I + K_{11}q_I + K_{12}q_{II} &= Q_I, \\ K_{21}q_I + K_{22}q_{II} &= Q_{II}. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Из второго уравнения находим

$$q_{II} = K_{22}^{-1}Q_{II} - K_{22}^{-1}K_{21}q_I.$$

Первое уравнение (10.37) после исключения q_{II} приводится к виду

$$M_{11}\ddot{q}_I + [K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}]q_I = Q_I - K_{12}K_{22}^{-1}Q_{II}. \quad (10.38)$$

Здесь $K_{12} = K_{21}^T$ и поэтому редуцированная матрица жесткости $K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}$ является симметричной. Таким образом порядок системы понижен до порядка вектора q_I .

10.1.9. Прикладные методы решения задач динамики упругих систем

Точное решение уравнений движения таких сложных систем, какими являются конструкции летательных аппаратов, как правило, связано с большими трудностями. В связи с этим в расчетной практике получили широкое распространение прикладные методы, позволяющие получить приближенное решение. По существу эти методы являются модификацией общих методов, изложенных в гл. 1 (см. разд. 1.6), в приложении к задачам динамики. Подробное описание этих методов будет представлено далее применительно к конкретным задачам. Здесь дадим только краткую характеристику.

Метод Рэлея — Ритца является вариантом метода Ритца — Тимошенко, применение которого к задачам статики и устойчивости обсуждалось в разд. 1.6.1 и 9.2.2. Так же, как и метод Ритца — Тимошенко, метод Рэлея — Ритца основан на представлении искомых перемещений в форме ряда (10.5), аналогичного разложениям (1.70) и отличающегося от них тем, что искомые коэффициенты разложения являются не константами (A_i , B_i , C_i), а функциями времени $q_i(t)$. При этом энергетическое соотношение (1.28), соответствующее принципу Лагранжа в методе Ритца — Тимошенко, заменяется соотношением (10.1), соответствующим применительно к задачам динамики принципу Даламбера — Лагранжа. В результате вместо системы линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов A_i , B_i , C_i в задачах динамики получается система линейных дифференциальных уравнений относительно искомых функций времени $q_i(t)$. Этот метод позволяет получить точное или приближенное решение. Примеры применения метода будут рассмотрены в разд. 10.4.4.

Метод Бубнова — Галеркина, описанный применительно к задачам статики и устойчивости в разд. 1.6.2 и 9.2.3, в задачах динамики реализуется аналогичным образом только по отношению к уравнению движения, например, к уравнению (10.28) для балки или (10.29) для пластины. Так же, как и в методе Рэлея — Ритца, разложения искомых функций в ряды типа (10.5) включают неизвестные функции времени, уравнения для которых и получаются в результате реализации процедуры Бубнова — Галеркина, определяемой соотношениями (1.76). Примеры, иллюстрирующие метод, будут приведены в разд. 10.4.5.

Метод конечных разностей, который был ранее рассмотрен в разд. 1.6.5 и 9.2.4 применительно к задачам динамики, используется в двух вариантах. В первом варианте дискретизация системы с помощью разностных формул (1.83) осуществляется только по пространственным координатам, например, по x в уравнении колебаний стержня (10.28) и по x и y — в уравнении для пластины (10.29). В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих изменение во времени искомых переменных, например прогибов стержня и пластины в узловых точках. Второй вариант метода предполагает использование конечно-разностных формул для преобразования всех производных, в том числе и производных по времени. В результате получается так же, как и в задачах статики, линейная система алгебраических уравнений, однако в качестве неизвестных она включает такие значения искомых функций в узловых точках, которые соответствуют вполне определенным моментам времени.

Все более широкое применение для решения задач динамики получает метод конечных элементов (МКЭ) — универсальный метод расчета сложных пространственных конструкций, описанный в гл. 7. В задачах динамики используется формулировка

метода решения задач в функциях перемещений, причем дополнительно к внешним нагрузкам учитываются действующие на конечный элемент инерционные силы. Примеры приложения МКЭ к задачам упругих колебаний будут рассмотрены далее в разд. 10.5.3.

В заключение отметим, что общая идея прикладных методов, позволяющая упростить решение и определяющая в связи с этим его приближенный характер, в задачах динамики заключается в снижении числа степеней свободы исходной системы. Например, если стержень, описываемый уравнением (10.28), имеет бесконечное число степеней свободы (форм колебаний), то представление решения в форме конечного ряда (метода Рэлея — Ритца и Бубнова — Галеркина) или разбиение его на участки или элементы (методы конечных разностей и конечных элементов) позволяют учесть ограниченное число степеней свободы, которое определяется числом членов в рядах или числом разбиений. С увеличением этого числа повышается точность и, естественно, трудоемкость решения.

10.2. СИСТЕМА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

10.2.1. Уравнение колебаний

Уравнение вынужденных колебаний линейной системы с одной степенью свободы, которая характеризуется обобщенной координатой $q_1(t)$, без учета демпфирования следует из уравнений (10.21) при $s = 1$, т. е.

$$m_{11}\ddot{q}_1 + k_{11}q_1(t) = Q_1(t). \quad (10.39)$$

Рассмотрим в качестве примера простейшую модель механической системы с одной степенью свободы в виде упругомассового осциллятора с демпфером вязкого трения (рис. 10.4, а). Уравнение колебаний с учетом демпфирования можно получить как уравнение динамического равновесия всех сил, действующих на отсеченную часть (см. рис. 10.4, б, в)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t), \quad (10.40)$$

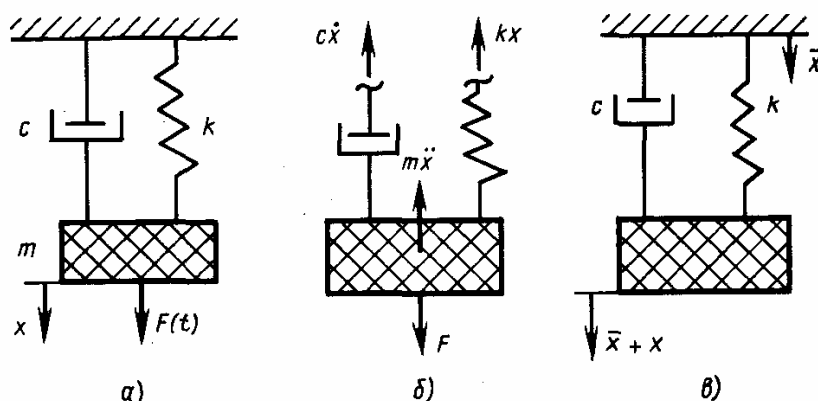


Рис. 10.4. Модель системы с одной степенью свободы

где m , c и k — масса, коэффициент вязкого демпфирования и коэффициент жесткости; $x(t)$ — перемещение, отсчитываемое от положения статического равновесия; $F(t)$ — заданная возмущающая сила.

К уравнению (10.40) должны быть добавлены заданные начальные условия при $t = 0$:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (10.41)$$

где x_0 и v_0 — начальное перемещение и начальная скорость. Без учета демпфирования ($c = 0$) уравнение (10.40) по виду совпадает с уравнением (10.39).

Для удобства решения уравнения (10.40) запишем его в виде

$$\ddot{x} + 2s\dot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad (10.42)$$

где

$$2s = \frac{c}{m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad f = \frac{F}{m}.$$

10.2.2. Свободные колебания

Если возмущающая сила отсутствует, то свободные колебания описываются уравнением

$$\ddot{x} + 2s\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (10.43)$$

Общее решение этого однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$x = e^{-st} (C_1 \sin \tilde{\omega} t + C_2 \cos \tilde{\omega} t), \quad (10.44)$$

где $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - s^2}$.

Здесь $\tilde{\omega}$ — собственная частота колебаний системы с учетом демпфирования; ω — собственная частота системы без демпфирования ($s = 0$); C_1 и C_2 — произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий (10.41) и имеют вид

$$C_1 = \frac{1}{\tilde{\omega}} (v_0 + sx_0), \quad C_2 = x_0. \quad (10.45)$$

Решение (10.44) может быть записано в другом виде

$$x = Ce^{-st} \sin(\tilde{\omega} t + \varphi), \quad (10.46)$$

где $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\varphi = \arctg \frac{C_2}{C_1}$.

График свободных затухающих колебаний при $\omega > s$ показан на рис. 10.5. Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}. \quad (10.47)$$

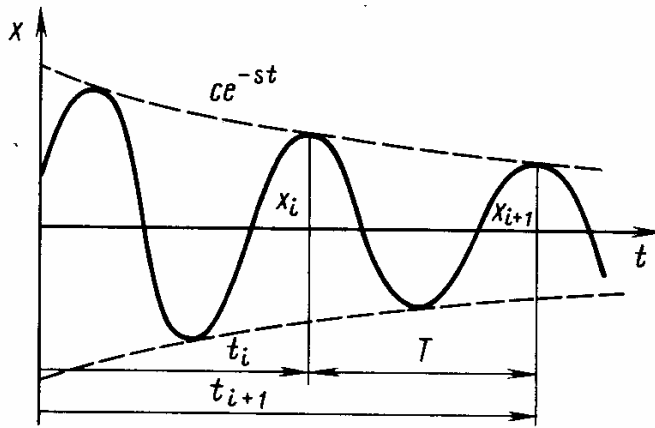


Рис. 10.5. График свободных затухающих колебаний

Определим отношение двух последовательных амплитуд колебаний в моменты времени t_i и $t_i + T$; при этом считаем, что $s^2 \ll \omega^2$ и что максимумы отклонений достигаются в те моменты времени, когда синус обращается в единицу. Имеем

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{Ce^{-st_i}}{Ce^{-s(t_i+T)}} = e^{sT}.$$

Натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд колебаний называется логарифмическим декрементом колебаний

$$\delta = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}} = sT = s \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}. \quad (10.48)$$

В реальных конструкциях природа демпфирования весьма сложна и коэффициент демпфирования обычно определяют на основании экспериментальных данных. Если для этого используются свободные колебания, то экспериментально определяется частота $\tilde{\omega}$ и декремент колебаний δ и после этого по формуле (10.48) находится коэффициент «эквивалентного» вязкого демпфирования

$$2s = \frac{\delta \tilde{\omega}}{\pi}. \quad (10.49)$$

При этом демпфирование в системе можно считать вязким, если логарифмический декремент, вычисленный при любом числе n циклов колебаний как

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_i}{x_{i+n}}, \quad (10.50)$$

будет величиной постоянной. При слабом демпфировании ($s^2 \ll \omega^2$) можно считать $\tilde{\omega} \approx \omega$.

10.2.3. Вынужденные гармонические колебания

Рассмотрим колебания системы при действии гармонической возмущающей силы $F(t) = F_0 \sin \Omega t$. Уравнение (10.42) в этом случае имеет вид

$$\ddot{x} + 2s\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \sin \Omega t, \quad (10.51)$$

где $f_0 = F_0/m$. Общее решение складывается из решения однородного уравнения, которое берется в виде (10.44) или (10.46), и

частного решения неоднородного уравнения. Частное решение уравнения (10.51) ищем в виде

$$x_1 = A_1 \sin \Omega t + A_2 \cos \Omega t, \quad (10.52)$$

где A_1 и A_2 — неопределенные множители. Подставив выражение (10.52) в уравнение (10.51), получим два алгебраических уравнения относительно коэффициентов A_1 и A_2 , из которых находим

$$A_1 = \frac{(\omega^2 - \Omega^2) f_0}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4s^2\Omega^2}, \quad A_2 = -\frac{2s\Omega f_0}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4s^2\Omega^2}. \quad (10.53)$$

Решение (10.52) с учетом (10.53) можно записать в виде

$$x_1 = A \sin (\Omega t - \alpha), \quad (10.54)$$

$$\text{где } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4s^2\Omega^2}},$$

$$\alpha = -\arctg \frac{A_2}{A_1} = \arctg \frac{2s\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}.$$

С течением времени свободные колебания, представленные выражениями (10.44) или (10.46), затухают и остаются установившиеся гармонические колебания постоянной амплитуды A с частотой возмущающей силы Ω . При этом колебания отстают по фазе на угол α от колебаний возмущающей силы. При резонансе $\Omega = \omega$ и $\alpha = \pi/2$.

Амплитуда колебаний A становится максимальной при частоте возбуждения

$$\Omega_p = \sqrt{\omega^2 - 2s^2} = \sqrt{\tilde{\omega}^2 - s^2}. \quad (10.55)$$

Как видно из формулы (10.55), при силовом возбуждении колебаний эта частота меньше собственной частоты.

Максимальная амплитуда и угол сдвига фазы при частоте $\Omega = \Omega_p$

$$x_{\max} = A_* = \frac{f_0}{2s\tilde{\omega}}, \quad \alpha_* = \arctg \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - 2s^2}}{s} \right). \quad (10.56)$$

На рис. 10.6, а показана зависимость от частоты возбуждения коэффициента динамичности λ , представляющего собой отношение амплитуды колебаний к статическому отклонению под действием силы F_0 ($\lambda = A/x_{\text{ст}}$, $x_{\text{ст}} = F_0/k = f_0/\omega^2$). На рис. 10.6, б показано изменение угла отставания по фазе.

Если система находится под действием кинематического возбуждения, например, при заданном движении подвески (рис. 10.4, в) по закону $\bar{x}(t)$, то при условии, что $x(t)$ представляет относительное смещение, такое возбуждение эквивалентно действию силы $F(t) = -m\ddot{\bar{x}}(t)$. При движении подвески по гармоническому закону $\bar{x}(t) = \bar{x}_0 \sin \Omega t$ (10.54) следует поло-

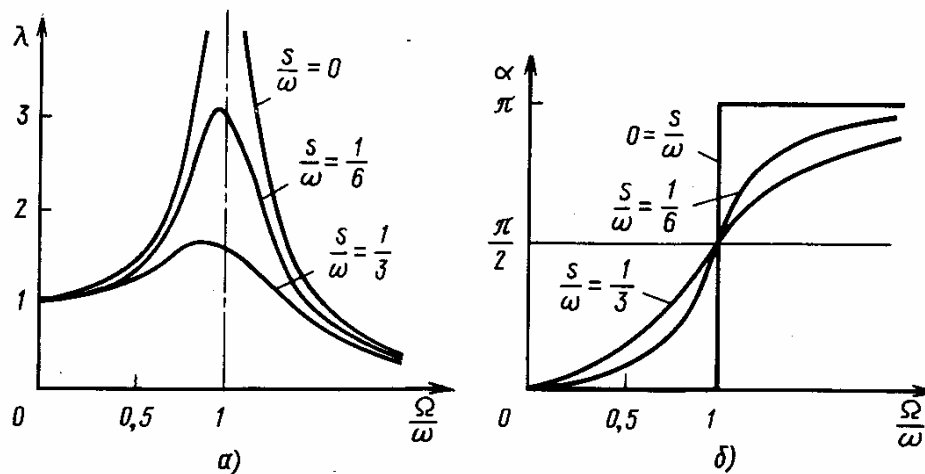


Рис. 10.6. Зависимость коэффициента динамичности (а) и угла сдвига фазы (б) от частоты возбуждения при гармонических колебаниях

жить $f_0 = \Omega^2 \bar{x}_0$. При кинематическом возбуждении амплитуда A становится максимальной при частоте

$$\Omega_* = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2 - 2s^2}}; \quad (10.57)$$

в этом случае Ω_* превышает частоту собственных колебаний. Максимальная амплитуда и угол сдвига фазы при $\Omega = \Omega_*$

$$x_{\max} = A_* = \frac{\omega^2 \bar{x}_0}{2s\bar{\omega}}, \quad \alpha_* = \arctg \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - 2s^2}}{s} \right). \quad (10.58)$$

Упругие металлические конструкции обладают слабым внутренним демпфированием ($s^2 \ll \omega^2$). При этом частоты Ω_* весьма близки к частотам собственных колебаний ($\Omega_* \approx \bar{\omega} \approx \omega$). Резонансные гармонические колебания также могут использоваться наряду со свободными колебаниями для экспериментального определения коэффициента «эквивалентного» вязкого демпфирования. Если экспериментально определить максимальную амплитуду и угол сдвига фазы при резонансе, то после этого по формулам (10.56), (10.58) можно найти коэффициент демпфирования s . При этом возбуждение должно быть таким, чтобы при резонансе амплитуда была достаточно малой и не нарушалась линейность системы.

10.2.4. Колебания при действии произвольной возмущающей силы

Если $f(t)$ является произвольной заданной функцией, то решение уравнения (10.42) можно получить методом вариации произвольных постоянных. Перемещение находится в форме решения однородного уравнения (10.44), где произвольные постоянные считаются функциями времени, т. е.

$$x = C_1(t) X_1(t) + C_2(t) X_2(t); \\ X_1(t) = e^{-st} \sin \bar{\omega} t, \quad X_2(t) = e^{-st} \cos \bar{\omega} t. \quad (10.59)$$

Находим $\dot{x}$ и при этом полагаем

$$\dot{C}_1 X_1 + \dot{C}_2 X_2 = 0. \quad (10.60)$$

Затем находим $\ddot{x}$ и подставляем выражения x , $\dot{x}$, $\ddot{x}$ в уравнение (10.42). Получим

$$\dot{C}_1 \dot{X}_1 + \dot{C}_2 \dot{X}_2 = f(t). \quad (10.61)$$

Решая совместно уравнения (10.60) и (10.61) с учетом обозначений (10.59), найдем

$$\dot{C}_1 = \frac{1}{\bar{\omega}} f(t) e^{st} \sin \bar{\omega} t, \quad \dot{C}_2 = -\frac{1}{\bar{\omega}} f(t) e^{st} \cos \bar{\omega} t.$$

Интегрируя, получим

$$C_1 = \frac{1}{\bar{\omega}} \int_0^t f(\tau) e^{s\tau} \sin \bar{\omega} \tau d\tau + D_1, \quad (10.62)$$

$$C_2 = -\frac{1}{\bar{\omega}} \int_0^t f(\tau) e^{s\tau} \cos \bar{\omega} \tau d\tau + D_2.$$

В результате решение (10.59) с учетом (10.62) приводится к виду

$$x = e^{-st} (D_1 \sin \bar{\omega} t + D_2 \cos \bar{\omega} t) + \frac{1}{\bar{\omega}} \int_0^t f(\tau) e^{-s(t-\tau)} \sin \bar{\omega} (t-\tau) d\tau. \quad (10.63)$$

Произвольные постоянные D_1 и D_2 определяются по заданным начальным условиям (10.41)

$$D_1 = \frac{1}{\bar{\omega}} (v_0 + s x_0), \quad D_2 = x_0. \quad (10.64)$$

Первое слагаемое в выражении (10.63) соответствует свободным колебаниям системы, вызванным начальным отклонением x_0 и начальной скоростью v_0 , а второе слагаемое описывает вынужденные колебания, вызванные возмущающей силой $F(t) = m f(t)$. Если демпфирование не учитывается, то следует положить $s = 0$ и $\bar{\omega} = \omega$.

Рассмотрим два простых примера для системы без демпфирования ($s = 0$) при нулевых начальных условиях ($x_0 = v_0 = 0$).

1. Действие единичной силы, которая внезапно приложена в момент времени $t = t_0$: $F(t) = 0$ при $t < t_0$, $F(t) = 1$ при $t > t_0$. Решение (10.63) при $t > t_0$ будет

$$x = \frac{1}{m\omega} \int_{t_0}^t 1 \cdot \sin \omega (t - \tau) d\tau = \frac{1}{m\omega^2} [1 - \cos \omega (t - t_0)].$$

График нагрузки и вызванных ею колебаний показаны на рис. 10.7. Максимальная величина перемещения под действием внезапно

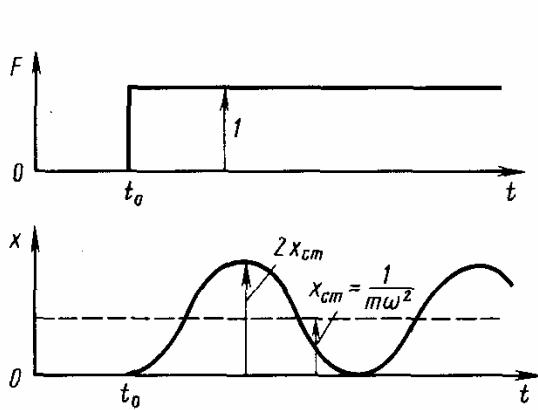


Рис. 10.7. Колебания под действием внезапно приложенной силы

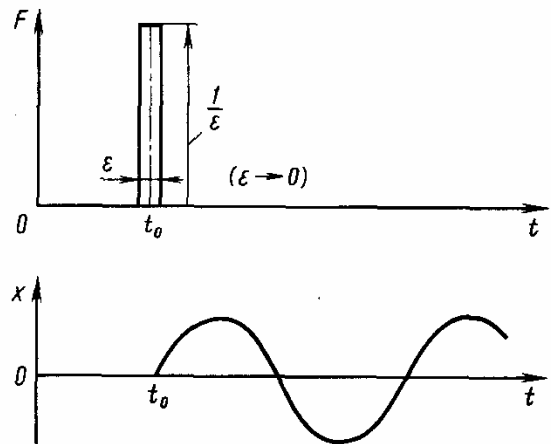


Рис. 10.8. Колебания под действием импульсной силы

приложенной нагрузки в два раза превышает статическое перемещение $x_{ст} = 1/k = 1/m\omega^2$, которое возникло бы при медленном (статическом) приложении силы. Таким образом, коэффициент динамичности, учитывающий скорость приложения любой динамической нагрузки, находится в диапазоне от единицы до двух.

2. Действие единичного импульса, который приложен в момент времени $t = t_0$: $F(t) = \delta(t - t_0)$, где $\delta(t - t_0)$ — импульсная функция (дельта-функция), обладающая следующими свойствами:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0, \\ \infty & \text{при } t = t_0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

В этом случае при $t > t_0$

$$x = \frac{1}{m\omega} \int_0^t \delta(\tau - t_0) \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{1}{m\omega} \sin \omega(t - t_0).$$

Графики импульсной нагрузки и вызванных ею колебаний показаны на рис. 10.8.

10.3. СИСТЕМА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

10.3.1. Собственные колебания

Рассмотрим систему с конечным числом s степеней свободы, вынужденные колебания которой без учета демпфирования описываются матричным уравнением (10.21). Если внешние силы отсутствуют, то уравнение (10.21) становится однородным

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \quad (10.65)$$

и допускает решения типа

$$q(t) = Y \sin \omega t, \quad (10.66)$$

где Y — вектор-столбец неизвестных амплитуд $y_1, y_2, \dots, y_s$; ω — неизвестная частота колебаний. Подставив решение (10.66) в уравнение (10.65), получим

$$[K - \omega^2 M] Y = 0. \quad (10.67)$$

Матричное уравнение (10.67) представляет однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных элементов вектора Y . Эта система имеет ненулевое решение, когда ее определитель равен нулю, т. е.

$$\det [K - \omega^2 M] = 0. \quad (10.68)$$

Из этого частотного уравнения, левая часть которого может быть представлена в виде полинома степени s относительно ω^2 , определяются квадраты частот $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_s^2$ (их обычно располагают в порядке возрастания начиная с низшей частоты). Затем из уравнений (10.67) для каждой частоты ω_n определяются компоненты вектора Y_n , $n = 1, 2, \dots, s$.

Таким образом, в системе без внешних воздействий могут происходить гармонические колебания с определенными частотами ω_n , каждой из которых соответствует своя форма колебаний Y_n , $n = 1, 2, \dots, s$. Такие колебания (они могут возникать в результате определенных начальных возмущений) называются собственными колебаниями, а частоты ω_n и формы Y_n называются собственными частотами и собственными формами колебаний. Собственные формы колебаний определяются из однородной системы уравнений (10.67) с точностью до произвольного множителя. Поэтому они могут быть нормированы, например, так, чтобы какая-либо компонента вектора Y_n для всех форм была равна единице.

Заметим без доказательства, что вследствие симметрии матриц M и K все квадраты собственных частот ω_n^2 и компоненты векторов собственных форм колебаний Y_n являются действительными числами. Кроме того, если колебания происходят относительно устойчивого положения равновесия, то все квадраты собственных частот ω_n^2 положительны. Если матрица K является вырожденной (ее определитель равен нулю), то система имеет равные нулю собственные частоты, число которых равно дефекту матрицы K (дефект равен разности между порядком и рангом матрицы). Каждой нулевой частоте соответствует определенная форма перемещений, при которых потенциальная энергия системы не изменяется. Например, для свободной (незакрепленной) упругой системы число нулевых частот равно числу степеней свободы, соответствующих перемещениям системы без деформаций как абсолютно твердого тела.

10.3.2. Условия ортогональности

Будем считать, что все собственные формы колебаний определены. Возьмем какие-либо две формы Y_m и Y_n . Они удовлетворяют уравнениям

$$KY_m - \omega_m^2 MY_m = 0, \quad KY_n - \omega_n^2 MY_n = 0.$$

Умножим слева первое из этих уравнений на Y_n^T и второе — на Y_m^T :

$$\begin{aligned} Y_n^T KY_m - \omega_m^2 Y_n^T MY_m &= 0, \\ Y_m^T KY_n - \omega_n^2 Y_m^T MY_n &= 0. \end{aligned} \quad (10.69)$$

Используя свойство произведения двух транспонированных матриц $A^T B^T = (BA)^T$, где A и B — произвольные матрицы, и условие симметрии матрицы K , получим

$$Y_n^T KY_m = Y_n^T K^T Y_m = (KY_n)^T Y_m = (Y_m^T KY_n)^T = Y_m^T KY_n.$$

Выполняя такое же преобразование для матрицы M , будем иметь

$$\begin{aligned} Y_n^T KY_m &= Y_m^T KY_n, \\ Y_n^T MY_m &= Y_m^T MY_n. \end{aligned} \quad (10.70)$$

Вычитая из первого уравнения (10.69) второе и учитывая условия (10.70), получим $(\omega_n^2 - \omega_m^2) Y_n^T MY_m = 0$. Если $\omega_n^2 \neq \omega_m^2$, то

$$Y_n^T MY_m = 0 \quad \text{при } m \neq n. \quad (10.71)$$

При этих же условиях из уравнения (10.69) с учетом (10.71) следует

$$Y_n^T KY_m = 0 \quad \text{при } m \neq n. \quad (10.72)$$

Условия (10.71) и (10.72) называются условиями ортогональности собственных форм колебаний. Так как MY_m с точностью до множителя ω_m^2 представляет вектор-столбец инерционных сил m -й формы, а KY_m — вектор-столбец упругих сил m -й формы, то условиям (10.71) и (10.72) можно дать следующую физическую интерпретацию: 1) работа инерционных сил какой-либо собственной формы колебаний на перемещениях другой формы равна нулю; 2) работа упругих сил какой-либо собственной формы колебаний на перемещениях другой формы равна нулю.

Таким образом, между различными собственными формами колебаний отсутствует инерционное и упругое взаимодействие.

Если в системе имеются кратные частоты, то соответствующие им формы колебаний могут быть не ортогональными между собой, хотя каждая из них ортогональна всем остальным формам. Для удобства формы колебаний, соответствующие кратным частотам, можно ортогонализировать. Для этого вместо этих форм

берутся их линейно независимые комбинации с неизвестными коэффициентами, которые определяются из условий ортогональности. Все это относится и к случаю, когда в системе имеются кратные нулевые частоты.

10.3.3. Уравнения в нормальных координатах

Чтобы решить задачу о вынужденных колебаниях, связанную систему дифференциальных уравнений (10.19) удобно преобразовать к такому виду, чтобы она распалась на отдельные, не связанные между собой уравнения. Рассматривая матричное уравнение (10.21), представляющее собой систему (10.19), запишем вектор q в виде разложения по собственным формам колебаний

$$q(t) = \sum_{m=1}^s f_m(t) Y_m, \quad (10.73)$$

где $f_m(t)$ — неизвестные функции, заменяющие обобщенные координаты $q_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, s$. Функции f_m характеризуют движения по ортогональным собственным формам колебаний, поэтому они называются нормальными координатами. Подставим разложение (10.73) в уравнение (10.21):

$$\sum_{m=1}^s \ddot{f}_m M Y_m + \sum_{m=1}^s f_m K Y_m = Q.$$

Умножим это уравнение слева на вектор-строку Y_n^T , полагая $n = 1, 2, \dots, s$,

$$\sum_{m=1}^s \ddot{f}_m Y_n^T M Y_m + \sum_{m=1}^s f_m Y_n^T K Y_m = Y_n^T Q.$$

В силу условий ортогональности (10.71), (10.72) в суммах отличны от нуля только члены при $m = n$. Следовательно,

$$\ddot{f}_n Y_n^T M Y_n + f_n Y_n^T K Y_n = Y_n^T Q \quad (n = 1, 2, \dots, s).$$

Обозначим

$$m_n = Y_n^T M Y_n, \quad k_n = Y_n^T K Y_n, \quad F_n = Y_n^T Q \quad (10.74)$$

и назовем m_n обобщенной массой, k_n — обобщенной жесткостью и $F_n(t)$ — обобщенной силой n -й формы колебаний. Из уравнений (10.69) при $m = n$ следует, что

$$k_n = m_n \omega_n^2. \quad (10.75)$$

С учетом обозначений (10.74) и (10.75) уравнение вынужденных колебаний в нормальных координатах принимает вид

$$m_n \ddot{f}_n + m_n \omega_n^2 f_n = F_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots, s). \quad (10.76)$$

По виду эти уравнения аналогичны уравнению колебаний системы с одной степенью свободы (10.40) без учета демпфирования ($c = 0$).

Запишем потенциальную и кинетическую энергию (10.12) и (10.15) в нормальных координатах, используя разложение (10.73):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^s \sum_{m=1}^s f_n f_m Y_n^T \mathbf{K} Y_m;$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^s \sum_{m=1}^s \dot{f}_n \dot{f}_m Y_n^T \mathbf{M} Y_m.$$

С учетом условий ортогональности (10.71), (10.72), которые выполняются при $m \neq n$, и обозначений (10.74), (10.75) при $m = n$, получим

$$U = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^s k_n f_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^s m_n \omega_n^2 f_n^2,$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^s m_n \dot{f}_n^2.$$
(10.77)

По сравнению с выражениями в произвольных обобщенных координатах остаются только члены, содержащие квадраты нормальных координат.

10.3.4. Учет демпфирования

В реальной системе, моделирующей конструкцию, всегда присутствует внутреннее демпфирование. Если оно достаточно мало и незначительно влияет на собственные частоты и формы колебаний, а также на взаимодействие различных форм колебаний, то его можно учесть приближенно в виде «эквивалентного» вязкого демпфирования. Для этого в уравнения в нормальных координатах (10.76) по аналогии с уравнением для системы с одной степенью свободы (10.40) вводятся дополнительные члены, пропорциональные скорости нормальных координат $\dot{f}_n$:

$$m_n \ddot{f}_n + m_n \omega_n \varepsilon_n \dot{f}_n + m_n \omega_n^2 f_n = F_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots, s). \quad (10.78)$$

Здесь ε_n — безразмерный коэффициент вязкого демпфирования для n -й формы колебаний. Он определяется или на основании статистических данных для типовых систем, или на основании экспериментальных данных для рассматриваемой системы.

Решения уравнения (10.78) при каждом значении $n = 1, 2, \dots, s$ записываются по аналогии с решениями уравнения (10.40), для чего, как следует из сравнения уравнений (10.40) и (10.78), в этих решениях следует выполнить замену

$$x \rightarrow f_n, \quad F \rightarrow F_n, \quad m \rightarrow m_n, \quad \omega \rightarrow \omega_n, \quad 2s \rightarrow \omega_n \varepsilon_n. \quad (10.79)$$

Для экспериментального определения коэффициента демпфирования ε_n возбуждаются установившиеся резонансные колебания

по n -й форме. После снятия нагрузки происходят свободные затухающие колебания по n -й форме с частотой $\tilde{\omega}_n \approx \omega_n$. Замерив в какой-либо точке две последовательные амплитуды колебаний и определив логарифмический декремент δ_n , затем по формуле (10.49) с учетом замены (10.79) можно найти коэффициент демпфирования для n -й формы колебаний

$$\epsilon_n = \delta_n / \pi. \quad (10.80)$$

Коэффициент демпфирования ϵ_n можно определить также по значению максимальной амплитуды в какой-либо точке системы при резонансе по n -й форме колебаний при действии заданной гармонической силы.

10.3.5. Формула Рэлея

Пусть идеальная система совершает свободные колебания с частотой ω по закону $q_i(t) = y_i \sin \omega t$, где y_i — амплитуда колебаний, $i = 1, 2, \dots, s$. В моменты времени, когда система проходит через положение равновесия $q_i = 0$, ее потенциальная энергия (10.12) равна нулю, а кинетическая энергия (10.15) максимальна, т. е.

$$U = 0, \quad T = T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s m_{ij} y_i y_j.$$

В моменты времени, когда $\sin \omega t = \pm 1$, потенциальная энергия становится максимальной, а кинетическая обращается в нуль, т. е.

$$U = U_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{ij} y_i y_j, \quad T = 0.$$

На основании закона сохранения энергии (10.9) следует, что $T_{\max} = U_{\max}$, откуда получаем формулу Рэлея

$$\omega^2 = \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{ij} y_i y_j \right) / \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s m_{ij} y_i y_j \right) \quad (10.81)$$

или

$$\omega^2 = \frac{Y^T K Y}{Y^T M Y}. \quad (10.82)$$

Формула Рэлея дает точное значение собственной частоты колебаний, если вектор $Y = \{y_i\}$ точно представляет соответствующую форму колебаний, тогда эта формула переходит в (10.75).

Формула Рэлея позволяет установить следующие экстремальные принципы: 1) среди всех возможных значений вектора Y истинными формами колебаний будут те, которые сообщают дроби Рэлея [правые части (10.81) и (10.82)] стационарное значение;

2) форма колебаний, соответствующая низшей собственной частоте, сообщает дроби Рэлея минимальное значение, т. е.

$$\omega_1^2 = \min \frac{Y^T K Y}{Y^T M Y}, \quad (10.83)$$

где к сравнению допускаются любые формы возможных перемещений $Y \neq 0$.

Соотношение (10.83) позволяет получить приближенное завышенное значение низшей частоты колебаний, если низшую форму колебаний аппроксимировать некоторой заданной формой [8].

На основании формулы (10.81) Рэлеем доказаны теоремы о влиянии изменений массы и жесткости системы, а также наложенных на нее дополнительных связей [20]. Они заключаются в следующем: 1) увеличение массы системы уменьшает или в крайнем случае не изменяет ее собственные частоты; 2) увеличение жесткости и наложение идеальных геометрических связей приводят к увеличению собственных частот системы или в крайних случаях оставляют их без изменения.

10.3.6. Пример

В качестве примера рассмотрим систему с двумя степенями свободы, показанную на рис. 10.9, а. В качестве обобщенных координат $q_1(t)$ и $q_2(t)$, характеризующих продольные колебания этой системы, будем рассматривать абсолютные продольные перемещения сосредоточенных масс (в этом случае соотношения (10.4) имеют вид $u_1 = q_1$, $u_2 = q_2$).

Уравнения колебаний. Потенциальная энергия деформации двух пружин жесткости κ_1 и κ_2

$$U = \frac{1}{2} \kappa_1 q_1^2 + \frac{1}{2} \kappa_2 (q_2 - q_1)^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \mu_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \dot{q}_2^2.$$

Вариация работы возмущающих сил (10.7)

$$\delta A_p = P_1 \delta q_1 + P_2 \delta q_2,$$

поэтому в этом случае $Q_1 = P_1$, $Q_2 = P_2$.

Выражения T , Q_1 и Q_2 можно было также получить, используя общие формулы (10.15), (10.18), учитывая, что $u_1 = q_1$, $u_2 = q_2$. Далее для упрощения вычислений примем $\mu_1 = 4\mu$, $\mu_2 = \mu$, $\kappa_1 = 3\kappa$

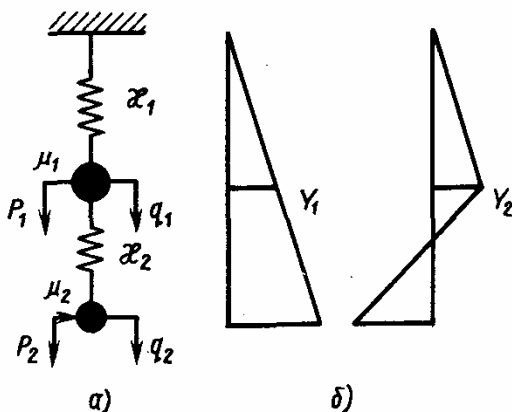


Рис. 10.9. Система с двумя степенями свободы (а) и формы ее собственных продольных колебаний (б)

$\kappa_2 = \kappa$. На основании уравнений Лагранжа (10.6) получим уравнения вынужденных колебаний

$$4\mu\ddot{q}_1 + 4\kappa q_1 - \kappa q_2 = P_1(t),$$

$$\mu\ddot{q}_2 - \kappa q_1 + \kappa q_2 = P_2(t)$$

или в матричном виде

$$M\ddot{q} + Kq = Q,$$

где $M = \begin{bmatrix} 4\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 4\kappa & -\kappa \\ -\kappa & \kappa \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$.

Собственные частоты и формы колебаний. Определим собственные частоты и формы колебаний. Для этого используется уравнение (10.67) $[K - \omega^2 M] Y = 0$ или в развернутом виде

$$(4\kappa - \omega^2 4\mu) y_1 - \kappa y_2 = 0,$$

$$-\kappa y_1 + (\kappa - \omega^2 \mu) y_2 = 0. \quad (10.84)$$

Частотное уравнение (10.68) $\det [K - \omega^2 M] = 0$ принимает вид

$$\begin{vmatrix} 4(\kappa - \omega^2 \mu) & -\kappa \\ -\kappa & \kappa - \omega^2 \mu \end{vmatrix} = 4(\kappa - \omega^2 \mu)^2 - \kappa^2 = 0.$$

Отсюда находим две собственные частоты $\omega_1^2 = \kappa/2\mu$, $\omega_2^2 = 3\kappa/2\mu$. Формы колебаний определяются из уравнений (10.84) при $\omega = \omega_1$, и $\omega = \omega_2$. При этом уравнения (10.84) линейно зависимы, так как определитель системы равен нулю, на основании чего одно из уравнений, например первое, можно опустить. Полагая для нормировки форм $y_1 = 1$, из второго уравнения при $\omega^2 = \omega_1^2$ находим $y_2 = 2$, а при $\omega^2 = \omega_2^2$ — $y_2 = -2$. Следовательно, формы колебаний будут

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}. \quad (10.85)$$

Эти формы показаны на рис. 10.9, б. Легко проверить, что они ортогональны с матрицами M и K , т. е.

$$Y_1^T M Y_2 = 0, \quad Y_1^T K Y_2 = 0.$$

Уравнения в нормальных координатах. Составим уравнения в нормальных координатах с помощью преобразования $q(t) = f_1(t) Y_1 + f_2(t) Y_2$ или в развернутом виде с учетом (10.85)

$$q_1 = f_1 + f_2, \quad q_2 = 2f_1 - 2f_2. \quad (10.86)$$

Коэффициенты обобщенных масс (10.74) для собственных форм колебаний имеют вид

$$m_1 = Y_1^T M Y_1 = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} 4\mu & 0 \\ 0 & 4\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 8\mu;$$

$$m_2 = Y_2^T M Y_2 = [1 \quad -2] \begin{bmatrix} 4\mu & 0 \\ 0 & 4\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 8\mu.$$

При этом $m_1 \omega_1^2 = 4\kappa$, $m_2 \omega_2^2 = 12\kappa$. Обобщенные силы (10.74) для собственных форм

$$F_1 = Y_1^T Q = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = P_1 + 2P_2;$$

$$F_2 = Y_2^T Q = [1 \quad -2] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = P_1 - 2P_2.$$

Уравнения в нормальных координатах (10.75) принимают вид

$$8\mu \ddot{f}_1 + 4\kappa f_1 = P_1(t) + 2P_2(t),$$

$$8\mu \ddot{f}_2 + 12\kappa f_2 = P_1(t) - 2P_2(t).$$

Эти независимые уравнения легко решаются при любых функциях сил $P_1(t)$ и $P_2(t)$. После этого по формулам (10.86) определяются перемещения $q_1(t)$ и $q_2(t)$.

10.4. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

10.4.1. Уравнения поперечных колебаний

Стержень (балка) является распространенной моделью при исследовании поперечных (изгибных) колебаний крыла, корпуса и других элементов летательных аппаратов. Искомой функцией в задачах о поперечных колебаниях стержней является прогиб $v(x, t)$ (рис. 10.10, а). Вводя инерционные силы — $m \ddot{v}$ и рассматривая равновесие элемента, показанного на рис. 10.10, б, получим следующие уравнения:

$$Q' - m\ddot{v} + q = 0, \quad M' - Q = 0. \quad (10.87)$$

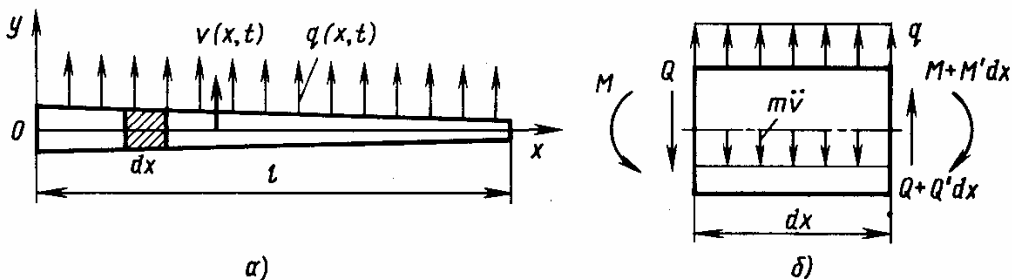


Рис. 10.10. Стержень (а) и выделенный из него элемент (б)

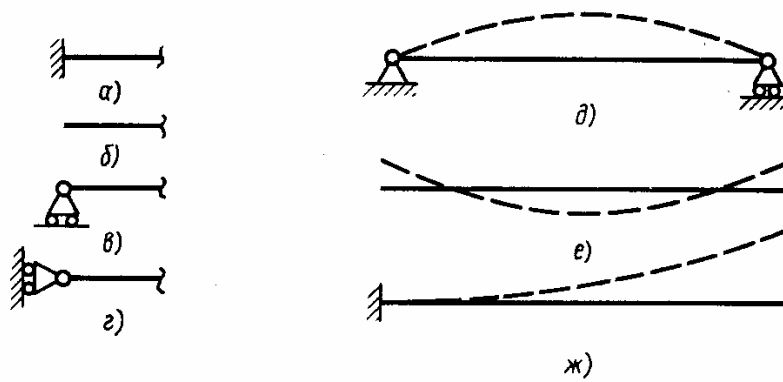


Рис. 10.11. Шарнирно опертый (а), свободный (б) и консольный (в) стержень

Здесь и далее штрих обозначает производную по координате x , а две точки — вторую производную по времени t . На основании закона плоских сечений изгибающий момент M связан с кривизной оси стержня v'' равенством (1.38), т. е.

$$M = -EIv''. \quad (10.88)$$

Из второго уравнения (10.87) с учетом (10.88) имеем

$$Q = M' = -(EIv'')'. \quad (10.89)$$

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня переменного сечения

$$(EIv'')'' + m\ddot{v} = q. \quad (10.90)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять граничным условиям (1.40), таким же, как и в задачах статики, а также начальным условиям, определяющим перемещение v и скорость $\dot{v}$ точек стержня при $t = 0$. Типовые варианты граничных условий на левом крае балки показаны на рис. 10.11, а, б, в, г. С учетом равенств (10.88), (10.89), граничные условия при $x = 0$, l могут быть записаны в форме следующих комбинаций:

$$v = 0 \text{ или } Q = -(EIv'')' = 0, \quad (10.91)$$

$$v' = 0 \text{ или } M = -EIv'' = 0.$$

Приведем основные энергетические соотношения. Потенциальная и кинетическая энергия U и T , а также вариации работы внешних и инерционных сил δA_p и δA_i определяются равенствами

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 dx, \quad T = \frac{1}{2} \int_0^l m \dot{v}^2 dx, \quad (10.92)$$

$$\delta A_p = \int_0^l q \delta v dx, \quad \delta A_i = - \int_0^l m \ddot{v} \delta v dx.$$

10.4.2. Собственные колебания

Пусть внешняя нагрузка отсутствует — $q(x, t) \equiv 0$. Тогда однородное дифференциальное уравнение, соответствующее (10.90)

$$(EIv'')'' + m\ddot{v} = 0, \quad (10.93)$$

допускает решение вида

$$v(x, t) = V(x) \sin \omega t, \quad (10.94)$$

где $V(x)$ — неизвестная форма колебаний и ω — неизвестная частота. Подставляя выражение (10.94) в уравнение (10.93), получим

$$(EIV'')'' - \omega^2 mV = 0. \quad (10.95)$$

Граничные условия (10.91) принимают вид

$$V = 0 \text{ или } (EIV'')' = 0, \quad (10.96)$$

$$V' = 0 \text{ или } EIV'' = 0.$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения четвертого порядка (10.95) с неизвестным параметром ω складывается из его четырех линейно независимых решений с неизвестными множителями (константами). Подстановка этого решения в граничные условия на краях $x = 0$ и $x = l$ (10.96) приводит к системе четырех линейных однородных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных констант. Эта система имеет ненулевое решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Приравняв нулю определитель системы, получим частотное уравнение в виде трансцендентного уравнения, зависящего от частоты ω . Это уравнение имеет бесчисленное множество корней $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m, \dots$, называемых собственными частотами (обычно они располагаются в порядке возрастания). В общем случае для рассматриваемой задачи все собственные частоты являются действительными неотрицательными числами. Для каждой частоты ω_n затем определяются четыре произвольные константы и находится соответствующая форма колебаний $V_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$. Так как задача однородная, то каждая форма колебаний определяется с точностью до произвольного постоянного множителя. Этот множитель выбирают исходя из принятого условия нормировки собственных форм колебаний.

В качестве примера рассмотрим собственные колебания стержня постоянного сечения ($EI = \text{const}$, $m = \text{const}$). В этом случае дифференциальное уравнение (10.95) принимает вид

$$V^{IV} - k^4 V = 0, \quad (10.97)$$

где $k^4 = \omega^2 \frac{m}{EI}$.

Общее решение уравнения (10.97)

$$V(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx, \quad (10.98)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Для шарнирно опертого стержня (см. рис. 10.11, а) на концах отсутствуют прогиб и изгибающий момент, т. е. согласно (10.96) $V(0) = V(l) = 0$ и $V''(0) = V''(l) = 0$. Подставляя (10.98) в эти четыре условия, получим

$$C_2 + C_4 = 0,$$

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 \operatorname{sh} kl + C_4 \operatorname{ch} kl = 0, \quad (10.99)$$

$$-C_2 + C_4 = 0,$$

$$-C_1 \sin kl - C_2 \cos kl + C_3 \operatorname{sh} kl + C_4 \operatorname{ch} kl = 0.$$

Очевидно, здесь сразу можно принять $C_2 = C_4 = 0$, и система (10.99) сводится к двум уравнениям:

$$C_1 \sin kl + C_3 \operatorname{sh} kl = 0, \quad -C_1 \sin kl + C_3 \operatorname{sh} kl = 0. \quad (10.100)$$

Определитель этой системы $\Delta(k) = 2 \sin kl \operatorname{sh} kl$ следует приравнять нулю. Из этого условия ($\sin kl = 0$ при $kl \neq 0$) получим $kl = n\pi$ ($n = 1, 2, 3 \dots$), т. е. последовательность квадратов собственных частот

$$\omega_n^2 = (\pi n)^4 \frac{EI}{ml^4}. \quad (10.101)$$

При $kl = n\pi$ уравнения (10.100) дают $C_3 = 0$. Полагая оставшуюся отличной от нуля и неопределенной константу $C_1 = 1$, запишем соответствующие формы колебаний

$$V_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (10.102)$$

Минимальная собственная частота ω_1^2 реализуется при $n = 1$. Соответствующая форма колебаний (10.102) показана на рис. 10.11, а пунктирной линией.

Получим условия ортогональности собственных форм колебаний. Рассмотрим уравнение (10.95) и предположим, что известны собственные формы колебаний $V_m(x)$, $V_n(x)$ и соответствующие им собственные частоты ω_m , ω_n . Они удовлетворяют уравнению (10.95), т. е.

$$(EIV_m)'' - \omega_m^2 m V_m = 0, \quad (EIV_n)'' - \omega_n^2 m V_n = 0.$$

Умножим первое из этих уравнений на V_n , а второе — на V_m и проинтегрируем их в пределах от 0 до l :

$$\begin{aligned} \int_0^l (EIV_m'')' V_n dx - \omega_m^2 \int_0^l m V_m V_n dx &= 0, \\ \int_0^l (EIV_n'')' V_m dx - \omega_n^2 \int_0^l m V_n V_m dx &= 0. \end{aligned} \quad (10.103)$$

Произведем интегрирование по частям в первом слагаемом этих уравнений

$$\begin{aligned} \int_0^l (EIV_m'')' V_n dx &= [(EIV_m')' V_n]_0^l - \int_0^l (EIV_m')' V_n' dx = \\ &= [(EIV_m')' V_n]_0^l - [EIV_m' V_n']_0^l + \int_0^l EIV_m' V_n'' dx; \\ \int_0^l (EIV_n'')' V_m dx &= [(EIV_n')' V_m]_0^l - [EIV_n' V_m']_0^l + \\ &+ \int_0^l EIV_n' V_m'' dx. \end{aligned} \quad (10.104)$$

В силу граничных условий (10.96) внеинтегральные члены в этих соотношениях равны нулю, а остающиеся в правых частях интегралы являются одинаковыми. Вычитая с учетом (10.104) первое уравнение из второго, получим

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^l m V_m V_n dx = 0.$$

Откуда при $\omega_n^2 \neq \omega_m^2$ следует

$$\int_0^l m V_m V_n dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n. \quad (10.105)$$

Из уравнений (10.103) с учетом условий (10.104), (10.105) получим

$$\int_0^l (EIV_m'')' V_n dx = \int_0^l EIV_m' V_n'' dx = 0, \quad m \neq n. \quad (10.106)$$

Условия (10.105), (10.106) называются условиями ортогональности собственных форм колебаний. Эти условия означают, что работы инерционных и упругих сил какой-либо формы колебаний на перемещениях другой формы равны нулю. Собственные

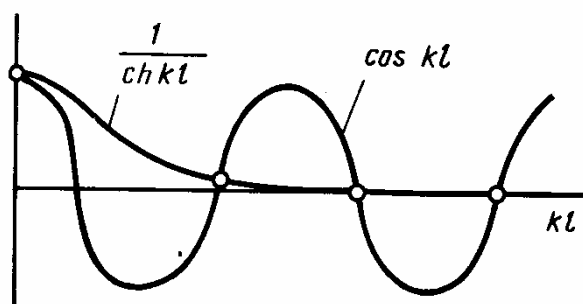


Рис. 10.12. Графическое решение частотного уравнения

формы колебаний однородного стержня $V_n(x)$ называются балочными функциями. Эти функции для нескольких низших собственных форм колебаний при различных комбинациях граничных условий на краях затабулированы и широко используются в качестве заданных функций при приближенном решении задач изгиба, устойчивости и колебаний стержней, пластин и пологих оболочек с помощью методов Рэлея—Ритца, Бубнова—Галеркина и Власова—Канторовича.

Рассмотрим однородный свободный стержень, показанный на рис. 10.11, б, е. При $x = 0$ и $x = l$ у этого стержня отсутствуют изгибающий момент M и перерезывающая сила Q , т. е. согласно (10.96) $V''(0) = V''(l) = 0$, $V'''(0) = V'''(l) = 0$. Подставляя решение (10.98) в эти условия и приравнявая нулю определитель полученной системы четырех линейных алгебраических уравнений, будем иметь $\Delta(k) = \cos kl \operatorname{ch} kl - 1 = 0$. Корни этого уравнения могут быть определены графически как точки пересечения кривых, соответствующих функциям $\cos kl$ и $\operatorname{ch}^{-1} kl$ (рис. 10.12): $k_0 l = 0$, $k_1 l = 1,51\pi$, $k_n l \approx (2n + 1)\pi/2$ при $n = 2, 3, \dots$. Квадраты собственных частот и формы колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= 0, \quad \omega_1^2 = (1,51\pi)^4 \frac{EI}{ml^4}, \\ \omega_n^2 &= \left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^4 \frac{EI}{ml^4} \quad \text{при } n = 2, 3, \dots, \\ V_n(x) &= A_n (\sin k_n x + \operatorname{sh} k_n x) + \cos k_n x + \operatorname{ch} k_n x, \\ A_n &= \frac{\operatorname{ch} k_n l - \cos k_n l}{\operatorname{sh} k_n l - \sin k_n l}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10.107)$$

При нулевом корне $k = k_0 = 0$ уравнение (10.97) имеет решение $V_0(x) = A + Bx$, где A и B — произвольные константы. Функция $V_0(x)$ представляет собой поперечное перемещение недефор-

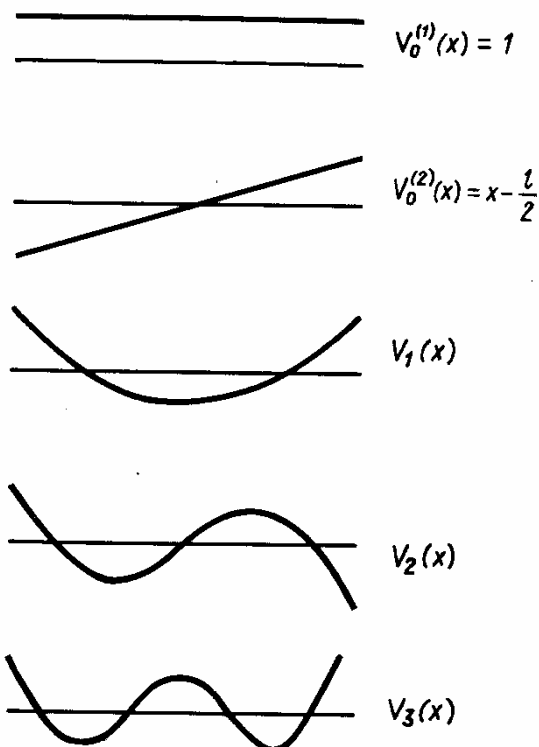


Рис. 10.13. Собственные формы колебаний свободного стержня

мированного свободного стержня: она ортогональна формам упругих колебаний $V_n(x)$. Форму перемещений $V_0(x)$ можно представить в виде двух взаимно ортогональных составляющих

$$V_0^{(1)} = 1, \quad V_0^{(2)} = x - \frac{l}{2}. \quad (10.108)$$

Формы собственных колебаний свободного однородного стержня (10.107), включая формы (10.108), показаны на рис. 10.13.

10.4.3. Вынужденные колебания

Пусть решена задача о собственных колебаниях и найдены собственные частоты и формы колебаний ω_m и $V_m(x)$, $m = 1, 2, \dots$.

Решение задачи о вынужденных колебаниях будем искать в виде разложения по собственным формам колебаний

$$v(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) V_m(x), \quad (10.109)$$

где $f_m(t)$ — неизвестные функции, которые называются нормальными координатами. Подставим ряд (10.109) в уравнение (10.90)

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m (EIV_m'')'' + \sum_{m=1}^{\infty} f_m m V_m = q.$$

Умножим это уравнение на V_n , полагая $n = 1, 2, \dots$, и проинтегрируем почленно в пределах от 0 до l :

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m \int_0^l (EIV_m'')'' V_n dx + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \int_0^l m V_m V_n dx = \int_0^l q V_n dx.$$

В силу условий ортогональности (10.105), (10.106) в бесконечных суммах отличны от нуля только члены при $m = n$. Получим

$$f_n \int_0^l (EIV_n'')'' V_n dx + f_n \int_0^l m V_n^2 dx = \int_0^l q V_n dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Обозначим

$$m_n = \int_0^l m V_n^2 dx, \quad k_n = \int_0^l (EIV_n'')'' V_n dx = \int_0^l EI (V_n'')^2 dx, \quad (10.110)$$

$$F_n(t) = \int_0^l q(x, t) V_n(x) dx,$$

где m_n , k_n и F_n — называются обобщенной массой, обобщенной жесткостью и обобщенной силой n -й формы колебаний.

Из уравнений (10.103) при $m = n$ следует, что

$$k_n = m_n \omega_n^2. \quad (10.111)$$

Уравнения вынужденных колебаний в нормальных координатах с учетом обозначений (10.110), (10.111) записываются в виде

$$m_n \ddot{f}_n + m_n \omega_n^2 f_n = F_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (10.112)$$

Получим начальные условия для нормальных координат. Подставим разложение (10.109) в начальные условия $v(x, 0) = \psi_1(x)$, $\dot{v}(x, 0) = \psi_2(x)$, где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — известные функции:

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(0) V_m(x) = \psi_1(x), \quad \sum_{m=1}^{\infty} \dot{f}_m(0) V_m(x) = \psi_2(x).$$

Умножим эти условия на $m(x) V_n(x)$ при $n = 1, 2, \dots$ и проинтегрируем от 0 до l . С учетом условий ортогональности (10.105) и обозначения для m_n (10.110) получим начальные условия в виде

$$f_n(0) = \frac{1}{m_n} \int_0^l m \psi_1 V_n dx, \quad \dot{f}_n(0) = \frac{1}{m_n} \int_0^l m \psi_2 V_n dx. \quad (10.113)$$

В уравнениях (10.112) может быть искусственно учтено «эквивалентное» вязкое демпфирование так же, как это было сделано для системы с конечным числом степеней свободы. Получим

$$m_n \ddot{f}_n + m_n \omega_n \varepsilon_n \dot{f}_n + m_n \omega_n^2 f_n = F_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (10.114)$$

где коэффициент ε_n для каждой учитываемой формы колебаний определяется на основе статистических данных или на основе экспериментальных данных по свободным или резонансным колебаниям.

Выражения потенциальной и кинетической энергий (10.92) с учетом разложения (10.109) и условий ортогональности собственных форм колебаний (10.105), (10.106) записываются в виде одинарных рядов, содержащих только квадраты нормальных координат

$$U = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} k_n f_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} m_n \omega_n^2 f_n^2, \quad (10.115)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} m_n \dot{f}_n^2.$$

10.4.4. Метод Рэлея—Ритца

В соответствии с изложенным в разд. 10.1.9 для реализации этого метода прогиб балки при колебаниях находим приближенно в виде конечного ряда

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) \varphi_i(x), \quad (10.116)$$

где $\varphi_i(x)$ — заданные линейно независимые функции, представляющие возможные перемещения; в случае изгиба они должны быть непрерывными функциями, имеющими непрерывные первые производные (так как упругая линия балки не может иметь разрыв или излом) и должны удовлетворять геометрическим граничным условиям, если балка закреплена. Неизвестные функции $q_i(t)$ рассматриваются как обобщенные координаты.

Запишем кинетическую и потенциальную энергию балки в обобщенных координатах.

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \dot{v}^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l m \sum_{i=1}^s \dot{q}_i \varphi_i \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \varphi_j dx$$

или

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad m_{ij} = \int_0^l m \varphi_i \varphi_j dx. \quad (10.117)$$

Потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI \sum_{i=1}^s q_i \varphi_i'' \sum_{j=1}^s q_j \varphi_j'' dx$$

или

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{ij} q_i q_j, \quad k_{ij} = \int_0^l EI \varphi_i'' \varphi_j'' dx. \quad (10.118)$$

Вариация работы нагрузки

$$\delta A_p = \int_0^l q \delta v dx = \int_0^l q \sum_{i=1}^s \delta q_i \varphi_i dx$$

или

$$\delta A_p = \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i, \quad Q_i(t) = \int_0^l q(x, t) \varphi_i(x) dx. \quad (10.119)$$

Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах (10.6) принимают такой же вид, как для системы с конечным числом степеней свободы (10.19):

$$\sum_{j=1}^s m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^s k_{ij} q_j = Q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (10.120)$$

Если в качестве заданных функций $\varphi_i(x)$ взять собственные формы колебаний $V_i(x)$, то в силу условий ортогональности (10.105), (10.106) уравнения (10.120) распадутся на несвязанные уравнения и будут совпадать с уравнениями в нормальных координатах (10.112). При этом $m_{ij} = 0$, $k_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $m_{ii} = m_i$, $k_{ii} = k_i = m_i \omega_i^2$, $q_i = f_i$, $Q_i = F_i$.

В качестве примера рассмотрим консольную балку постоянного сечения ($EI = \text{const}$, $m = \text{const}$), показанную на рис. 10.11, ж

Определим низшую частоту собственных колебаний, ограничиваясь одночленным приближением метода Рэлея—Ритца, т. е. $v(x, t) = q_1(t) \varphi_1(x)$. Заданная функция $\varphi_1(x)$ должна удовлетворять кинематическим граничным условиям жесткого закрепления $v = 0$, $v' = 0$ при $x = 0$ и, кроме того, так как она одна, функция $\varphi_1(x)$ должна быть «подходящей» аппроксимацией низшей формы колебаний. Этим условиям удовлетворяет функция $\varphi_1(x) = 1 - \cos(\pi x/2l)$, показанная пунктиром на рис. 10.11, ж. Вычислим коэффициенты m_{11} и k_{11} по формулам (10.117), (10.118). Получим

$$m_{11} = \int_0^l m \varphi_1^2 dx = 0,226ml, \quad k_{11} = \int_0^l EI (\varphi_1'')^2 dx = 3,04 \frac{EI}{l^3}.$$

Уравнение свободных колебаний при $s = 1$

$$m_{11}\ddot{q}_1 + k_{11}q_1 = 0$$

имеет решение $q_1(t) = y_1 \sin \omega t$, где y_1 — амплитуда колебаний по форме $\varphi_1(x)$ и $\omega = \omega_1$ — частота колебаний, квадрат которой, как следует из уравнения, равен $\omega_1^2 = k_{11}/m_{11}$. С учетом полученных значений m_{11} и k_{11} приближенное значение квадрата низшей частоты $\omega_1^2 = 13,46EI/ml^4$ отличается от точного значения $\omega_1^2 = 12,36EI/ml^4$ на 8,8 %. Отметим, что задание функции $\varphi_1(x)$ по существу соответствует наложению на стержень дополнительных связей, поэтому приближенные значения частоты здесь являются завышенными по сравнению с точными, что находится в согласии с теоремой Рэлея о связях (см. разд. 10.3.5).

10.4.5. Метод Бубнова—Галеркина

Метод Бубнова—Галеркина является другим приближенным методом, с помощью которого задачу о колебаниях упругой системы с распределенными параметрами можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае изгибных колебаний стержня задача описывается дифференциальным уравнением в частных производных (10.90) с граничными условиями (10.91). Приближенное решение этой задачи по методу Бубнова—Галеркина строится следующим образом. Функция перемещений находится в виде конечного ряда (10.116), где $\varphi_j(x)$ — заданные линейно независимые непрерывные функции с непрерывными первыми производными, удовлетворяющие всем граничным условиям (10.91); $q_j(t)$ — неизвестные функции, которые определяются из уравнений типа (1.75), т. е.

$$\int_0^l \left[\sum_{j=1}^s q_j (EI \varphi_j'')'' + \sum_{j=1}^s \ddot{q}_j m \varphi_j - q \right] \varphi_i dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Эти уравнения запишем в виде

$$\sum_{j=1}^s m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^s k_{ij} q_j = Q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (10.121)$$

где $m_{ij} = \int_0^l m \varphi_i \varphi_j dx$, $k_{ij} = \int_0^l (EI \varphi_j'')' \varphi_i dx$,

$$Q_i(t) = \int_0^l q(x, t) \varphi_i(x) dx.$$

Коэффициенты k_{ij} можно преобразовать путем двукратного интегрирования по частям

$$k_{ij} = [(EI \varphi_j'')' \varphi_i]_{x=0}^{x=l} - [EI \varphi_j' \varphi_i']_{x=0}^{x=l} + \int_0^l EI \varphi_j' \varphi_i' dx.$$

Так как каждая из заданных функций удовлетворяет граничным условиям (10.91), то при любых их вариантах внеинтегральные члены обращаются в нуль и поэтому

$$k_{ij} = \int_0^l (EI \varphi_j'')' \varphi_i dx = \int_0^l (EI \varphi_i'')' \varphi_j dx = \int_0^l EI \varphi_i' \varphi_j' dx. \quad (10.122)$$

Таким образом, коэффициенты уравнений, полученных по методу Бубнова—Галеркина, являются симметричными: $m_{ij} = m_{ji}$, $k_{ij} = k_{ji}$.

Сравнивая метод Бубнова—Галеркина с методом Рэлея—Ритца, подчеркнем, что в соответствии с методом Бубнова—Галеркина заданные функции $\varphi_i(x)$ должны удовлетворять всем граничным условиям, в соответствии с методом Рэлея—Ритца достаточно удовлетворить только кинематическим граничным условиям. Однако, если в соответствии с методом Рэлея—Ритца заданные функции $\varphi_i(x)$ подчинить всем граничным условиям, тогда будут выполняться условия (10.122) и уравнения в обобщенных координатах (10.120), полученные этим методом, будут полностью совпадать с уравнениями (10.121), полученными методом Бубнова—Галеркина.

В качестве примера рассмотрим шарнирно опертую балку постоянного сечения (см. рис. 10.11, д). Определим низшую собственную частоту колебаний, используя одночленное приближенное решение по методу Бубнова—Галеркина, т. е. $v(x, t) = q_1(t) \varphi_1(x)$.

Функция $\varphi_1(x)$ должна удовлетворять граничным условиям $v = 0$ и $v'' = 0$ при $x = 0$ и $x = l$, т. е. $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1''(0) = 0$,

$\varphi_1(l) = 0$, $\varphi_1'(l) = 0$. В соответствии с (10.102) возьмем $\varphi_1(x) = \sin(\pi x/l)$. Найдем коэффициенты

$$m_{11} = m \int_0^l \varphi_1^2 dx = \frac{ml}{2},$$

$$k_{11} = EI \int_0^l \varphi_1^{IV} \varphi_1 dx = EI \int_0^l (\varphi_1'')^2 dx = \frac{\pi^4}{2} \frac{EI}{l^3}.$$

Квадрат низшей частоты при одночленном приближении $\omega_1^2 = k_{11}/m_{11} = \pi^4 EI/ml^4$. Это значение является точным, поскольку заданная функция $\varphi_1(x)$ является точной низшей формой собственных колебаний.

Заметим, что метод Бубнова—Галеркина, так же как метод Рэлея—Ритца, всегда дает завышенные или, в крайнем случае, точные значения собственных частот (точные значения частот получаются тогда, когда с помощью разложения (10.116) можно точно представить формы собственных колебаний).

10.4.6. Учет деформации сдвига и продольной силы в задачах о колебаниях балок

В тонкостенных балках, каким является корпус летательного аппарата (см. гл. 5), существенное влияние на характеристики поперечных колебаний могут оказывать деформации сдвига. Деформации сдвига в поперечном сечении балки обычно распределяются неравномерно, за счет чего поперечное сечение деформируется. В приближенной теории в каждом поперечном сечении учитываются только «осредненные» в некотором смысле деформации сдвига, в результате чего считается, что поперечные сечения, оставаясь плоскими и недеформированными, могут поворачиваться и сдвигаться друг относительно друга. Для иллюстрации схемы вывода соответствующих уравнений рассмотрим сплошную балку и обобщим соотношения, полученные в разд. 1.3.3. Как отмечалось в этом разделе, закон плоских сечений соответствует равенствам $\epsilon_y = \partial v / \partial y = 0$ и $\gamma_{xy} = 0$ (см. рис. 1.4). Сохраняя только первую часть этой гипотезы, откуда следует, что $v = v(x)$, положим $\gamma_{xy} = \psi(x)$, где $\psi(x)$ — осредненная по сечению, например в энергетическом смысле, деформация сдвига. Тогда, интегрируя по переменной y соотношение

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \psi,$$

получим $u = u_0(x) + y(\psi - v')$. В случае поперечного изгиба осевое перемещение нейтральной оси балки отсутствует, т. е. можно положить $u_0 \equiv 0$ и записать по аналогии с (1.32)

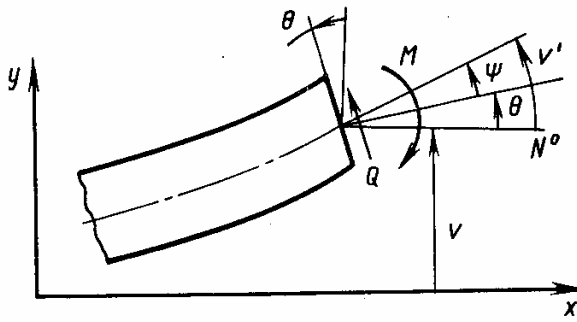


Рис. 10.14. Статические и кинематические факторы, определяющие напряженно-деформированное состояние балки

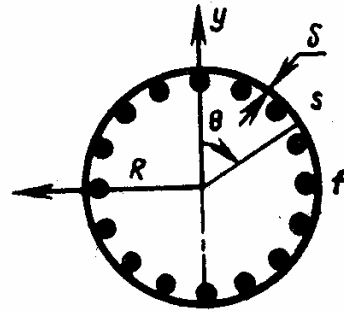


Рис. 10.15. Сечения тонкостенной балки с двумя осями симметрии

$u = -y\theta$, где $\theta = v' - \psi$ или $v' = \theta + \psi$. Таким образом, угол между касательной к нейтральной оси и осью x складывается из угла поворота сечения за счет изгиба θ и угла сдвига ψ (рис. 10.14). Далее имеем $e_x = du/dx = -y\theta'$, $\sigma_x = Ee_x = -Ey\theta'$, $M = -EI\theta'$. При отсутствии сдвига, т. е. при $\psi = 0$ имеем $\theta = v'$ и $M = -EIv''$, т. е. первое равенство (1.38). В рассматриваемом случае по аналогии с (10.92) будем иметь для потенциальной энергии, связанной с изгибом

$$U_{\pi} = \frac{1}{2} \int_0^l EI (\theta')^2 dx. \quad (10.123)$$

Это выражение справедливо и для тонкостенной балки с сечением, приведенным, например, на рис. 10.15. Отметим, что, рассматривая далее тонкостенные балки переменного сечения, будем считать, что углы между осью балки и продольными элементами достаточно малы и влиянием конусности в том смысле, в котором она обсуждалась в разд. 5.5, можно пренебречь. Потенциальную энергию, вызванную сдвигом, можно записать следующим образом:

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^l GF_c \psi^2 dx, \quad (10.124)$$

где F_c — эквивалентная площадь поперечного сечения, работающая на сдвиг. Например, для балки, сечение которой показано на рис. 10.15, $I = \pi R^3 \delta_1$, $F_c = 2\pi R \delta$, где δ — толщина обшивки; $\delta_1 = \delta + (nf/2\pi R)$ — приведенная толщина обшивки с учетом n -стрингеров с площадью сечения f . При сжатии балки осевой силой N^0 последняя совершает работу, определяемую формулой (9.21) (см. гл. 9), т. е.

$$A_N = \frac{1}{2} \int_0^l N^0 (v')^2 dx. \quad (10.125)$$

Соотношения (10.123), (10.125) позволяют записать потенциальную энергию балки

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [EI(\theta')^2 + GF_c(v' - \theta)^2 - N^0(v')^2] dx. \quad (10.126)$$

Вариация работы внешних и инерционных нагрузок

$$\delta A_p = \int_0^l q \delta v dx, \quad (10.127)$$

$$\delta A_i = - \int_0^l (m\ddot{v} \delta v + I_0 \ddot{\theta} \delta \theta) dx, \quad (10.128)$$

где наряду с распределенной массой $m(x)$ учитываются распределенные массовые моменты инерции поперечных сечений $I_0(x)$.

Дифференциальные уравнения колебаний балки можно получить на основе принципа Даламбера—Лагранжа (10.1): $\delta U - \delta A_p - \delta A_i = 0$. В результате получим

$$\begin{aligned} (EI\theta')' + GF_c(v' - \theta) - I_0\ddot{\theta} &= 0, \\ [GF_c(v' - \theta)]' - (N^0v')' - m\ddot{v} + q &= 0. \end{aligned} \quad (10.129)$$

Соотношения (10.126)—(10.128) могут быть использованы для динамического анализа тонкостенных балок типа корпуса летательного аппарата методами Рэлея—Ритца и конечных элементов.

10.4.7. Метод конечных элементов

При учете сдвигов, инерции вращения и продольной силы задача о поперечных колебаниях балки существенно усложняется и ее решение получают различными численными методами. Рассмотрим применение метода конечных элементов.

Разобьем балку на n конечных элементов (отсеков). В качестве обобщенных координат будем рассматривать поперечные перемещения и углы поворота поперечных сечений на краях отсеков $v_i(t)$ и $\theta_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$ (рис. 10.16).

Рассмотрим первый отсек ($i = 1$) (рис. 10.16, б). Перемещение v и угол поворота θ в любой точке отсека выражаются через

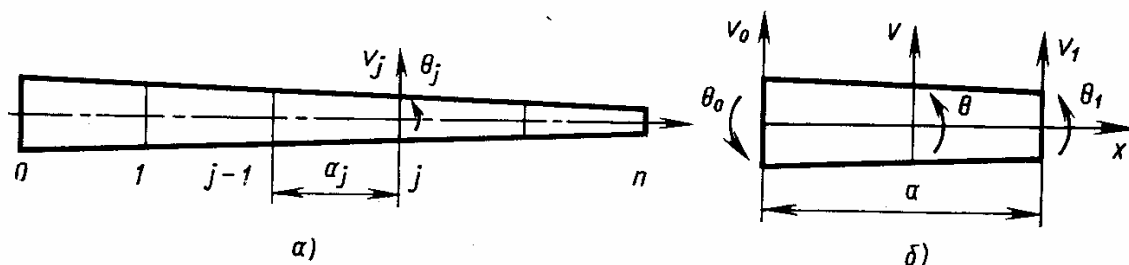


Рис. 10.16. Схема членения балки (а) на конечные элементы (б)

перемещения и углы поворота на краях $v_0, v_1, \theta_0, \theta_1$, которые в общем случае можно представить в виде

$$\begin{aligned} v &= v_0 \varphi_0(x) + \theta_0 \psi_0(x) + v_1 \varphi_1(x) + \theta_1 \psi_1(x), \\ \theta &= v_0 \eta_0(x) + \theta_0 \chi_0(x) + v_1 \eta_1(x) + \theta_1 \chi_1(x). \end{aligned} \quad (10.130)$$

Формы деформации отсека связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - \varphi_0, \quad \psi_1 = x - a(1 - \varphi_0) - \psi_0, \\ \eta_1 &= -\eta_0, \quad \chi_1 = 1 + a\eta_0 - \chi_0. \end{aligned} \quad (10.131)$$

которые следуют из того, что выражения (10.130) должны быть справедливы также и в случае недеформируемого отсека, т. е. в случае, когда $v = A + Bx$ и $\theta = B$, где A и B — произвольные константы.

Зависимости типа (10.130) получим с помощью решения статической задачи при $m = I_0 = q = N^0 = 0$, считая в пределах длины отсека жесткости EI и GF_0 постоянными. В этом случае уравнения (10.129) преобразуются к виду

$$\theta'' = 0, \quad v' = \theta - \frac{EI}{GF_0} \theta'' \quad (10.132)$$

с граничными условиями

$$v(0) = v_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad v(a) = v_1, \quad \theta(a) = \theta_1. \quad (10.133)$$

Решение уравнений (10.132) следующее:

$$\begin{aligned} \theta &= C_0 + C_1 x + C_2 x^2, \\ v &= C_0 x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \frac{x^3}{3} - 2C_2 \frac{EI}{GF_0} x + C_3. \end{aligned}$$

Произвольные константы C_0, C_1, C_2, C_3 выражаются через $v_0, \theta_0, v_1, \theta_1$ на основании условий (10.133). В результате получим соотношения (10.130), в которых следует принять

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1 - \frac{(1-\kappa)}{a} x - \frac{3\kappa}{a^2} x^2 + 2 \frac{\kappa}{a^3} x^3, \\ \psi_0 &= \frac{1+\kappa}{2} x - \frac{1+3\kappa}{2a} x^2 + \frac{\kappa}{a^3} x^3, \\ \eta_0 &= \frac{d\varphi_0}{dx} + \frac{1-\kappa}{a}, \quad \chi_0 = \frac{d\psi_0}{dx} + \frac{1-\kappa}{2}, \end{aligned} \quad (10.134)$$

$$\kappa = \left(1 + \frac{12}{a^3} \frac{EI}{GF_0}\right)^{-1}.$$

Если пренебречь сдвигом, то $GF_0 \rightarrow \infty$ и $\kappa = 1$.

Потенциальную энергию первого отсека определим по формуле (10.126) при $l = a$. С учетом (10.131), (10.134), считая EI , GF_e и N^0 постоянными, получим

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= \frac{1}{2} b (v_0 - v_1)^2 + c (v_0 - v_1) (\theta_0 + \theta_1) + \\ &\quad + \frac{1}{2} d (\theta_0 - \theta_1)^2 + ca\theta_0\theta_1, \\ b &= 12EI \frac{x}{a^3} - \frac{N^0}{a} \left(1 + \frac{x^2}{5} \right), \\ c &= 6EI \frac{x}{a^2} - N^0 \frac{x^2}{10}, \\ d &= EI \frac{1+3x}{a} - N^0 a \left(\frac{1}{12} + \frac{x^2}{20} \right). \end{aligned} \quad (10.135)$$

Кинетическая энергия отсека и вариация работы внешних сил

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^a (m\dot{v}^2 + I_0\dot{\theta}^2) dx, \quad (10.136)$$

$$\delta A_p^{(1)} = \int_0^a q\delta v dx$$

также записываются в обобщенных координатах $v_0, \theta_0, v_1, \theta_1$ с учетом выражений (10.130), (10.131), (10.134). В случае коротких отсеков функции v и θ при вычислении кинетической энергии и вариации работы внешних нагрузок можно аппроксимировать линейными функциями

$$v = v_0 + (v_1 - v_0) \frac{x}{a}, \quad \theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0) \frac{x}{a}.$$

По аналогии с первым отсеком ($j = 1$) записываются выражения $U^{(j)}, T^{(j)}$ и $\delta A_p^{(j)}$ для других отсеков в зависимости от $v_{j-1}, \theta_{j-1}, v_j, \theta_j, j = 1, 2, \dots, n$. В результате получаем потенциальную энергию, кинетическую энергию и вариацию внешних сил для всей балки

$$U = \sum_{j=1}^n U^{(j)}, \quad T = \sum_{j=1}^n T^{(j)}, \quad \delta A_p = \sum_{j=1}^n \delta A_p^{(j)}; \quad (10.137)$$

после этого составляются уравнения Лагранжа в обобщенных координатах $v_i, \theta_i, i = 0, 1, \dots, n$.

В некоторых случаях для упрощения вычислений распределенную массу балки и распределенную нагрузку можно сосредоточить в расчетных сечениях. Тогда

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n (\mu_j \dot{v}_j^2 + 2S_j \dot{v}_j \dot{\theta}_j + I_j \dot{\theta}_j^2), \quad (10.138)$$

$$\delta A_p = \sum_{j=0}^n (P_j \delta v_j + M_j \delta \theta_j),$$

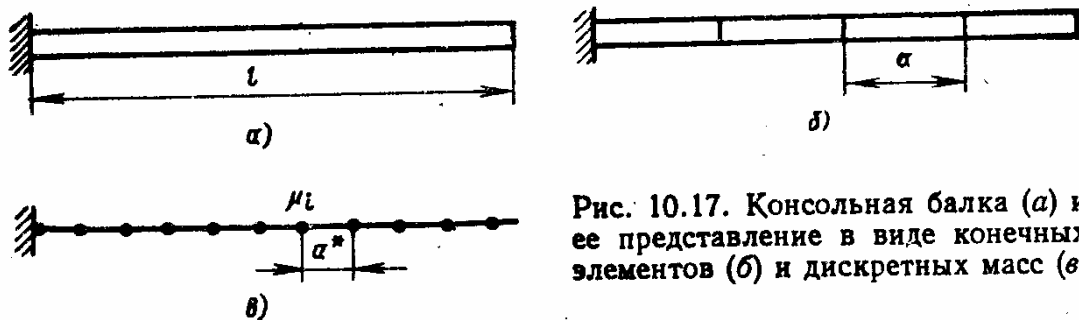


Рис. 10.17. Консольная балка (а) и ее представление в виде конечных элементов (б) и дискретных масс (в)

где μ_j , S_j , I_j , $P_j(t)$, $M_j(t)$ — приведенные и сосредоточенные в j -м сечении масса, статический момент, момент инерции, поперечная сила и момент.

Для оценки точности метода в качестве примера рассмотрим консольно закрепленную балку постоянного сечения без учета сдвигов и инерции вращения $\kappa = 1$, $I_0 \approx 0$ (рис. 10.17, а).

Ниже для сравнения приведены квадраты четырех низших безразмерных частот поперечных колебаний $\bar{\omega}_k^2 = \omega_k^2 (ml^4/EI)$ при $N^0 = 0$, полученные на основании: 1) точного решения; 2) метода конечных элементов при $n = 4$, $a = l/4$ (см. рис. 10.17, б); 3) метода сосредоточенных масс при $n = 10$, $a^* = l/(10 + 0,5)$, $\mu_i = ma^*$, $I_i = S_i = 0$ (см. рис. 10.17, в).

	$\bar{\omega}^2$	$\bar{\omega}_2^2$	$\bar{\omega}_3^2$	$\bar{\omega}_4^2$
1)	12,3624	485,5	3807	14617
2)	12,3632	486,6	3866	15045
3)	12,3910	491,7	3890	15053

10.5. КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

10.5.1. Основные уравнения и некоторые точные решения

В случае пластин и оболочек точные решения задачи определения собственных частот и форм колебаний могут быть получены только в некоторых частных случаях, когда применим метод разделения переменных и когда полученные при этом обыкновенные дифференциальные уравнения могут быть решены точно и точно удовлетворены заданные граничные условия. Примерами таких случаев являются прямоугольные пластины и цилиндрические круговые панели (оболочки) постоянной толщины, у которых два противоположных края являются шарнирно опертыми, а также круговые цилиндрические оболочки постоянной толщины.

Уравнение поперечных колебаний прямоугольной пластины может быть получено из соответствующего статического уравнения, оно имеет форму (10.29), т. е.

$$D\nabla^2\nabla^2 w + m_0\ddot{w} = q, \quad (10.139)$$

где m_0 — масса единицы поверхности. Свободные колебания пластины описываются уравнением (10.139) при $q = 0$:

$$D\nabla^2\nabla^2 w + m_0\ddot{w} = 0. \quad (10.140)$$

Для шарнирно опертой пластины (рис. 10.18, а) прогиб может быть представлен в форме двойного тригонометрического ряда, аналогичного (3.79), т. е.

$$w(x, y, t) = \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y. \quad (10.141)$$

Здесь A_{mn} — неизвестные коэффициенты; ω — частота колебаний; $\lambda_m = \pi m/a$, $\mu_n = \pi n/b$. Подстановка (10.141) в уравнение (10.140) приводит к следующему частотному уравнению, которое получается способом, неоднократно использовавшимся ранее в задачах статики (см. разд. 3.3.2) и устойчивости (см. разд. 9.3),

$$D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 - m_0\omega^2 = 0.$$

Отсюда получаем спектр собственных частот

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{m_0} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2, \quad (10.142)$$

а из (10.141) — соответствующие этим частотам формы колебаний

$$W_{mn} = \sin \lambda_m x \sin \mu_n y. \quad (10.143)$$

Наименьшая собственная частота реализуется, очевидно, при $m = n = 1$. Соответствующая форма колебаний показана на рис. 10.18, а пунктирными линиями.

Распространенными задачами динамики применительно к авиационным конструкциям являются задачи, связанные с колебаниями панелей обшивки в форме пологих и цилиндрических оболочек (рис. 10.19). Уравнения свободных поперечных колебаний полой оболочки можно получить из уравнения статики (4.127), если заменить внешнюю нагрузку p на инерционную нагрузку — $m_0\ddot{w}$. В результате будем иметь

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 w + Eh \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + m_0\nabla^2\nabla^2 \ddot{w} = 0. \quad (10.144)$$

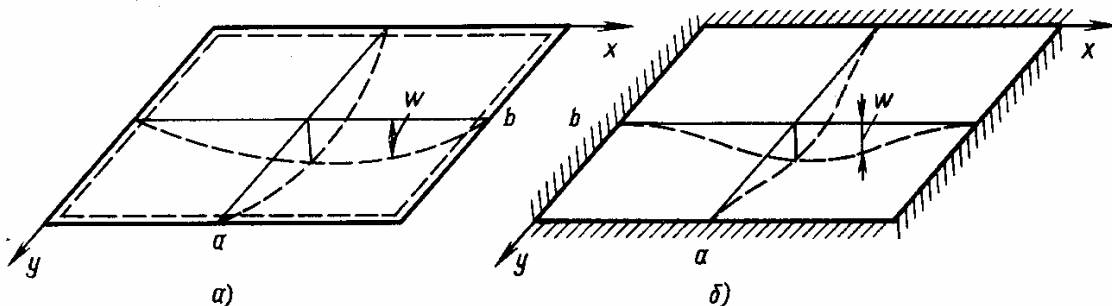


Рис. 10.18. Шарнирно опертая (а) и защемленная (б) по контуру пластина

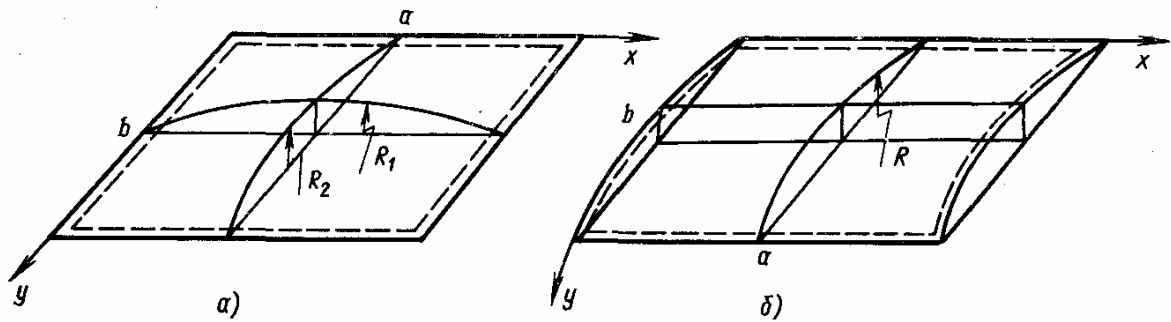


Рис. 10.19. Свободно опертая по контуру пологая (а) и цилиндрическая (б) панель

Прогиб пологой панели, показанной на рис. 10.19, а, может быть задан в форме (10.141) и его подстановка в (10.144) приводит к следующему частотному уравнению:

$$D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^4 + Eh \left(\frac{\mu_n^2}{R_1} + \frac{\lambda_m^2}{R_2} \right)^2 - m_0(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 \omega^2 = 0.$$

Отсюда

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{m_0} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 + \frac{Eh \left(\frac{\mu_n^2}{R_1} + \frac{\lambda_m^2}{R_2} \right)^2}{m_0 (\lambda_m^2 + \mu_n^2)}. \quad (10.145)$$

Формы колебаний определяются равенством (10.143).

Для цилиндрической панели (см. рис. 10.19, б) в формуле (10.145) следует принять $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R$, т. е.

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{m_0} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 + \frac{Eh\lambda_m^4}{m_0 R^2 (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}. \quad (10.146)$$

Для замкнутой свободно опертой по торцам $x = 0$ и $x = l$ цилиндрической оболочки (см. рис. 4.24) в разложении (10.141) необходимо учесть условие периодичности прогиба по полярному углу $\beta = y/R$. Частоты собственных колебаний оболочки без учета инерции в тангенциальных направлениях определяются по формуле (10.146) при $\lambda_m = m\pi/l$, $\mu_n = n/R$.

В большинстве практических случаев для решения задач колебаний пластин и оболочек используются различные приближенные методы, такие, как методы Рэлея—Ритца, Бубнова—Галеркина, конечных элементов и др. С помощью этих методов расчетная модель пластин и оболочек сводится по существу к системе с конечным числом степеней свободы. При большом числе степеней свободы для упрощения решения задачи о вынужденных колебаниях сначала определяются собственные частоты и формы колебаний и затем уравнения преобразуются к нормальным координатам, в которых они становятся несвязанными.

10.5.2. Методы Рэлея—Ритца и Бубнова—Галеркина

Рассмотрим приложение метода Рэлея—Ритца к решению задачи о поперечных колебаниях тонкой пластины (см. рис. 10.18). Прогиб пластины представляется в виде ряда

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) \varphi_i(x, y), \quad (10.147)$$

где $\varphi_i(x, y)$ — заданные линейно независимые функции, описывающие возможные перемещения в виде непрерывных функций, удовлетворяющих заданным геометрическим граничным условиям; $q_i(t)$ — неизвестные обобщенные координаты. Запишем выражения для кинетической энергии, потенциальной энергии изгиба и вариации работы поперечной нагрузки $q(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int \int_S m_0 \dot{w}^2 dS, \\ U &= \frac{1}{2} \int \int_S D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dS, \\ \delta A &= \int \int_S q \delta w dS, \end{aligned} \quad (10.148)$$

где S — площадь пластины, $dS = dx dy$; $m_0(x, y)$ — масса, отнесенная к единице поверхности S . С учетом разложения (10.147) получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{ij} q_i q_j, \\ \delta A &= \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i, \end{aligned} \quad (10.149)$$

где $m_{ij} = \int \int_S m_0 \varphi_i \varphi_j dS$,

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int \int_S D \left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \right) + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x \partial y} \right] dS, \end{aligned} \quad (10.150)$$

$$Q_i(t) = \int \int_S q \varphi_i dS.$$

Уравнения колебаний составляются как уравнения Лагранжа в обобщенных координатах:

$$\sum_{j=1}^s m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^s k_{ij} q_j = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (10.151)$$

В качестве примера рассмотрим жестко защемленную по всем четырем сторонам прямоугольную пластину постоянной толщины (см. рис. 10.18, б). Для оценки низшей частоты собственных колебаний в одночленном приближении ($s = 1$) возьмем функцию

$$\varphi_1(x, y) = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right), \quad (10.152)$$

которая удовлетворяет геометрическим граничным условиям защемления и является подходящей аппроксимацией для низшей формы колебаний. Аппроксимация (10.152) уже использовалась ранее при решении задачи устойчивости защемленной пластины (см. разд. 9.3). По формулам (10.151) получим

$$m_{11} = \frac{9}{4} m_0 ab, \quad k_{11} = \frac{4\pi^4 D}{ab} \left(2 + 3 \frac{a^2}{b^2} + 3 \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Приближенное выражение для квадрата собственной частоты следует из уравнения (10.152) при $i = j = 1$:

$$\omega_1^2 = \frac{k_{11}}{m_{11}} = \frac{16\pi^4 D}{9m_0 a^2 b^2} \left(2 + 3 \frac{a^2}{b^2} + 3 \frac{b^2}{a^2}\right).$$

В случае квадратной пластины ($b = a$) приближенное значение ω_1^2 превышает на 7 % точное значение квадрата низшей частоты.

Метод Рэлея—Ритца часто используется на практике для расчета колебаний крыльев малого удлинения (рис. 10.20). При этом в качестве заданных функций $\varphi_i(x, y)$ удобно использовать степенные функции вида $x^m y^n$, выбирая показатели m, n так, чтобы удовлетворить геометрическим граничными условиями закрепления. Например, для крыла, жестко закрепленного по всей бортовой хорде при $y = 0$ (см. рис. 10.20), следует брать $m = 0, 1, 2, \dots$, $n = 2, 3, \dots$. Методом Рэлея—Ритца удобно также исследовать поперечные колебания отдельных плоских панелей обшивки крыла, считая их закрепленными на полках лонжеронов и нервюр.

Метод Бубнова—Галеркина также предполагает использование разложения типа (10.147) для отыскания приближенного решения уравнения (10.139). Разрешающие уравнения метода при $D = \text{const}$ имеют вид

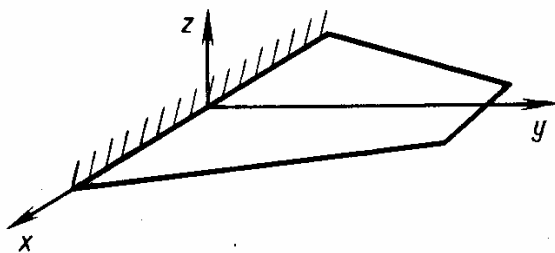


Рис. 10.20. Консольная пластина как расчетная модель крыла малого удлинения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \left(\bar{q}_i \int_S m_0 \varphi_i \varphi_j dS + \right. \\ \left. + q_i \int_S D \varphi_j \nabla^2 \nabla^2 \varphi_i dS \right) = \\ = \int_S q \varphi_j dS \\ (j = 1, 2, 3, \dots, s). \end{aligned}$$

Они позволяют найти зависимость обобщенных координат от времени.

Метод Бубнова—Галеркина при расчете колебаний пластин и оболочек применяется реже, чем метод Рэлея—Ритца, поскольку во многих случаях бывает трудно подобрать подходящие функции $\Phi_i(x, y)$, удовлетворяющие всем граничным условиям (в соответствии с методом Рэлея—Ритца необходимо удовлетворить только геометрическим граничным условиям). Если при применении метода Рэлея—Ритца использовать заданные функции, удовлетворяющие всем граничным условиям, то тогда оба эти метода приведут к одинаковым уравнениям в обобщенных координатах и, следовательно, к одинаковым результатам.

10.5.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Этот метод широко используется для расчета колебаний пластин и оболочек сложной формы и переменной толщины, особенно в тех случаях, когда в наличии имеются стандартные программы для ЭВМ, реализующие МКЭ для определенных классов пластин и оболочек. Ниже приводится краткое описание особенностей применения МКЭ к расчету поперечных колебаний пластин.

Для реализации МКЭ пластина делится на определенное число конечных элементов. Для этого часто используются треугольные элементы (рис. 10.21) — они удобны при кусочно-линейной аппроксимации границ пластин сложной формы. Каждый элемент удобно рассматривать в своей местной системе декартовых координат x, y (рис. 10.22).

В качестве обобщенных координат обычно рассматриваются нормальное перемещение и углы поворота нормали в двух взаимно перпендикулярных плоскостях в каждом узле (угловой точке элемента). Перемещение и углы поворота в i -м узле выражаются через нормальные перемещения k -го элемента, которому принадлежит i -й узел с координатами $x = x_i, y = y_i$, следующим образом (см. рис. 10.22):

$$\begin{aligned} w_i &= w|_{x=x_i, y=y_i}, \\ \theta_i &= \left[\cos \alpha_k \frac{\partial w}{\partial y} + \sin \alpha_k \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_i, y=y_i}, \\ \psi_i &= \left[\sin \alpha_k \frac{\partial w}{\partial y} - \cos \alpha_k \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_i, y=y_i}. \end{aligned} \quad (10.153)$$

Здесь α_k — угол между осью x местной системы координат для k -го элемента и осью X общей системы координат, в плоскостях которой отсчитываются углы θ_i и ψ_i .

Нормальные перемещения в пределах k -го элемента аппроксимируются степенным рядом по осям x, y с неизвестными коэффи-

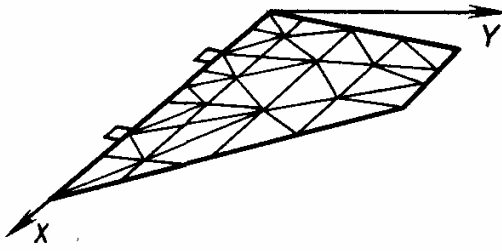


Рис. 10.21. Расчленение пластины на систему треугольных конечных элементов

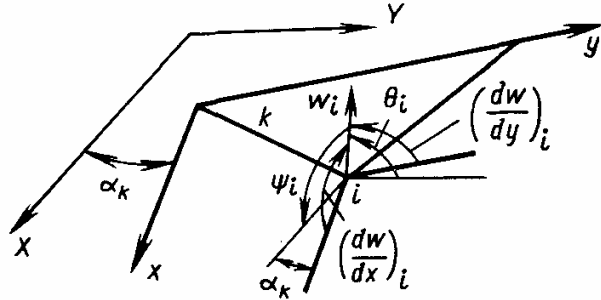


Рис. 10.22. Общая (X, Y) и местная (x, y) системы координат треугольного конечного элемента

циентами, число которых равно числу степеней свободы элемента ($3 \times 3 = 9$). Для треугольных элементов обычно берется ряд

$$\begin{aligned} w(x, y, t) = & a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + \\ & + a_8(x^2y + xy^2) + a_9y^3. \end{aligned} \quad (10.154)$$

Подставляя ряд (10.154) в выражения (10.153), записанные для каждого узла k -го элемента, получим систему уравнений, которая может быть представлена в виде

$$q^{(k)} = B_k a^{(k)} \text{ или } a^{(k)} = C_k q^{(k)}, \quad C_k = B_k^{-1}, \quad (10.155)$$

где $a^{(k)}$ — вектор-столбец коэффициентов $a_1, \dots, a_9$; $q^{(k)}$ — вектор-столбец обобщенных координат w_i, θ_i, ψ_i для узлов, принадлежащих k -му элементу; B_k — матрица преобразования девятого порядка.

Потенциальная энергия U_k , кинетическая энергия T_k и вариация работы поперечной нагрузки δA_k для k -го элемента вычисляются по формулам (10.148) с учетом разложения (10.154) сначала через компоненты вектора $a^{(k)}$ и затем — с помощью преобразования (10.155) через обобщенные координаты w_i, θ_i, ψ_i , образующие вектор $q^{(k)}$:

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{2} a^{(k)\top} K_k^0 a^{(k)} = \frac{1}{2} q^{(k)\top} K_k q^{(k)}, \\ T_k &= \frac{1}{2} \dot{a}^{(k)\top} M_k^0 \dot{a}^{(k)} = \frac{1}{2} \dot{q}^{(k)\top} M_k \dot{q}^{(k)}, \\ \delta A_k &= \delta a^{(k)\top} Q_k^0 = \delta q^{(k)\top} Q_k, \\ K_k &= C_k^\top K_k^0 C_k; \quad M_k = C_k^\top M_k^0 C_k, \quad Q_k = C_k^\top Q_k^0. \end{aligned} \quad (10.156)$$

Здесь K_k, M_k и Q_k — матрица жесткости, матрица инерции и вектор-столбец обобщенных сил k -го элемента, соответствующие его обобщенным координатам (вектору-столбцу $q^{(k)}$). Затем производится суммирование по всем элементам с учетом геометриче-

ских условий сопряжения соседних элементов в их общих узлах и геометрических граничных условиях закрепления:

$$\begin{aligned} U &= \sum_k U_k = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \\ T &= \sum_k T_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \\ \delta A &= \sum_k \delta A_k = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (10.157)$$

где $\mathbf{q}$ — вектор-столбец всех отличных от нуля обобщенных координат $\omega_i, \theta_i, \psi_i$.

Уравнение колебаний в обобщенных координатах в матричном виде записывается следующим образом:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}(t). \quad (10.158)$$

Полученную систему уравнений обычно преобразуют в уравнения в нормальных координатах (см. разд. 10.3.3), используя разложение $\mathbf{q}(t) = \sum_n f_n(t) \mathbf{Y}_n$ по собственным формам колебаний $\mathbf{Y}_n$, которые вместе с соответствующими частотами ω_n определяются из уравнения $[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{Y} = 0$. Уравнения вынужденных колебаний в нормальных координатах записываются в виде (10.176), т. е.

$$m_n(\ddot{f}_n + \omega_n^2 f_n) = F_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (10.159)$$

где $m_n = \mathbf{Y}_n^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_n$, $F_n = \mathbf{Y}_n^T \mathbf{Q}$.

Основная трудность применения МКЭ к задачам динамики связана с наличием большого числа степеней свободы. Решение уравнения динамики (10.158) или задачи о собственных колебаниях является значительно более трудоемким, чем решение соответствующей статической задачи $\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}$.

В практических задачах для составления уравнений в нормальных координатах (10.159) достаточно знать только некоторое число низших форм колебания. Для определения низших форм колебаний при вычислении кинетической энергии элемента T_k вместо (10.154) можно использовать более грубую линейную аппроксимацию нормальных перемещений в пределах элемента в виде

$$\omega = b_1 + b_2 x + b_3 y,$$

где b_1, b_2 и b_3 выражаются через нормальные перемещения в узлах ω_i с помощью условий $\omega_i = \omega|_{x=x_i, y=y_i}$, записанных для каждого из трех узлов, принадлежащих треугольному элементу. При таком приближенном подходе кинетическая энергия T не будет зависеть от углов поворота в узлах θ_i, ψ_i и уравнения для этих обобщенных координат будут «квазистатическими», т. е. в них не будут входить инерционные силы.

Записав полученную систему уравнений в блочном виде (10.37), и исключая обобщенные координаты θ_i, ψ_i (вектор q_{II}), получим редуцированную систему (10.41), содержащую только обобщенные координаты w_i (вектор q_I). Таким образом, порядок системы (10.158) понижается вдвое.

В заключение сделаем одно замечание. В рассмотренном варианте МКЭ требуется, чтобы непрерывность перемещений и углов поворота при изгибе пластины соблюдалась только в узлах, совпадающих с угловыми точками элементов. Элементы, для которых аппроксимирующие полиномы не обеспечивают непрерывности перемещений и углов поворота при переходе через грани, разделяющие соседние элементы, называются несогласованными. При использовании несогласованных элементов нарушаются геометрические связи, а это в соответствии с теоремой Рэлея приводит к снижению собственных частот колебаний. В то же время представление перемещений элемента в виде разложения по конечному числу заданных функций эквивалентно наложению связей и, следовательно, приводит к увеличению собственных частот. В результате в общем случае при использовании несогласованных элементов МКЭ может дать как завышенные, так и заниженные значения собственных частот колебаний по сравнению с точными значениями. При использовании согласованных элементов МКЭ дает завышенные значения собственных частот.

В рассмотренном варианте можно показать, что аппроксимирующий кубический полином (10.154) обеспечивает непрерывность перемещения и не обеспечивает непрерывности нормальной производной от перемещения при переходе через грани, разделяющие соседние элементы. При уменьшении размеров конечных элементов эта несогласованность (разрыв) по углам поворота в плоскостях, нормальных к граням, быстро уменьшается.

10.6. КОЛЕБАНИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

10.6.1. Метод суперэлементов

Конструкции летательных аппаратов являются составными нерегулярными тонкостенными системами, несущими распределенные или сосредоточенные массы оборудования, двигательных установок, жидкого топлива, грузов и пр. Построение расчетных динамических моделей, которые, с одной стороны, были бы достаточно простыми (например, имели бы минимально необходимое число степеней свободы) и, с другой стороны, учитывали бы характерные особенности деформации реальных конструкций в местах соединения различных частей, в зонах вырезов, в местах приложения сосредоточенных сил или реакций, представляет собой важный этап в процессе проектирования летательного аппарата.

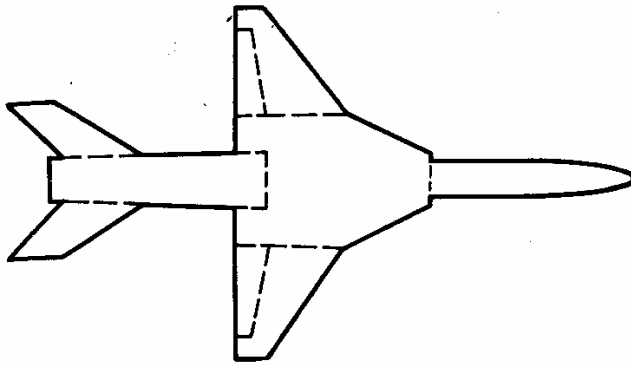


Рис. 10.23. Расчленение планера летательного аппарата на суперэлементы

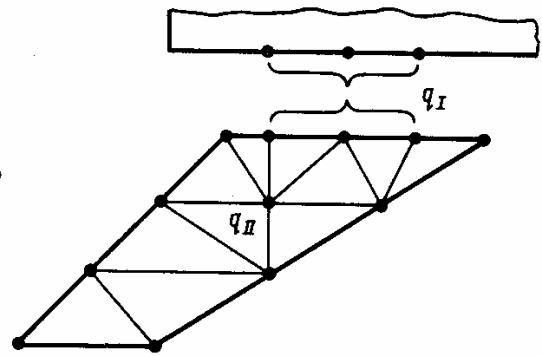


Рис. 10.24. Расчленение суперэлемента на конечные элементы

Эта проблема уже обсуждалась применительно к задачам статического расчета в гл. 8, где конструкция планера летательного аппарата рассматривалась с позиций системного анализа и был описан метод подконструкций, основанный на членении сложной системы на подсистемы различного уровня. Этот метод позволяет сократить число неизвестных обобщенных координат конечно-элементной расчетной модели настолько, чтобы можно было выполнить вычисления на ЭВМ, сохраняя при этом достаточно высокую точность. Метод заключается в следующем.

Конструкция делится на характерные части — подконструкции или суперэлементы, в качестве которых могут рассматриваться конструктивные единицы — крыло, оперение, носовая часть фюзеляжа и т. д. (рис. 10.23), а суперэлементы, в свою очередь, делятся на конечные элементы (рис. 10.24). Обобщенные координаты, представляющие собой степени свободы в узлах суперэлемента, делятся на две группы. К первой группе (вектор-столбец q_I) относятся обобщенные координаты для узлов, лежащих на границе раздела Γ , по которой рассматриваемый суперэлемент отделяется от других суперэлементов: ко второй группе (вектор-столбец q_{II}) относятся все остальные обобщенные координаты суперэлемента (см. рис. 10.24): $q^T = [q_I^T \mid q_{II}^T]$.

Потенциальная и кинетическая энергия суперэлемента, а также вариация работы действующих на него внешних нагрузок на основе МКЭ записываются в блочном виде:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} q^T K q = \frac{1}{2} [q_I^T \mid q_{II}^T] \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_I \\ q_{II} \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} [q_I^T K_{11} q_I + 2 q_I^T K_{12} q_{II} + q_{II}^T K_{22} q_{II}], \\
 T &= \frac{1}{2} [\dot{q}_I^T M_{11} \dot{q}_I + 2 \dot{q}_I^T M_{12} \dot{q}_{II} + \dot{q}_{II}^T M_{22} \dot{q}_{II}],
 \end{aligned} \tag{10.160}$$

$$\delta A = \delta q_I^T Q_I + \delta q_{II}^T Q_{II},$$

где $K_{11} = K_{11}^T$, $K_{12} = K_{21}^T$, $K_{22} = K_{22}^T$ и $M_{11} = M_{11}^T$, $M_{12} = M_{21}^T$, $M_{22} = M_{22}^T$ — блоки матриц жесткости K и инерции M суперэле-

мента: Q_I, Q_{II} — векторы-столбцы внешних сил, соответствующие векторам обобщенных координат q_I и q_{II} .

Запишем уравнение собственных колебаний суперэлемента, неподвижно закрепленного на границе раздела Γ , полагая

$$q_I = 0 \text{ и } q_{II} = Y_{\sin \omega t},$$

$$[K_{22} - \omega^2 M_{22}] Y = 0. \quad (10.161)$$

Из этого уравнения определяется некоторое число s низших собственных форм Y_n и частот колебаний ω_n закрепленного на границе раздела Γ суперэлемента ($n = 1, 2, \dots, s$). При этом число s значительно меньше числа обобщенных координат вектора q_{II} . Вектор q_{II} приближенно запишем в виде разложения

$$q_{II} = S q_I + \sum_{n=1}^s f_n Y_n; \quad S = -K_{22}^{-1} K_{21}. \quad (10.162)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой статическую составляющую перемещений внутренних узлов суперэлемента при заданных перемещениях его граничных узлов (это следует из уравнения статики $K_{21} q_I + K_{22} q_{II} = 0$, которое можно получить, если пренебречь инерционными и внешними силами, соответствующими обобщенными координатам q_{II} , т. е. при $M_{12} = 0, M_{22} = 0$ и $Q_{II} = 0$); $f_n(t)$ — дополнительные обобщенные координаты, характеризующие движения по низшим собственным формам колебаний закрепленного суперэлемента. С учетом разложения (10.162) и условий ортогональности собственных форм колебаний (см. разд. 10.3.2) $-Y_m^T M_{22} Y_n = 0, Y_m^T K_{22} Y_n = 0$, при $m \neq n$ потенциальная и кинетическая энергии и вариация работы (10.160) записываются через обобщенные координаты вектора q_I и f_n при $n = 1, 2, \dots, s$:

$$U = \frac{1}{2} \left[q_I^T K_I q_I + \sum_{n=1}^s k_n f_n^2 \right],$$

$$T = \frac{1}{2} \left[\dot{q}_I^T M_I \dot{q}_I + 2 \dot{q}_I^T \sum_{n=1}^s \dot{f}_n M_n + \right. \quad (10.163)$$

$$\left. + \sum_{n=1}^s m_n \dot{f}_n^2 \right],$$

$$\delta A = \delta q_I^T Q_I^* + \sum_{n=1}^s \delta f_n F_n,$$

где $K_I = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}$, $M_n = (M_{12} + S^T M_{22}) Y_n$,

$$M_I = M_{11} + M_{12} S + S^T M_{21} + S^T M_{22} S,$$

$$Q_I^* = Q_I + S^T Q_{II}, \quad k_n = Y_n^T K_{22} Y_n = m_n \omega_n^2;$$

$$m_n = Y_n^T M_{22} Y_n, \quad F_n = Y_n^T Q_{II}.$$

Аналогичным образом уменьшается число обобщенных координат для других суперэлементов. В результате потенциальная и кинетическая энергия и вариация работы внешних нагрузок всей системы после суммирования по всем суперэлементам записывается через обобщенные координаты узлов, лежащих на границах раздела суперэлементов, и через нормальные координаты, характеризующие некоторое число низших собственных форм колебаний суперэлементов, закрепленных на границах раздела.

Если низшие собственные частоты колебаний ω_1 всех суперэлементов превышают диапазон рассматриваемых частот колебаний системы в целом, то обобщенными координатами f_n в выражениях (10.162) и (10.163) можно пренебречь. Это обусловлено тем, что при низкочастотных колебаниях системы инерционные силы суперэлементов малы по сравнению с реакциями, действующими на границах между ними, и суперэлементы деформируются в основном квазистатически.

10.6.2. Метод отсеков

Согласно этому методу удлиненные части конструкции (корпус, фюзеляж, крыло большого удлинения и пр.) делятся на подконструкции — отсеки. В качестве сечений, разделяющих соседние отсеки, выбираются поперечные сечения, в которых происходит изменение геометрии конструкции, имеется резкий перепад жесткости, установлены силовые шпангоуты или нервюры, действуют сосредоточенные нагрузки или реакции со стороны других частей конструкции (рис. 10.25). В общем случае такие сечения могут быть не перпендикулярны продольной оси рассматриваемой части конструкции, а торцы отсека могут быть не параллельны друг другу, как, например, в случае корневого треугольника стреловидного кессонного крыла (см. рис. 10.25, б).

Силовые шпангоуты и нервюры рассматриваются как отдельные элементы, разделяющие соседние отсеки (рис. 10.26).

Рассматриваемый метод изложим на примере отсеков с произвольным контуром поперечного сечения, считая подкрепленную оболочку безмоментной или полубезмоментной. В этих случаях на торцах отсеков кинематические условия сопряжения записываются только по величинам перемещений, касательных к срединной поверхности оболочки. В общем случае, например, при нали-

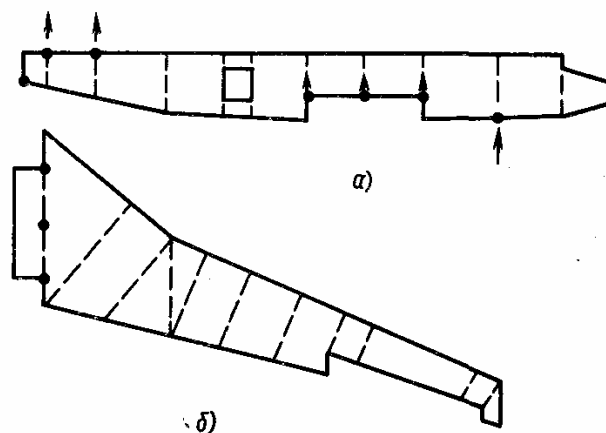


Рис. 10.25. Схема членения на отсеки корпуса (а) и крыла (б) летательного аппарата

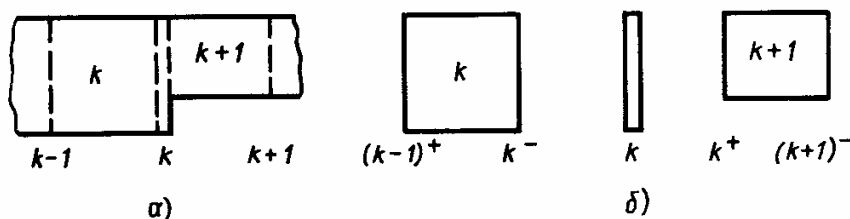


Рис. 10.26. Отсеки, соединенные через шпангоут (а), и схема их членения (б)

чий вырезов (см. рис. 10.25) длины контуров стыкуемых торцов могут быть различными и поэтому для аппроксимации перемещений на этих торцах могут быть использованы различные заданные функции.

Тангенциальные перемещения оболочек на стыкуемых в k -ом сечении торцах (рис. 10.27) представим в виде

$$\begin{aligned} u_k^- &= \sum_i q_{ki}^- \varphi_{ki}^-, & v_k^- &= \sum_i q_{ki}^- \psi_{ki}^-, \\ u_k^+ &= \sum_i q_{ki}^+ \varphi_{ki}^+, & v_k^+ &= \sum_i q_{ki}^+ \psi_{ki}^+, \end{aligned} \quad (10.164)$$

где $u_k(s, t)$ — тангенциальное перемещение в плоскости, нормальной к контуру торца в точке s ; $v_k(s, t)$ — перемещение, касательное к контуру сечения; $\varphi_{ki}(s)$, $\psi_{ki}(s)$ — заданные функции; $q_{ki}(t)$ — неизвестные функции, которые можно рассматривать как обобщенные координаты. Верхними индексами «—» и «+» обозначены функции, относящиеся соответственно к правому торцу k -го отсека и к левому торцу $k+1$ -го отсека. При этом заданные функции выбираются так, чтобы часть обобщенных координат (например, при $i = 1, 2, \dots, 6$) представляла собой перемещения и углы поворота плоских недеформируемых сечений, а другая часть — возможные формы депланаций и искривлений контура рассматриваемых сечений (если они учитываются).

Далее на основании вариационного метода перемещений или метода сил в статической постановке задачи определяются деформации и перемещения в пределах отсека при заданных перемещениях (10.164) на его торцах. Эта задача может быть также решена путем сведения ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вариационным методом, описанным в гл. 6.

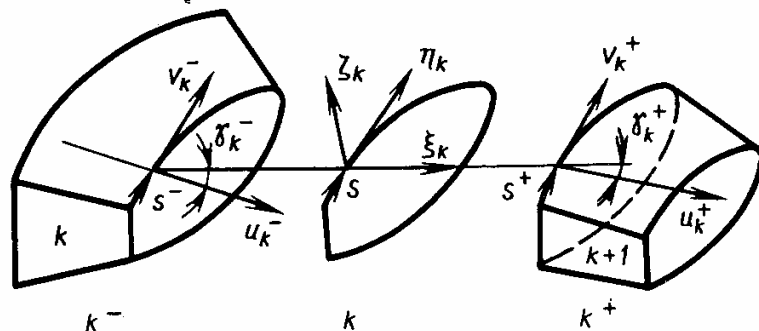


Рис. 10.27. Кинематические факторы стыкуемых отсеков

В результате потенциальная энергия, кинетическая энергия и вариация работы внешних нагрузок для k -го отсека записывается в обобщенных координатах, представляющих собой перемещения на его торцах:

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{2} [(q_{k-1}^+)^T K_{k-1, k-1} q_{k-1}^+ + 2 (q_{k-1}^+)^T \times \\ &\quad \times K_{k-1, k} q_k^- + (q_k^-)^T K_{kk} q_k^-], \\ T_k &= \frac{1}{2} [(\dot{q}_{k-1}^+)^T M_{k-1, k-1} \dot{q}_{k-1}^+ + 2 (\dot{q}_{k-1}^+)^T \times \\ &\quad \times M_{k-1, k} \dot{q}_k^- + (\dot{q}_k^-)^T M_{kk} \dot{q}_k^-], \\ \delta A_k &= (\delta q_{k-1}^+)^T Q_{k-1}^+ + (\delta q_k^-)^T Q_k^-, \end{aligned} \quad (10.165)$$

где q_{k-1}^+ и q_k^- — векторы-столбцы обобщенных координат $q_{k-1, i}^+$ и $q_{k, i}^-$; Q_{k-1}^+ и Q_k^- — векторы-столбцы обобщенных сил; $K_{k-1, k-1} = K_{k-1, k-1}^T$, $K_{k-1, k} = K_{k, k-1}^T$, $K_{kk} = K_{kk}^T$ и $M_{k-1, k-1} = M_{k-1, k-1}^T$, $M_{k-1, k} = M_{k, k-1}^T$, $M_{kk} = M_{kk}^T$ — матрицы жесткости и инерции.

Для того чтобы составить уравнения колебаний конструкции как системы отсеков, необходимо выполнить кинематические граничные условия сопряжения соседних отсеков. Сначала рассмотрим случай, когда в k -м сечении стыкуемые торцы имеют одинаковые контуры, а образующая оболочки не имеет излома. В этом случае условия сопряжения можно удовлетворить точно, если на стыкуемых торцах взять одинаковые число одинаковых функций $\varphi_{ki}^- = \varphi_{ki}^+ = \varphi_{ki}$, $\psi_{ki}^- = \psi_{ki}^+ = \psi_{ki}$ и положить

$$q_{ki}^- = q_{ki}, \quad q_{ki}^+ = q_{ki}. \quad (10.166)$$

Теперь рассмотрим более общий случай, когда в k -м сечении стыкуемые торцы различные (см. рис. 10.26) или образующая оболочки отсеков имеет излом (см. рис. 10.27). В таком сечении обычно устанавливается шпангоут (или нервюра), к которому могут крепиться тела различных масс и на которые могут действовать сосредоточенные внешние силы или реакции со стороны других частей конструкции. Представим перемещения контура упругого k -го шпангоута (нервюры) в виде разложений

$$\xi_k = \sum_i q_{ki} \omega_{ki}, \quad \eta_k = \sum_i q_{ki} \psi_{ki}, \quad \zeta_k = \sum_i q_{ki} \chi_{ki}, \quad (10.167)$$

где $\xi_k(s, t)$, $\eta_k(s, t)$, $\zeta_k(s, t)$ — компоненты перемещений точки s контура в направлении нормали к плоскости шпангоута (ξ_k), касательной к контуру (η_k) и нормали к контуру (ζ_k) (см. рис. 10.27); $q_{ki}(t)$ — обобщенные координаты; $\omega_{ki}(s)$, $\psi_{ki}(s)$, $\chi_{ki}(s)$ — заданные функции.

Потенциальная энергия деформации шпангоута, кинетическая энергия шпангоута и присоединенных к нему масс, вариация ра-

боты внешних сил, действующих на шпангоут, приводятся к виду

$$U_k^0 = \frac{1}{2} \dot{q}_k^T K_k^0 \dot{q}_k, \quad T_k^0 = \frac{1}{2} \dot{q}_k^T M_k^0 \dot{q}_k, \quad (10.168)$$

$$\delta A_k^0 = \delta q_k^T Q_k^0,$$

где q_k — вектор-столбец обобщенных координат q_{ki} ; K_k^0 , M_k^0 — матрицы жесткости и инерции шпангоута; Q_k^0 — вектор-столбец обобщенных внешних сил, действующих на шпангоут. Кинематические условия сопряжения отсеков с упругим шпангоутом удовлетворим приближенно по методу наименьших квадратов. Для правого края k -го отсека и шпангоута (см. рис. 10.27) составим квадратичный функционал:

$$J_k^- = \frac{1}{2} \int_{s_k^-} ([u_k^- - (\xi_k \cos \gamma_k^- - \zeta_k \sin \gamma_k^-)]^2 h_* + [v_k^- - \eta_k]^2 h) ds, \quad (10.169)$$

где $\gamma_k^-(s)$ — угол между направлениями u_k^- и ξ_k ; $h(s)$ и $h_*(s)$ — некоторые весовые функции, например — толщина оболочки без учета и с учетом продольных подкрепляющих элементов.

При точном выполнении условий сопряжения в направлении тангенциальных перемещений безмоментной оболочки выражения в квадратных скобках (10.169) равны нулю и $J_k^- = 0$. С учетом разложений (10.164), (10.167) условия минимума J_k^- по параметрам q_{ki} дают систему линейных алгебраических уравнений

$$\partial J_k^- / \partial q_{ki} = \sum_j a_{ij}^- q_{kj}^- - \sum_j b_{ij} q_{kj} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (10.170)$$

$$\text{где } a_{ij}^- = \int_{s_k^-} (\varphi_{ki}^- \varphi_{kj}^- h_* + \psi_{ki}^- \psi_{kj}^- h) ds,$$

$$b_{ij} = \int_{s_k^-} [(\omega_{kj} \cos \gamma_k^- - \chi_{kj} \sin \gamma_k^-) \varphi_{ki}^- h_* + \psi_{ki}^- \psi_{kj} h] ds.$$

Аналогичным образом приближенно удовлетворяются кинематические условия сопряжения между шпангоутом и левым торцом $(k+1)$ -го отсека (в уравнениях (10.170) индекс «—» заменяется на «+»).

Уравнения (10.170) позволяют выполнить следующее преобразование обобщенных координат:

$$q_k^- = C_k^- q_k, \quad q_k^+ = C_k^+ q_k. \quad (10.171)$$

С учетом этих преобразований (в случае (10.166) $C_k^- = C_k^+ = E$) потенциальная и кинетическая энергия и вариация работы всей

системы записываются в обобщенных координатах векторов q_k при $k = 1, \dots, N$, т. е.

$$U = \sum_k (U_k + U_k^0), \quad T = \sum_k (T_k + T_k^0), \quad \delta A = \sum_k (\delta A_k + \delta A_k^0). \quad (10.172)$$

На основании этих выражений затем записываются уравнения колебаний системы в форме уравнений Лагранжа.

К достоинствам метода отсеков относится то, что он позволяет последовательно уточнять расчетную модель сложной нерегулярной конструкции начиная с простейшей балочной модели, основанной на гипотезе плоских сечений, путем увеличения числа заданных функций деформаций и искривлений контура в некоторых или во всех расчетных сечениях. Такое уточнение приводит к «наращиванию» системы уравнений без изменения коэффициентов, которые были получены ранее.

Наряду с этим метод отсеков позволяет путем последующего редуцирования уменьшать число обобщенных координат до необходимого уровня. Так, при расчете колебаний конструкции по формам балочного типа (изгибно-крутильно-продольные колебания) при составлении выражения для кинетической энергии в каждом расчетном сечении $k = 0, 1, \dots, N$ можно ограничиться только частью обобщенных координат, которые описывают величины перемещений и поворотов этих сечений как плоских недеформируемых дисков, пренебрегая инерцией деформаций и искривлений. В этом случае уравнения колебаний записываются в блочном виде (10.37) и часть обобщенных координат, от которых кинетическая энергия не зависит, исключаются.

После такого редуцирования расчетная модель нерегулярной тонкостенной конструкции при учете деформаций и искривлений контуров поперечных сечений сводится по существу к некоторой эквивалентной балочной системе.

10.7. АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ

10.7.1. Постановка задачи

Курс аэроупругости изучает поведение упругих тел при обтекании их потоком газа. Здесь кратко рассмотрим общие вопросы, относящиеся к постановке задачи, методу составления уравнений колебаний, а также к исследованию устойчивости упругих конструкций летательных аппаратов в потоке газа. Более подробно задачи аэроупругости изучаются в специальных курсах (см. например [10]).

В большинстве случаев задачи аэроупругости для тонких тел можно рассматривать в линеаризованной постановке, полагая, что деформации (перемещения) упругого тела и вызванные ими возмущения потока малы. Исключение составляют случаи сильно

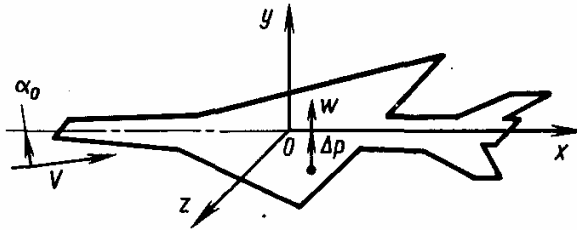


Рис. 10.28. Расчетная модель летательного аппарата

деформируемых тел, например, таких, как купол парашюта в процессе его раскрытия, а также — случаи околозвуковых и гиперзвуковых скоростей, при которых аэродинамика является существенно нелинейной.

Малые колебания упругого летательного аппарата будем рассматривать относительно заданного невозмущенного движения, в котором аппарат находится в условиях динамического равновесия. Вследствие этого уравнения малых колебаний можно составлять, учитывая только линейные приращения аэродинамических, упругих и инерционных нагрузок в возмущенном движении.

Далее для простоты формулировки задачи аэроупругости будем рассматривать расчетную модель в виде тонкой, плоской конфигурации (рис. 10.28), срединная поверхность которой в невозмущенном движении располагается в плоскости Oxz или находится вблизи нее, при этом корпус (фюзеляж) рассматривается как тонкая балка, аэродинамическое давление на которую в каждом сечении может быть заменено равнодействующей поперечной нагрузкой $q_y(x, t)$, приведенной к оси балки. Система координат $Oxyz$ связана с летательным аппаратом в его невозмущенном движении, в качестве которого будет рассматриваться прямолинейный полет с постоянной скоростью V . При этом ось Ox составляет с вектором скорости полета малый угол атаки α_0 .

Деформации рассматриваемой расчетной модели при изгибе описываются функцией нормальных перемещений срединной поверхности $w(x, z, t)$, направленных по оси y (см. рис. 10.28).

10.7.2. Аэродинамическое давление

Задача аэроупругости может быть условно разделена на две задачи — аэродинамическую и упругодинамическую. При решении аэродинамической задачи предполагается, что перемещения упругой конструкции $w(x, z, t)$ известны. В силу кинематического граничного условия безотрывного обтекания колеблющейся поверхности летательного аппарата скорость скаса потока в любой точке с учетом составляющей скорости ветра $V_{by}(x, z, t)$ в направлении оси Oy равна

$$V_y + V_{by} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (10.173)$$

где первое слагаемое в правой части представляет собой скорость частицы газа, как бы прилипшей к подвижной поверхности, а второе слагаемое учитывает скорость, обусловленную относительным движением (скольжением) частицы вдоль наклонной поверхности.

Угол скоса потока (приращение местного угла атаки)

$$\alpha(x, z, t) = -\frac{V_y}{V} = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{V_{by}}{V}\right). \quad (10.174)$$

Возмущения потока вызываются углами скоса его во всех точках поверхности, на основании чего выражение для перепада аэродинамического давления на нижней и верхней поверхностях тонкого тела (см. рис. 10.28) $\Delta p = p_n - p_{\bar{n}}$ может быть представлено в виде

$$\Delta p = \frac{\rho V^2}{2} P[\alpha], \quad (10.175)$$

где ρ — плотность невозмущенного потока; $P[\dots]$ в случае линеаризированной аэродинамической задачи является линейным аэродинамическим оператором по переменным x, z, t ; величина $P[\alpha] = \Delta p$ представляет собой местный перепад, отнесенный к скоростному напору (коэффициент перепада давлений). В общем случае P является линейным интегродифференциальным оператором.

Решение аэродинамической задачи для определения вида оператора P в общем случае представляет собой значительные математические трудности. Ее формулировка и способ решения зависят от конфигурации тела в плане, от диапазона рассматриваемых скоростей (несжимаемый поток, сжимаемый поток с дозвуковой, околосзвуковой, сверхзвуковой и гиперзвуковой скоростью) и от того, считается ли задача обтекания стационарной или нестационарной.

Постановка и методы решения аэродинамических задач обтекания тел потоком при заданных значениях местных углов скоса потока α на их поверхности рассматриваются в курсах аэродинамики и аэроупругости [10, 6, 28].

В настоящее время имеется ряд точных и приближенных аналитических решений аэродинамической задачи для конкретных конфигураций несущих поверхностей и тонких тел в определенных диапазонах скоростей. Бóльшая часть этих решений получена для стационарной задачи, реже — для нестационарной задачи при установившихся гармонических колебаниях и только единичные случаи — для нестационарной задачи при произвольных движениях поверхности. Последнее обусловлено большими трудностями, возникающими при решении нестационарных аэродинамических задач — здесь решение (например, решение задачи возмущенного давления) зависит не только от значений углов скоса потока в рассматриваемый момент времени, но и от их значений во все предыдущие моменты времени.

В последнее время разработаны эффективные алгоритмы численного решения аэродинамических задач, основанные на дискретных методах [6]. Несущая поверхность и прилегающая к ней область возмущенного течения в плоскости Oxz делятся на систему ячеек; в результате функциональная зависимость (10.175) получа-

ется в виде системы линейных алгебраических уравнений, связывающих значения α и Δp в заданных контрольных точках в каждой из ячеек на несущей поверхности. В этом случае оператор P записывается в виде матрицы аэродинамических коэффициентов влияния.

Дискретный метод решения аэродинамической задачи хорошо сочетается с дискретным методом конечных элементов, используемым для решения упругодинамической задачи. Дискретные методы решения задачи аэроупругости являются весьма трудоемкими и обычно применяются на стадии уточненных поверочных расчетов.

10.7.3. Упрощенные теории

Во многих практических случаях для целей аэроупругости, особенно на стадии проектировочных расчетов, аэродинамическая задача ставится в упрощенной постановке. При этом часто используется гипотеза стационарности. На основании этой гипотезы при получении решения в форме (10.175) не учитывается зависимость α от времени, т. е. рассматривается некоторый фиксированный момент времени с «замороженными» значениями α и для этого момента времени решается стационарная задача. После того как найдено выражение оператора P , используется зависимость α от времени (10.174) через посредство функций $w(x, z, t)$ и $V_{by}(x, z, t)$. Гипотеза стационарности может быть использована с достаточной точностью только при сравнительно медленных движениях, например, при колебаниях недеформированного тела и при его упругих колебаниях по низшим формам.

Оценку предела применимости гипотезы стационарности можно получить следующим образом: чтобы можно было пренебречь нестационарностью потока, время пробега частицы газа некоторой характерной длины (например, хорды b) должно быть значительно меньше четверти периода колебаний (за четверть периода амплитуда колебаний меняется от нуля до максимального значения). Из этого следует, что $b/V \ll T/4 = 2\pi/(4\omega)$ или $b\omega/V \ll \pi/2$, где ω — частота колебаний, а $b\omega/V$ — называется приведенной частотой или числом Струхала.

Наряду с гипотезой стационарности в курсе аэроупругости для удлиненных несущих поверхностей и тел, например крыльев большого удлинения, часто используется гипотеза плоских сечений, на основании которой аэродинамическое давление в каждом поперечном сечении определяется на основе аэродинамической теории плоскопараллельного обтекания профиля бесконечно длинного цилиндрического тела. В этом случае пренебрегают взаимным влиянием различных сечений, обусловленным различием их геометрии и характера движения, на перераспределение давления по длине (размаху).

Отметим, что использование гипотез стационарности и плоских сечений в случае больших сверхзвуковых скоростей приводит

к меньшим погрешностям, чем в случае дозвуковых скоростей.

В качестве примера приведем точные решения, полученные с использованием гипотезы стационарности, для тонкого бесконечно длинного цилиндрического крыла, ось которого перпендикулярна потоку.

В случае несжимаемого потока [10]

$$\Delta p(x, t) = \frac{\rho V^2}{2} \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} \frac{\alpha(\xi, t)}{x-\xi} d\xi, \quad (10.176)$$

где координата x отсчитывается от середины хорды в направлении потока; $a = b/2$ — половина хорды.

В случае сверхзвукового потока [10]

$$\Delta p(x, t) = \frac{\rho V^2}{2} \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \alpha(x, t), \quad (10.177)$$

где M — число Маха.

Решения (10.176) и (10.177) могут быть приближенно распространены на случай тонких прямых и стреловидных крыльев, если считать $b = b(z)$, $\alpha = \alpha(x, z, t)$ и учитывать поправки на конечность размаха и стреловидность, а при больших дозвуковых скоростях, кроме того — на сжимаемость потока. Поправки могут быть определены теоретически (для некоторых частных случаев), экспериментально (на основе продувок моделей) или по полуэмпирическим формулам.

Простая формула (10.177) может быть приближенно использована и для некоторых конфигураций тонких несущих поверхностей малого удлинения со сверхзвуковыми передними и задними кромками при $M^2 \cos^2 \chi \gg 1$ (χ — угол стреловидности передней кромки), у которых на большей части поверхности течение является двумерным (плоским) и не оказывают влияния концевые эффекты перетекания частиц газа с нижней поверхности на верхнюю и наоборот.

При $M^2 \gg 1$ существенно возрастает аэродинамическая нелинейность, вследствие чего при определении приращения давления возникает необходимость учитывать влияние толщины профиля и начального угла атаки. Полный угол скоса потока в возмущенном движении профиля, имеющего начальный угол атаки α_0 , прямолинейную хорду и симметричное распределение толщины $h(x, z)$, равен

$$\alpha_*(x, z, t) = \alpha_0 \mp \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha,$$

где знаки «—» и «+» относятся соответственно к верхней и нижней поверхностям. Если считать возмущения α весьма малыми, то при $M^2 \gg 1$ достаточно учесть нелинейное влияние только α_0

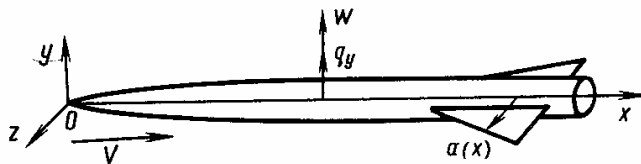


Рис. 10.29. Расчетная модель корпуса летательного аппарата

и h . Для этого необходимо получить нелинейное выражение для полного возмущенного давления p_* в зависимости от α_* и затем его линеаризировать по α .

На основании так называемой поршневой теории линеаризованное приращение перепада давления на профиле записывается в виде [10, 28]

$$\Delta p = \frac{\rho V^2}{2} \frac{4}{M} \left\{ 1 + \frac{\gamma+1}{4} M \left[\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{M}{4} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + M \alpha_0^2 \right] \right\} \alpha, \quad (10.178)$$

где γ — показатель адиабаты газа.

В поршневой теории предполагается, что возмущения в газе распространяются преимущественно в направлении нормали (близкой к направлению скорости скоса V_y) в рассматриваемой точке обтекаемой поверхности. В соответствии с этим давление на поверхность определяется так же, как давление сжимаемого цилиндрического столба жидкости на поршень, толкающий этот столб со скоростью V_y .

Поршневая теория в общем случае является нестационарной и она применяется для преимущественно плоских течений, когда выполняется какое-либо из условий [20]: $M^2 \gg 1$, $kM^2 \gg 1$, $k^2M^2 \gg 1$, где $k = \omega b/(2V)$ — приведенная частота колебаний, отнесенная к полухорде. Сравнение формул (10.177) и (10.178) показывает, что в случае тонкой пластины, наклоненной к потоку под малым углом атаки ($\partial h/\partial x \approx 0$, $\alpha_0 \approx 0$), поршневая теория приводит к такому же результату, как и точное решение для случая плоского стационарного обтекания тонкого профиля при $M^2 \gg 1$ (т. е. при $\sqrt{M^2 - 1} \approx M$).

Далее рассмотрим тонкое упругое тело с недеформируемым контуром поперечных сечений, представляющее собой корпус (фюзеляж) летательного аппарата (рис. 10.29). В этом случае вместо аэродинамического давления удобнее рассматривать поперечную распределенную нагрузку $q_y(x, t)$, приведенную к оси тела.

При низкочастотных поперечных колебаниях тела, симметричного относительно плоскости Oxy , аэродинамическую нагрузку можно определить приближенно, используя гипотезу стационарности и гипотезу плоских сечений [28]:

$$q_y(x, t) = \frac{\rho V^2}{2} S_0 \bar{c}_y^\alpha(x) \alpha(x, t), \quad (10.179)$$

где S_0 — некоторая характерная площадь (например, площадь миделя); $\bar{c}_y^\alpha(x)$ — текущее значение коэффициента подъемной

силы, приходящегося на единицу длины корпуса и отнесенного к площади S_0 . Коэффициент $\bar{c}_y^\alpha$ определяется в различных сечениях недеформируемого корпуса на основании теоретических или экспериментальных данных. При этом в соответствии с гипотезой плоских сечений не учитывается аэродинамическое влияние за счет скосов потока различных частей корпуса друг на друга.

В случае тонкого тела вращения с заостренной носовой частью нестационарная аэродинамическая нагрузка приближенно может быть определена по теоретической формуле [10]:

$$q_y(x, t) = \frac{\rho V^2}{2} 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) S(x) \alpha(x, t), \quad (10.180)$$

где $S(x)$ — площадь поперечного сечения тела.

Эта формула также справедлива в случае тела с крылом очень малого удлинения (или оперенного тела) при условии, что крыло лежит в плоскости Oxz , является недеформируемым в направлении размаха и что за задней кромкой крыла тело либо заканчивается, либо имеет постоянное поперечное сечение. В этом случае на участке расположения крыла

$$S(x) = \pi (a^2 - r^2 + r^4/a^2),$$

где $r(x)$ и $a(x)$ — радиус тела и полуразмах крыла в текущем сечении; в сечениях, где нет крыла, $a = r$ и $S(x) = \pi r^2$.

Формула (10.180) получена на основе нестационарной теории тонкого тела при условии двумерного течения несжимаемой жидкости в плоскостях, перпендикулярных направлению полета. В случае низкочастотных колебаний эта теория справедлива при любых скоростях, если выполняется ограничение $M \ll \lambda$, где λ — удлинение корпуса ($\lambda \gg 1$).

Если использовать гипотезу стационарности, то формула (10.180) переходит в формулу (10.179), где

$$\bar{c}_y^\alpha(x) = \frac{2}{S_0} \frac{dS}{dx}. \quad (10.181)$$

10.7.4. Уравнения колебаний

Составим уравнения колебаний упругого летательного аппарата в полете, используя метод Рэлея — Ритца, в соответствии с которым перемещения находятся в виде разложения

$$w(x, z, t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) \varphi_i(x, z), \quad (10.182)$$

где $\varphi_i(x, z)$ — заданные функции; $q_i(t)$ — неизвестные функции, рассматриваемые как обобщенные координаты.

Функции φ_i в каждом конкретном случае выбираются так, чтобы с их помощью можно было описать возможные перемещения

упругой конструкции, характерные для рассматриваемой задачи. Если рассматриваются колебания только некоторой части летательного аппарата (например, консоли крыла или оперения) в предположении, что эта часть крепится к массивной жесткой конструкции (корпусу), которую можно считать неподвижной, то при выборе функций φ_i необходимо удовлетворить кинематические условия закрепления.

Если рассматривается конструкция летательного аппарата в целом, то вследствие ее симметрии относительно плоскости Oxy малые колебания распадаются на симметричные и антисимметричные. При симметричных колебаниях $w(x, -z, t) = w(x, z, t)$, а при антисимметричных колебаниях $w(x, -z, t) = -w(x, z, t)$. Соответственно необходимо подчинять этим условиям заданные функции $\varphi_i(x, z)$, чтобы получить несвязанные уравнения симметричных и антисимметричных колебаний.

В случае летательного аппарата, находящегося в полете, при выборе функций φ_i необходимо учитывать его перемещения как твердого тела — перемещение в направлении оси Oy и повороты относительно осей Oz и Ox (такие движения могут быть описаны функциями $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = y - y_0$, $\varphi_3 = \alpha$).

С помощью заданных функций φ_i нетрудно учесть отклонения различных управляющих поверхностей, например, отклонение недеформируемого элерона может быть охарактеризовано кусочно-линейной функцией, представляющей собой перемещение элерона при отклонении его на единичный угол и отличной от нуля только на поверхности элерона.

Если метод Рэлея — Ритца используется в форме метода конечных элементов, то функции φ_i выбираются в виде локальных функций, описывающих деформации каждого элемента с учетом кинематических условий сопряжения элементов между собой. При этом линейная комбинация таких функций, в частности, должна описывать перемещения конструкции как твердого недеформируемого тела.

Наиболее часто в задачах аэроупругости в качестве заданных функций φ_i используются собственные формы колебаний. В силу условий ортогональности собственных форм колебаний ряд (10.182) в общем случае сходится быстрее, чем при использовании каких-либо других функций, и при этом в уравнениях обращаются в нуль коэффициенты, характеризующие инерционное и упругое взаимодействие между различными формами колебаний. Кроме того, при гармоничном возбуждении упругой конструкции легче всего возникают колебания при частотах, близких к собственным частотам, в результате чего собственные формы колебаний обладают хорошей избирательностью по частотам. Поэтому при исследовании колебаний в каком-либо определенном диапазоне частот, составляя уравнения, необходимо учитывать все те собственные формы колебаний, соответствующие частоты которых попадают в рассматриваемый диапазон частот.

Уравнения колебаний в обобщенных координатах q_i записываются в виде (10.19), т. е.

$$\sum_{j=1}^s (m_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j) = Q_i \quad (i = 1, \dots, s), \quad (10.183)$$

где $m_{ij} = \iint_S m \varphi_i \varphi_j dS$; $Q_i = \iint_S \Delta p \varphi_i dS$; $m(x, z)$ — масса, отнесенная к единице площади поверхности; $dS = dx dz$. Коэффициенты жесткости k_{ij} для составной упругой конструкции вычисляют в каждом конкретном случае, используя потенциальную энергию деформации всех ее частей.

Если функции φ_i являются собственными формами колебаний всей конструкции (а не отдельных ее составных частей), то $m_{ij} = \delta_{ij} m_i$, $k_{ij} = \delta_{ij} m_i \omega_i^2$, где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$; ω_i и m_i — собственная частота и коэффициент обобщенной массы i -й формы колебаний.

Вычислим обобщенные аэродинамические силы $Q_i(t)$. При этом будем считать, что аэродинамическое давление Δp определяется в формуле (10.175) на основании гипотезы стационарности, вследствие чего $P[\dots]$ является оператором по координатам x, z и не зависит от времени t . Тогда в силу линейности этого оператора на основании выражений (10.174), (10.175) и (10.182) получим

$$\Delta p = -\frac{\rho V^2}{2} \sum_{j=1}^s q_j P \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right] - \frac{\rho V}{2} \sum_{j=1}^s \dot{q}_j P [\varphi_j] + \frac{\rho V}{2} P [V_{by}]. \quad (10.184)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Q_i &= -\sum_{j=1}^s b_{ij} q_j - \sum_{j=1}^s d_{ij} \dot{q}_j + Q_{bi}(t), \\ b_{ij} &= \frac{\rho V^2}{2} \iint_S P \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right] \varphi_i dS, \\ d_{ij} &= \frac{\rho V}{2} \iint_S P [\varphi_j] \varphi_i dS, \\ Q_{bi} &= \frac{\rho V}{2} \iint_S P [V_{by}] \varphi_i dS. \end{aligned} \quad (10.185)$$

Здесь b_{ij} и d_{ij} являются постоянными коэффициентами, которые можно назвать соответственно обобщенными коэффициентами аэродинамической жесткости и аэродинамического демпфирования; $Q_{bi}(t)$ — являются известными обобщенными силами порывов ветра при заданном распределении их скоростей $V_{by}(x, z, t)$.

При вычислении коэффициентов (10.185) в некоторых случаях могут быть достигнуты существенные упрощения, если использо-

вать теорему обратимости [10, 6]. На основании этой теоремы в случае стационарного обтекания, а также при гармонических колебаниях несущей поверхности или произвольного тонкого тела выполняется тождество

$$\iint_S P[\alpha_j] \alpha_i dS = \iint_S P^*[\alpha_i] \alpha_j dS, \quad (10.186)$$

где $\alpha_i(x, z)$, $\alpha_j(x, z)$ — произвольные функции, представляющие местные углы атаки; $P[\alpha_i] = \Delta \bar{p}_i$ и $P^*[\alpha_i] = \Delta p_i^*$ — коэффициенты перепада давления в точке поверхности S , имеющей местные углы атаки $\alpha_i(x, z)$ при прямом (со скоростью V) и обратном (со скоростью $-V$) обтекании.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений колебаний упругого летательного аппарата в обобщенных координатах (10.183) с учетом обобщенных аэродинамических сил (10.185) может быть записана в форме

$$\sum_{j=1}^s [m_{ij} \ddot{q}_j + d_{ij} \dot{q}_j + (k_{ij} + b_{ij}) q_j] = Q_{bi}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (10.187)$$

или в матричном виде с учетом обозначений (10.22):

$$M \ddot{q} + D \dot{q} + (K + B) q = Q_b(t), \quad (10.188)$$

$$D = [d_{ij}], \quad B = [b_{ij}], \quad Q_b = [Q_{bi}].$$

При исследовании динамической реакции летательного аппарата на действие атмосферной турбулентности эта система при заданных начальных условиях обычно интегрируется численно. В результате определяются обобщенные координаты $q_i(t)$, перемещения (10.182) и приращение аэродинамического давления (10.184), а также ускорения (динамические перегрузки) и напряжения в заданных точках конструкции.

При исследовании переходного процесса, вызванного быстрым отклонением рулевых поверхностей по заданному закону, одна из обобщенных координат, например q_p , которая характеризует это отклонение, считается известной. Тогда уравнение для этой координаты при $i = p$ отбрасывается, а в оставшихся уравнениях (10.187) известные члены, содержащие q_p , переносятся в правую часть. После этого уравнения интегрируются численно.

10.7.5. Условия неустойчивости

В уравнении (10.188) матрицы D и B в общем случае являются несимметричными. Их можно представить в виде сумм симметричных и кососимметричных матриц:

$$D = D_c + D_k, \quad D_c = \frac{1}{2}(D + D^T), \quad D_k = \frac{1}{2}(D - D^T);$$

$$B = B_c + B_k, \quad B_c = \frac{1}{2}(B + B^T), \quad B_k = \frac{1}{2}(B - B^T).$$

Симметричная матрица $D_c = D_c^T$ называется диссипативной; она может быть как положительно определенной, так и неопределенной. Если она положительно определенная, то при любых формах колебаний демпфирующие силы $D_c \dot{q}$ уменьшают энергию системы, т. е. способствуют диссипации энергии и затуханию колебаний. Кососимметричная матрица $D_k = -D_k^T$ называется гироскопической (гироскопические и кориолисовы силы пропорциональны скоростям обобщенных координат и имеют кососимметричные матрицы коэффициентов); работа сил $D_k \dot{q}$ на любых действительных перемещениях равна нулю [4, 20]. Симметричная матрица $B_c = B_c^T$ представляет собой консервативные позиционные силы $B_c q$; она может быть как положительно определенной, так и неопределенной; ее можно объединить с матрицей жесткости K .

Кососимметричная матрица $B_k = -B_k^T$ представляет собой неконсервативные позиционные силы $B_k q$ (такие силы иногда называются циркуляционными); эти силы не имеют потенциала, а их работа за период колебаний может быть как положительной, так и отрицательной — это зависит от форм колебаний, поскольку работа неконсервативных сил зависит от пути их следования.

Таким образом, автономная аэроупругая система в общем случае является неконсервативной за счет наличия диссипативных и неконсервативных позиционных сил $D_c \dot{q}$ и $B_k q$. Такая система может отдавать энергию потоку или при определенных условиях черпать ее из потока; в первом случае колебания будут затухающими, а во втором — нарастающими. Нарастание колебаний происходит в случае, когда система является динамически неустойчивой. Обычно в аэроупругих системах основную роль в появлении динамической неустойчивости так же, как и статической неустойчивости, играют аэродинамические позиционные силы $B q$.

Система называется асимптотически устойчивой, если после прекращения действия внешних возмущений она при $t \rightarrow \infty$ возвращается к первоначальному невозмущенному движению (состоянию). Об устойчивости можно судить по виду решений однородной линеаризованной системы дифференциальных уравнений. Характеристическое уравнение однородной системы (10.188) при $Q_v = 0$, получаемое в результате подстановки в уравнения решения, отыскиваемого в виде $q = q^0 e^{\lambda t}$, записывается в форме равенства нулю определителя

$$|\lambda^2 M + \lambda D + K + B| = 0. \quad (10.189)$$

Оно имеет действительные и комплексно-сопряженные корни. Пары простых комплексно-сопряженных корней $\lambda_v = \alpha_v +$

$+i\omega_v$ и $\bar{\lambda}_v = \alpha_v - i\omega_v$ соответствует действительное частное решение

$$q_v = C_v Z_v e^{\lambda_v t} + \bar{C}_v \bar{Z}_v e^{\bar{\lambda}_v t} = \\ = 2A_v e^{\alpha_v t} [X_v \cos(\omega_v t + \varphi_v) - Y_v \sin(\omega_v t + \varphi_v)], \quad (10.190)$$

где $Z_v = X_v + iY_v$, $\bar{Z}_v = X_v - iY_v$ — комплексные формы колебаний (вектора), соответствующие корням λ_v и $\bar{\lambda}_v$; $C_v = A_v e^{i\varphi_v}$, $\bar{C}_v = A_v e^{-i\varphi_v}$; A_v и φ_v — произвольные константы, которые определяются из начальных условий. Решение, соответствующее простому действительному корню $\lambda_v = \alpha_v$, записывается как частный случай решения (10.190) при $\omega_v = 0$, $Y_v = 0$.

Для асимптотической устойчивости системы (10.188) необходимо и достаточно, чтобы вещественные части α_v всех корней характеристического уравнения были отрицательны. Если среди корней имеется по крайней мере один с положительной вещественной частью, то система является неустойчивой. При $\alpha_v > 0$ $\omega_v \neq 0$ система динамически неустойчива (флаттер) по формам X_v и Y_v , которые колеблются одновременно с частотой ω_v и со сдвигом фазы между ними, равным $\pi/2$; при $\alpha_v > 0$ и $\omega_v = 0$ система статически неустойчива (дивергенция) по форме X_v . При этом параметр α_v характеризует нарастание амплитуды колебаний (отклонения) по закону $e^{\alpha_v t}$.

Случай $\alpha = 0$ является границей устойчивости: на границе флаттера $\alpha = 0$ и $\lambda \pm i\omega$; на границе дивергенции $\alpha = 0$ и $\lambda = 0$.

Некоторые классические теоремы о влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость системы приведены в [20].

10.7.6. Двухстепенная расчетная модель

В большинстве случаев флаттер появляется в результате преимущественного взаимодействия каких-либо двух форм колебаний упругой конструкции. Наибольшее взаимодействие обычно проявляется между формами, собственные частоты которых близки друг другу; при этом, разумеется, существенное влияние имеют и сами формы колебаний, поскольку от них зависят знаки и значения аэродинамических коэффициентов b_{ij} .

Двухстепенные расчетные модели (для нескольких попарных комбинаций различных форм) часто используются для приближенных проектировочных расчетов флаттера, поскольку они позволяют получить результаты в виде формул, на основании которых несложно исследовать влияние различных конструктивных параметров на критическую скорость.

Если в уравнениях ограничиться двумя обобщенными координатами, например q_1 и q_2 (две степени свободы, $s = 2$), то характеристическое уравнение (10.189) примет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 m_{11} + \lambda d_{11} + k_{11} + b_{11} & \lambda^2 m_{12} + \lambda d_{12} + k_{12} + b_{12} \\ \lambda^2 m_{21} + \lambda d_{21} + k_{21} + b_{21} & \lambda^2 m_{22} + \lambda d_{22} + k_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (10.191)$$

где $a_4 = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$,

$$a_3 = m_{11}d_{22} + m_{22}d_{11} - m_{12}d_{21} - m_{21}d_{12},$$

$$a_2 = m_{11}(k_{22} + b_{22}) + m_{22}(k_{11} + b_{11}) - m_{12}(k_{21} + b_{21}) - \\ - m_{21}(k_{12} + b_{12}) + d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}, \quad (10.192)$$

$$a_1 = d_{11}(k_{22} + b_{22}) + d_{22}(k_{11} + b_{11}) - d_{12}(k_{21} + b_{21}) - \\ - d_{21}(k_{12} + b_{12}),$$

$$a_0 = (k_{11} + b_{11})(k_{22} + b_{22}) - (k_{12} + b_{12})(k_{21} + b_{21}).$$

Определим границу флаттера, полагая в характеристическом уравнении (10.191) $\lambda = i\omega$. Приравнявая нулю действительную и мнимую части, получим

$$a_4 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0 = 0, \\ \omega(\omega^2 a_3 - a_1) = 0. \quad (10.193)$$

Квадрат частоты на границе флаттера

$$\omega^2 = a_1/a_3. \quad (10.194)$$

Подставляя (10.194) в первое уравнение (10.193), получим границу флаттера в виде

$$a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3 + a_0 a_3^2 = 0. \quad (10.195)$$

Полагая в уравнении (10.191) $\lambda = 0$, находим границу дивергенции

$$a_0 = 0. \quad (10.196)$$

Из уравнений (10.195), (10.196) можно определить критические скорости флаттера V_Φ и дивергенции V_D в зависимости от параметров системы.

В качестве примера рассмотрим устойчивость цельноповоротного стабилизатора в сверхзвуковом потоке (рис. 10.30). Считаем, что стабилизатор как абсолютно жесткое тело может поворачиваться относительно оси вращения Oz за счет упругости проводки управления и

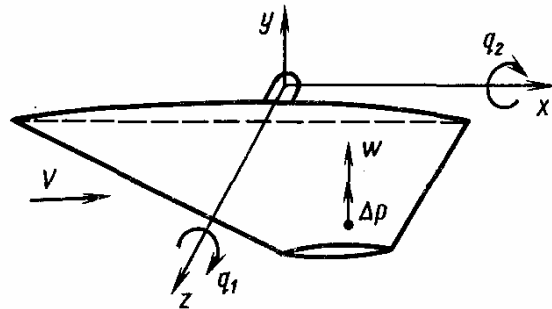


Рис. 10.30. Поворотный стабилизатор

относительно оси Ox , направленной по потоку — за счет упругости узла крепления к корпусу.

Обозначим через $q_1(t)$ и $q_2(t)$ углы поворота стабилизатора относительно осей Oz и Ox , считая их положительными при вращении по часовой стрелке (см. рис. 10.30). Тогда перемещение любой точки стабилизатора равно

$$\omega(x, z, t) = q_1(t) \varphi_1(x, z) + q_2(t) \varphi_2(x, z); \quad (10.197)$$

$$\varphi_1(x, z) = -x, \quad \varphi_2(x, z) = z.$$

Аэродинамическое давление сверхзвукового потока будем определять по формуле (10.177). В этом случае аэродинамический оператор $P[\dots]$ является множителем $4/\sqrt{M^2 - 1}$. Обозначим

$$\frac{\rho V}{2} P[\dots] = \frac{2\rho a_\infty}{\sqrt{1 - M^{-2}}} = \mu, \quad (10.198)$$

где a_∞ — скорость звука в невозмущенном потоке.

Коэффициенты жесткости в рассматриваемом случае можно определить экспериментально, прикладывая к консоли стабилизатора моменты M_z и M_x и измеряя соответствующие им статические углы поворота $q_{1\text{ст}}$ и $q_{2\text{ст}}$. При отсутствии упругого взаимодействия между этими углами будем иметь

$$k_{11} = M_z/q_{1\text{ст}}, \quad k_{22} = M_x/q_{2\text{ст}}, \quad k_{12} = k_{21} = 0. \quad (10.199)$$

Коэффициенты обобщенных масс (10.183) с учетом (10.197) равны массовым моментам инерции:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \iint_S mx^2 dS = J_z, \quad m_{22} = \iint_S mz^2 dS = J_x, \\ m_{12} &= m_{21} = -\iint_S mxz dS = -J_{xz}. \end{aligned} \quad (10.200)$$

Найдем коэффициенты аэродинамической жесткости и аэродинамического демпфирования (10.186). Учитывая (10.197) и (10.198), получим

$$\begin{aligned} b_{11} &= V\mu \iint_S x dS = V\mu Sx_0, \quad b_{12} = 0, \\ b_{21} &= -V\mu \iint_S z dS = -V\mu Sz_0, \quad b_{22} = 0, \\ d_{11} &= \mu \iint_S x^2 dS = \mu I_z, \quad d_{22} = \mu \iint_S z^2 dS = \mu I_x, \\ d_{12} &= d_{21} = -\mu \iint_S xz dS = -\mu I_{xz}. \end{aligned} \quad (10.201)$$

Здесь x_0, z_0 — координаты центра давления, совпадающие в рассматриваемом случае с центром тяжести площади S, I_x, I_z, I_{xz} — моменты инерции площади стабилизатора. Коэффициенты могут быть уточнены с учетом экспериментальных данных для аэродинамических производных консоли стабилизатора.

Если аэродинамическое давление определять по формуле поршневой теории (10.182) с учетом поправки на толщину $h(x, z)$ и начальный угол атаки α_0 , то коэффициент μ следует заменить функцией

$$\mu(x, z) = 2\rho a_\infty \left\{ 1 + \frac{\gamma+1}{4} M \left[\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{M}{4} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + M\alpha_0^2 \right] \right\}, \quad (10.202)$$

которая в выражениях b_{ij} и d_{ij} останется под интегралом по S .

Уравнение (10.195) для критической скорости флаттера приводится к квадратному уравнению

$$k_2 V^2 + k_1 V + k_0 = 0, \quad (10.203)$$

коэффициенты которого зависят от μ и, следовательно, от $M = V/a_\infty$. Критическая скорость V_Φ может быть определена методом последовательных приближений, если полагать в первом приближении $\mu = 2\rho a_\infty$, или графически — как точка пересечения кривой $V(M)$, представляющей решение квадратного уравнения (10.203) при заданных значениях M , с прямой $V = Ma_\infty$.

Из уравнения (10.196) получим формулу для критической скорости дивергенции $\mu_d V_d = -k_{11}/Sx_0$, откуда следует, что дивергенция поворотного стабилизатора возможна только при $x_0 < 0$ ($\mu > 0, k_{11} > 0$), т. е. в случае, когда центр давления лежит впереди оси вращения.

Критические скорости флаттера и дивергенции должны с определенным запасом превосходить максимальную скорость полета на данной высоте.

ГЛАВА 11

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПРИ НЕУПРУГОМ ПОВЕДЕНИИ МАТЕРИАЛА

11.1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

11.1.1. Пластические деформации

Как известно, закон Гука (1.11), которым описывается связь между напряжениями и деформациями, для большинства конструкционных материалов и, в частности, для металлических сплавов справедлив лишь до определенного уровня напряжений. Рассмотрим диаграмму деформирования материала, показанную на рис. 11.1, которая может быть получена при растяжении образца. Линейная зависимость между напряжениями и деформациями (закон Гука) сохраняется до предела пропорциональности, характеризуемого ординатной точкой *A*, при дальнейшем нагружении появляется площадка текучести *BC*, характеризующая пределом текучести σ_T , а затем участок упрочнения материала *CDK*. Экспериментально установлено, что, если после нагружения до некоторой точки *D* осуществить разгрузку, т. е. снизить напряжения до нуля, соответствующий участок разгрузки *DF* можно приближенно считать прямым и параллельным начальному участку активного нагружения *OA*. При этом в процессе разгрузки исчезает только часть развившейся деформации — упругая составляющая *FG*. Участок *OF* характеризует остаточную, пластическую деформацию, наличие которой является характерным признаком пластического поведения материала. Другим характерным свойством упругопластического деформирования является независимость кривой $\sigma(\epsilon)$ от времени нагружения образца.

Отчетливый горизонтальный участок текучести *BC* наблюдается далеко не у всех материалов, поэтому точка перехода из упругой области в пластическую является достаточно условной. В технических расчетах за предел текучести σ_T (или σ_{02}) принимается напряжение, при котором остаточная деформация составляет 0,2 %. Это напряжение устанавливается как ордината точки пересечения экспериментальной кривой $\sigma(\epsilon)$ с прямой, параллельной участку *OA*, проходящей через точку с абсциссой $\epsilon = 0,2 \%$.

Расчет конструкций с учетом пластических деформаций материала является одной из основных задач науки о прочности летательных аппаратов. Для элементов, работающих в условиях интенсивного и кратковременного одноразового нагружения, появление пластических деформаций, как правило, считается до-

пустимым и должно учитываться при расчете. В конструкциях, работающих многократно и в течение длительного времени, неупругое поведение материала, сопровождающееся образованием остаточных деформаций, обычно не допускается. Однако и в этом случае определение напряженно-деформированного состояния конструкции за пределом упругости, т. е. при нагрузках, превышающих эксплуатационные, позволяет установить предельную нагрузку, истинный запас прочности и возможный характер разрушений. Исключительно большое значение имеет анализ пластического поведения материалов для технических задач, связанных с приданием металлической заготовке необходимой формы за счет образования соответствующих остаточных деформаций.

Определение напряженно-деформированного состояния авиационных конструкций, работающих за пределом упругости (а также момента перехода в упругопластическое состояние), осуществляется с помощью уравнений прикладной теории пластичности, к выводу и анализу которых мы переходим. Прежде всего отметим, что соотношения теории пластичности так же, как и соотношения теории упругости, можно разделить на три группы — статические, геометрические и физические. При этом статические соотношения — уравнения равновесия (1.9), записанные через функции напряжений, и геометрические соотношения (1.3), связывающие деформации с перемещениями, не зависят от свойств материала. Для построения теории пластичности необходимо получить физические соотношения, обобщающие закон Гука (1.11) на случай упругопластических деформаций.

11.1.2. Обобщенные инвариантные характеристики напряженного состояния

Как следует из теории упругости (см. разд. 1.1.2), напряжения в любой точке тела определяются девятью компонентами, образующими тензор напряжений T_σ , который в декартовых координатах x, y, z записывается в виде

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (11.1)$$

В силу закона парности касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ тензор напряжений симметричен относительно диагонали $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$. Для дальнейшего исключительно важное значение имеет понятие инвариантности. Дело в том, что компоненты тензора напряжений существенно зависят от направления осей координат, а переход материала в пластическое состояние в данной точке — явление объективное, которое не должно зависеть от того, в какую сторону мы направили оси. Поэтому напря-

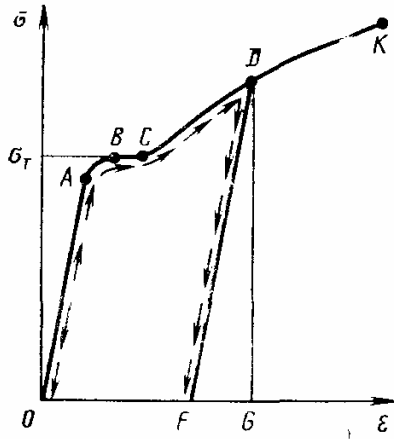


Рис. 11.1. Экспериментальная диаграмма деформирования упругопластического материала

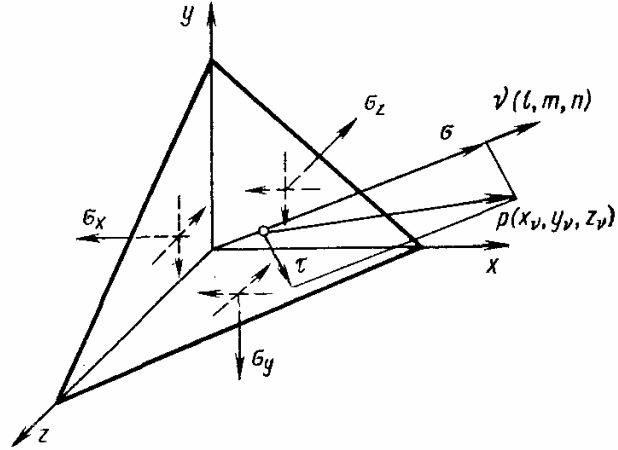


Рис. 11.2. Напряжения, действующие по граням элементарного тетраэдра

жения, уровнем которых в итоге определяется переход материала за предел упругости, должны обладать некоторыми инвариантными комбинациями, сохраняющими постоянные значения в данной точке во всех системах, для которых эта точка является началом координат.

Для получения этих инвариантных комбинаций (инвариантов тензора напряжений), а также некоторых других необходимых для дальнейшего соотношений рассмотрим равновесие элементарного тетраэдра, показанного на рис. 11.2, и найдем напряжения на наклонной площадке. Суммарное напряжение p с проекциями на оси X_v , Y_v , Z_v действует по наклонной площадке ds_v и уравнивается нормальными и касательными напряжениями, действующими по координатным площадкам (см. также рис. 1.2). Нормаль к площадке v зададим направляющими косинусами $l = \cos(v, x)$, $m = \cos(v, y)$, $n = \cos(v, z)$, причем

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (11.2)$$

Проектируя действующие на элемент силы на оси x , y и z , получим соотношения (1.8), т. е.

$$\begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ Y_v &= \sigma_y m + \tau_{zy} n + \tau_{xy} l, \\ Z_v &= \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Равенства (11.3) определяют проекции напряжения p в зависимости от l , m , n , т. е. от ориентации наклонной площадки. Как известно из теории упругости, среди этих площадок можно выделить так называемые главные площадки, по которым действуют только нормальные напряжения. Для определения главных площадок предположим, что показанная на рис. 11.2 наклонная

площадка является главной. Тогда на ней $\tau = 0$, $p = \sigma$ и, следовательно,

$$X_v = \sigma l, Y_v = \sigma m, Z_v = \sigma n. \quad (11.4)$$

Подставляя (11.4) в (11.3), запишем три линейных алгебраических уравнения

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Уравнения (11.5) включают в качестве неизвестных направляющие косинусы нормали к главной площадке. Ввиду того, что система (11.5) является однородной, она имеет решение, отличное от нуля только в том случае, если ее определитель равен нулю. Приравняв нулю и раскрывая определитель системы (11.5), получим следующее кубическое уравнение, определяющее главное нормальное напряжение, действующее на главной площадке

$$\sigma^3 - I_1(T_\sigma)\sigma^2 - I_2(T_\sigma)\sigma - I_3(T_\sigma) = 0, \quad (11.6)$$

где $I_1(T_\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$,

$$I_2(T_\sigma) = -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2, \quad (11.7)$$

$$I_3(T_\sigma) = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Уравнение (11.6) всегда имеет три действительных корня, т. е. в каждой точке тела существуют три главных напряжения (среди них могут быть и равные нулю), которые обозначаются в соответствии с неравенством $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (с учетом знаков напряжений). Соответственно имеются и три главные площадки, по которым действуют напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Для определения соответствующих направляющих косинусов достаточно подставить в систему (11.5) одну из главных величин напряжений и решить ее совместно с уравнением (11.2). При этом, так как определитель системы (11.5) равен нулю, из трех уравнений независимыми будут только два. Можно показать, что найденные таким образом три главные площадки являются взаимно ортогональными.

Ортогональность главных площадок позволяет ввести специальную систему координат, в которой координатные плоскости совпадают с главными площадками (рис. 11.3). Для такой системы координат в выражениях (11.3) следует принять $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \sigma_z = \sigma_3, \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, т. е. имеем $X_v =$

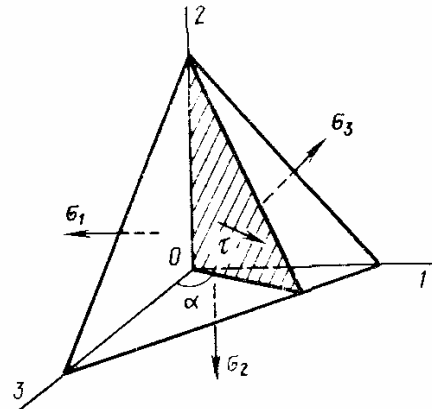


Рис. 11.3. Элементарный тетраэдр в главных координатах

$= \sigma_1 l$, $Y_v = \sigma_2 m$, $Z_v = \sigma_3 n$. Выражая отсюда l , m , n и подставляя в уравнение (11.2), получим

$$\left(\frac{X_v}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{Y_v}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{Z_v}{\sigma_3}\right)^2 = 1.$$

Это уравнение определяет поверхность, называемую эллипсоидом напряжений. Вектор, соединяющий начало координат с любой точкой поверхности, определяет напряжение, действующее на площадке, ортогональной этому вектору. Ввиду того, что наибольшее расстояние от центра до поверхности эллипсоида соответствует большой полуоси ($X_v = \sigma_1$, $Y_v = Z_v = 0$), можно заключить, что главное напряжение σ_1 является наибольшим напряжением в точке, совпадающей с центром эллипсоида. Поскольку максимальное напряжение, действующее в данной точке тела, не должно зависеть от выбранной системы координат, можно утверждать, что главное напряжение σ_1 является инвариантной характеристикой. Следовательно, коэффициенты I_1 , I_2 , I_3 уравнения (11.6) и два других его корня σ_2 , σ_3 должны обладать этим свойством. Коэффициенты I_1 , I_2 , I_3 не зависят от направления осей координатной системы с началом в данной точке и называются инвариантами тензора напряжений.

Исследуем экстремальные свойства касательных напряжений. Из рис. 11.2 следует, что на наклонной площадке

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2. \quad (11.8)$$

Напряжение p определяется через проекции X_v , Y_v , Z_v следующим образом:

$$p^2 = X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2. \quad (11.9)$$

Совместим координатные плоскости с главными площадками (см. рис. 11.3). Тогда из равенств (11.3) имеем $X_v = \sigma_1 l$, $Y_v = \sigma_2 m$, $Z_v = \sigma_3 n$, т. е. (11.9) принимает вид

$$p^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2. \quad (11.10)$$

Для определения нормального напряжения σ спроектируем вектор p на нормаль к площадке v . Для этого достаточно спроектировать его проекции $X_v = \sigma_1 l$, $Y_v = \sigma_2 m$, $Z_v = \sigma_3 n$ на нормаль v и сложить их, т. е.

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (11.11)$$

Рассмотрим, например, площадку, проходящую через ось 2 (см. рис. 11.3). Для нее имеем $m = 0$ и согласно равенству (11.2) $n^2 = 1 - l^2$. Касательные напряжения, действующие на этой площадке, определяются с помощью соотношений (11.8), (11.10), (11.11), т. е.

$$\tau^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_3^2 (1 - l^2) - [\sigma_1 l^2 + \sigma_3 (1 - l^2)]^2. \quad (11.12)$$

Исследуем изменение τ при повороте площадки вокруг оси 2. Если она совпадает с главными площадками 102 ($l = 0$) или 203 ($l = -1$), то, очевидно, $\tau = 0$. Найдем положение площадки, при котором касательные напряжения максимальны. Из (11.12) имеем

$$\frac{d\tau^2}{dl^2} = \sigma_1^2 - \sigma_3^2 - [\sigma_1 l^2 + \sigma_3 (1 - l^2)] (\sigma_1 - \sigma_3) = 0.$$

Исключая случай $\sigma_1 = \sigma_3$, при котором $\tau = 0$, т. е. имеет место минимум касательных напряжений, получим $l^2 = 1/2$, т. е. $\alpha = 45^\circ$ (см. рис. 11.3). Из равенств (11.12), (11.11) при этом найдем $\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2/4$, $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Обобщая полученный результат, отметим, что в каждой точке тела существуют три подобные площадки, на которых действуют экстремальные касательные напряжения $\tau_{12} = \pm(\sigma_1 - \sigma_3)/2$, $\tau_{13} = \pm(\sigma_1 - \sigma_3)/2$, $\tau_{23} = \pm(\sigma_2 - \sigma_3)/2$ и соответствующие нормальные $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, $\sigma = (\sigma_2 + \sigma_3)/2$.

Ввиду того, что напряжение σ_1 является наибольшим, а σ_3 — наименьшим (было принято, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), максимальные касательные напряжения определяются равенством

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (11.13)$$

Площадка, на которой они действуют, проходит через ось 2 и составляет с осями 1 и 3 углы 45° (см. рис. 11.3). Поскольку напряжения σ_1 и σ_3 являются инвариантными характеристиками напряженного состояния, напряжение $\tau_{\max}$ также не зависит от выбранной системы координат.

Как показывают экспериментальные исследования, нагружение металлов всесторонним гидростатическим давлением не вызывает остаточных деформаций. Для такого нагружения $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_0$ и согласно (11.6) $I_1(T_\sigma) = 3\sigma_0$. Ввиду того, что $I_1(T_\sigma)$ является инвариантом тензора напряжений, можно и в общем случае напряженного состояния ввести величину

$$\sigma_0 = \frac{I_1(T_\sigma)}{3} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (11.14)$$

которая называется средним напряжением и характеризует составляющую тензора напряжений, вызывающую изменение объема материала. Эта составляющая не вызывает пластических деформаций и при построении теории пластичности целесообразно выделить ее из тензора напряжений. Проведем это, представив тензор напряжений (11.1) в виде

$$T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma, \quad (11.15)$$

где

$$T_\sigma^0 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}$$

называется шаровым тензором, а

$$D_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix} \quad (11.16)$$

называется девиатором напряжений. По девиатору напряжений можно судить, насколько напряженное состояние в данной точке отличается от всестороннего равномерного растяжения или сжатия.

Для дальнейшего существенным является именно девиатор напряжений, поэтому рассмотрим его более подробно. Так же, как и T_{σ} , девиатор напряжений D_{σ} является тензором и имеет три инварианта, сохраняющих в данной точке постоянные значения при любых направлениях осей декартовой системы координат. Эти инварианты могут быть построены по формулам (11.7), если заменить в них σ_x на $\sigma_x - \sigma_0$ и т. д. Исключая из полученных выражений σ_0 с помощью равенства (11.14), окончательно будем иметь

$$I_1(D_{\sigma}) = 0,$$

$$I_2(D_{\sigma}) = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]. \quad (11.17)$$

Третий инвариант $I_3(D_{\sigma})$ в дальнейшем не потребуется и здесь не приводится. В теории пластичности исключительно большую роль играет второй инвариант девиатора напряжений $I_2(D_{\sigma})$. С его помощью можно ввести некоторые обобщенные инвариантные характеристики напряженного состояния, например, величину

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(D_{\sigma})}, \quad (11.18)$$

которая называется интенсивностью напряжений и в развернутой форме имеет вид

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}. \quad (11.19)$$

Численный коэффициент в формуле (11.19) подобран так, чтобы при одноосном нагружении значение интенсивности напряжений совпадало с величиной напряжений. Действительно, если все напряжения, кроме, например, $\sigma_x = \sigma$, равны нулю, из (11.19) получим $\sigma_i = \sigma$. В принципе этот коэффициент может быть выбран произвольно, в том числе и так, чтобы обобщенное напряжение вырождалось в касательное напряжение при чистом сдвиге. Соответствующая обобщенная инвариантная характеристика

напряженного состояния называется интенсивностью касательных напряжений и записывается в виде

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}. \quad (11.20)$$

При чистом сдвиге, т. е. когда все напряжения, кроме, например $\tau_{xy} = \tau$, равны нулю, имеем $\tau_i = \tau$.

Существенно, что напряжения σ_i и τ_i не зависят от направления осей координат, т. е. позволяют получить объективную характеристику напряженного состояния в данной точке. Этим же свойством обладают, как следует из изложенного выше, главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$, которое определяется формулой (11.13).

11.1.3. Обобщенные инвариантные характеристики деформированного состояния

Получим теперь аналогичные результаты для деформаций. Как следует из теории упругости, деформации так же, как и напряжения, образуют симметричный тензор, аналогичный (11.1), т. е.

$$T_\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \epsilon_z \end{vmatrix}.$$

Этот тензор обладает тремя инвариантами, которые могут быть получены непосредственно из (11.7), если заменить σ_x на ϵ_x и т. д., τ_{xy} на $\gamma_{xy}/2$ и т. д.:

$$I_1(T_\epsilon) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z,$$

$$I_2(T_\epsilon) = -(\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z) + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2),$$

$$I_3(T_\epsilon) = \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z - \frac{1}{4}(\epsilon_x \gamma_{xy}^2 + \epsilon_y \gamma_{xz}^2 + \epsilon_z \gamma_{xy}^2 - \gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz}).$$

Для тензора деформаций так же, как и для тензора напряжений, существуют три главных направления, вдоль которых реализуются главные деформации $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$. В системе координат, оси которой совпадают с главными направлениями, деформации сдвига равны нулю, т. е. главные направления в процессе деформирования остаются взаимно ортогональными. Аналогично (11.13) может быть найдена максимальная деформация сдвига, которая определяется равенством

$$\gamma_{\max} = \epsilon_1 - \epsilon_3. \quad (11.21)$$

Выделим теперь из тензора деформаций составляющую, характеризующую изменение объема тела. Введем среднюю деформацию

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \frac{I_1(T_\epsilon)}{3} = \frac{\theta}{3}, \quad (11.22)$$

где $\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ — относительное изменение объема материала.

Тогда тензор деформаций аналогично (11.15) можно представить в виде

$$T_\epsilon = T_\epsilon^0 + D_\epsilon,$$

где $T_\epsilon^0 = \begin{vmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{vmatrix}$

— шаровой тензор, характеризующий изменение объема, а

$$D_\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_x - \epsilon_0 & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \epsilon_y - \epsilon_0 & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \epsilon_z - \epsilon_0 \end{vmatrix} \quad (11.23)$$

— девиатор деформаций, характеризующий изменение формы тела. Инварианты девиатора деформаций записываются аналогично (11.17), т. е.

$$I_1(D_\epsilon) = 0,$$

$$I_2(D_\epsilon) = \frac{1}{6} [(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_x - \epsilon_z)^2] + \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2). \quad (11.24)$$

Третий инвариант $I_3(D_\epsilon)$ здесь не приводится.

Образование и развитие пластических деформаций связано с напряжениями, вызывающими изменение формы тела. Поэтому в теории пластичности большую роль играет девиатор деформаций и особенно существенным является его второй инвариант $I_2(D_\epsilon)$. Аналогично понятию интенсивности напряжений (11.19) можно ввести величину интенсивности деформаций

$$\epsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{I_2(D_\epsilon)}, \quad (11.25)$$

которая в развернутой форме имеет вид

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_x - \epsilon_z)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)}. \quad (11.26)$$

При нагружении вдоль оси x имеем $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, $\epsilon_x = \epsilon$, $\epsilon_y = \epsilon_z = -\mu_n \epsilon$, где μ_n — коэффициент Пуассона, который при упругопластическом деформировании не является постоянным и зависит от уровня напряжений. При этом из (11.26) получим

$$\epsilon_i = \frac{2}{3} (1 + \mu_n) \epsilon. \quad (11.27)$$

В отличие от σ_i интенсивность деформаций вырождается при одноосном нагружении в деформацию ϵ лишь при $\mu_n = 0,5$. Такое значение коэффициента Пуассона имеет материал, объем которого при деформировании не изменяется. Действительно, при $\mu_n = 0,5$ для одноосного нагружения согласно (11.22) имеем $\theta = \epsilon - 0,5\epsilon - 0,5\epsilon = 0$. Таким образом, ϵ_i вырождается в ϵ только для несжимаемого материала.

Аналогично интенсивности касательных напряжений (11.20) можно ввести интенсивность деформаций сдвига

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \\ \times \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_x - \epsilon_z)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)}. \quad (11.28)$$

При чистом сдвиге, т. е. когда $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$, $\gamma_{xy} = \gamma$, $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, получим $\gamma_i = \gamma$.

Таким образом, можно ввести обобщенные инвариантные характеристики деформированного состояния ϵ_i и γ_i , не зависящие в данной точке от направления осей выбранной системы координат. Инвариантными являются также главные деформации ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 и максимальная деформация сдвига (11.21).

11.1.4. Анализ обобщенного закона Гука

Выше были получены некоторые статические и геометрические соотношения, необходимые для построения прикладной теории пластичности. Прежде чем перейти к выводу соотношений, связывающих напряжения и деформации в теории пластичности, рассмотрим закон Гука, используемый в теории упругости. Представленный ниже анализ позволит в дальнейшем получить физические соотношения теории пластичности путем естественного обобщения закона Гука для линейно-упругого тела. Закон Гука имеет вид

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z), \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x - \mu \sigma_z), \quad (11.29)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu \sigma_x - \mu \sigma_y), \\ \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G, \quad \gamma_{xz} = \tau_{xz}/G, \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G; \quad (11.30)$$

здесь E — модуль упругости; $G = E/[2(1 + \mu)]$ — модуль сдвига; μ — постоянный для линейно-упругого тела коэффициент Пуассона. Складывая равенства (11.29) и вводя величину среднего напряжения σ_0 и объемные меры деформаций ϵ_0, θ согласно (11.14), (11.22), получим

$$\sigma_0 = 3K\epsilon_0 = K\theta, \quad (11.31)$$

где $K = E/[3(1 - 2\mu)]$ — модуль объемной деформации. Значение $\mu = 0,5$ соответствует несжимаемому материалу. Действительно, при $\mu \rightarrow 0,5$ имеем $K \rightarrow \infty$. Кроме того, в этом случае $G = E/3$.

Вычтем из левых и правых частей равенств (11.29) величину деформации ϵ_0 . Выражая в правых частях ϵ_0 через σ_0 согласно (11.31), окончательно получим

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= 2G(\epsilon_x - \epsilon_0), \quad \sigma_y - \sigma_0 = 2G(\epsilon_y - \epsilon_0), \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2G(\epsilon_z - \epsilon_0). \end{aligned} \quad (11.32)$$

Добавляя к этим равенствам закон Гука для касательных напряжений (11.30), можно заключить, что компоненты девиатора напряжений (11.16), пропорциональны компонентам девиатора деформаций (11.23), т. е.

$$D_\sigma = 2GD_\epsilon. \quad (11.33)$$

Установим связь между обобщенными инвариантными характеристиками напряженно-деформированного состояния, т. е. между σ_i и ϵ_i , τ_i и γ_i , $\tau_{\max}$ и $\gamma_{\max}$. Заменяя в правой части (11.19) функции напряжений через функции деформаций с помощью равенств (11.30), (11.32) и сравнивая полученное выражение с (11.26), будем иметь

$$\sigma_i = 3G\epsilon_i. \quad (11.34)$$

Для несжимаемого материала ($G = E/3$) получим

$$\sigma_i = E\epsilon_i. \quad (11.35)$$

Преобразуя аналогичным образом выражение для τ_i (11.20), можно установить, что $\tau_i = G\gamma_i$. И, наконец, если записать соотношения (11.32) в главных осях, заменив x, y, z на 1, 2, 3, то вычитая третье равенство из первого, получим $\tau_{\max} = G\gamma_{\max}$.

Таким образом, можно заключить, что для линейно-упругого тела девиатор напряжений прямо пропорционален девиатору деформаций и независимо от вида напряженного состояния интенсивность напряжений σ_i связана с интенсивностью деформаций ϵ_i единой зависимостью, аналогичной закону Гука для одноосного растяжения (для несжимаемого материала), а τ_i и $\tau_{\max}$ связаны соответственно с γ_i и $\gamma_{\max}$ законом Гука для чистого сдвига.

В заключение анализа линейно-упругого материала получим еще один результат, который потребуется в дальнейшем. Запишем

выражение для удельной потенциальной энергии деформации. Из (1.23) при $t = 0$ имеем

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}).$$

Выражая напряжения и деформации через σ_0 , θ (11.14), (11.22) и компоненты девиаторов (11.16), (11.23), после весьма громоздких преобразований, которые здесь опущены, окончательно получим

$$W = \frac{\sigma_i \varepsilon_i}{2} + \frac{\sigma_0 \theta}{2} = W_\phi + W_{об}, \quad (11.36)$$

т. е. суммарная удельная энергия может быть разделена на две составляющие — энергию, накопленную в результате изменения формы тела $W_\phi = \sigma_i \varepsilon_i / 2$ и его объема $W_{об} = \sigma_0 \theta / 2$.

11.1.5. Условия пластичности

Сформулируем критерий (условие пластичности), который позволит установить момент перехода материала в пластическое состояние. В случае одноосного растяжения этот вопрос решается просто — материал переходит в пластическое состояние, когда нормальное напряжение достигает предела текучести σ_T , определяемого экспериментально (см. рис. 11.1). Необходимо сформулировать условие, которое позволит решить этот вопрос для произвольного напряженного состояния, имея в распоряжении лишь одну экспериментальную характеристику — σ_T . Ниже приводятся два наиболее распространенных условия пластичности.

Первое из них, называемое условием пластичности Треска — Сен-Венана (или просто условием Треска), было сформулировано в 70-х годах прошлого века на основе экспериментальных исследований французского инженера Треска, который установил, что материал переходит в пластическое состояние, когда максимальные касательные напряжения $\tau_{\max}$ достигают предела текучести при сдвиге τ_T , т. е. согласно равенству (11.13)

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_T. \quad (11.37)$$

При одноосном растяжении до предела текучести материала имеет $\sigma_1 = \sigma_T$, $\sigma_3 = 0$, т. е. из (11.37) следует, что $\tau_T = 0,5\sigma_T$ и условие Треска можно записать в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (11.38)$$

Отметим, что соотношение между пределами текучести при растяжении и сдвиге можно установить экспериментально. Для различных металлов при этом получается $\tau_T = (0,55 \dots 0,6) \sigma_T$, т. е. условие Треска удовлетворительно согласуется с экспериментом.

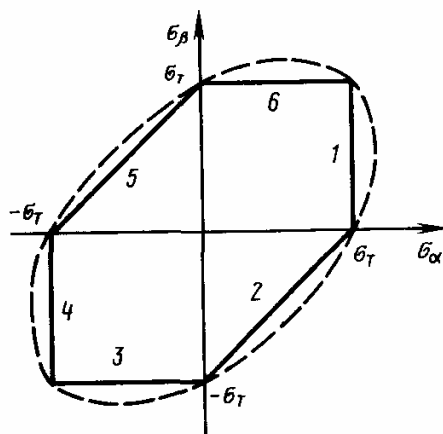


Рис. 11.4. Условия пластичности для плоского напряженного состояния:

— условие Треска; — — — условие Мизеса

Рассмотрим геометрическую интерпретацию условия Треска. В пространстве напряжений (т. е. в системе координат, по осям которой отложены величины напряжений, действующие в данной точке) условие пластичности определяет некоторую поверхность, а напряженное состояние представляется точкой пространства. Если эта точка лежит внутри поверхности, определяемой условием пластичности, материал является упругим, если она лежит вне этой поверхности — упругопластическим.

Применительно к условию Треска исследуем случай плоского напряженного состояния (одно из главных напряжений равно нулю). Обозначим главные напряжения через σ_α , σ_β и $\sigma_\gamma = 0$, причем в зависимости от относительной величины напряжений индексы α , β , γ принимают значения 1, 2, 3 (напомним, что индекс 1 присваивается наибольшему главному напряжению, а индекс 3 — наименьшему). Введем систему координат, показанную на рис. 11.4. Предположим, что $\sigma_\alpha > \sigma_\beta > 0$, тогда $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, условие (11.38) записывается в виде $\sigma_\alpha = \sigma_T$ и определяет отрезок 1 на рис. 11.4. Если $\sigma_\alpha > 0$, а $\sigma_\beta < 0$, получим $\alpha = 1$, $\beta = 3$, т. е. $\sigma_\alpha - \sigma_\beta = \sigma_T$ (отрезок 2). Аналогично при $\sigma_\beta < \sigma_\alpha < 0$ получим прямую 3, при $\sigma_\alpha < \sigma_\beta < 0$ — 4, при $\sigma_\alpha < 0$, $\sigma_\beta > 0$ — 5 и при $\sigma_\beta > \sigma_\alpha > 0$ — отрезок 6. В результате условие пластичности Треска изображается шестиугольником, показанным на рис. 11.4. Проведенное построение иллюстрирует основной недостаток условия Треска — оно записывается относительно главных напряжений, которые необходимо предварительно определить, и его форма зависит от относительной величины и знака главных напряжений. Однако в тех случаях, когда направления и знаки главных напряжений известны заранее, условие Треска оказывается весьма эффективным, так как оно линейно относительно напряжений.

Второе условие пластичности носит название условия Мизеса — Губера — Генки (или просто условия Мизеса). Оно было сформулировано в начале нашего века и может быть получено следующим образом. Пластическое деформирование связано в основном с изменением формы тела, объемная деформация является обратимой, т. е. упругой. В качестве инвариантной меры, характеризующей степень изменения формы, может быть принята введенная выше удельная энергия формоизменения W_Φ . Согласно равенствам (11.36) и (11.34) в общем случае напряженного состояния имеем $W_\Phi = \sigma_i \varepsilon_i / 2 = \sigma_i^2 / 6G$. Естественно предположить,

что материал переходит в данной точке в пластическое состояние, когда W_ϕ достигает некоторого критического значения W_ϕ^* , не зависящего от вида напряженного состояния, т. е. $W_\phi = W_\phi^*$. Величина W_ϕ^* может быть определена из опыта на одноосное растяжение. При этом $\sigma_i = \sigma$ и при достижении предела текучести $\sigma = \sigma_T$, $W_\phi^* = \sigma_T^2/6G$. Приравнявая W_ϕ и W_ϕ^* , получим $\sigma_i = \sigma_T$ или в развернутом виде с учетом выражения (11.19)

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = 2\sigma_T^2. \quad (11.39)$$

Соотношение (11.39) и является искомым условием пластичности. Для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) условие пластичности Мизеса имеет вид

$$\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_T^2. \quad (11.40)$$

Для геометрической интерпретации условия Мизеса запишем его в главных напряжениях σ_α , σ_β . Из (11.40) имеем

$$\sigma_\alpha^2 - \sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2 = \sigma_T^2. \quad (11.41)$$

Уравнение (11.41) на плоскости (σ_α , σ_β) определяет эллипс, показанный пунктиром на рис. 11.4.

Преимуществом условия Мизеса является то, что оно может быть записано в форме (11.39), (11.41) в произвольной декартовой системе координат. Для чистого сдвига при нагружении до предела текучести $\tau_{xy} = \tau_T$ ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) из (11.39) имеем $\tau_T = \sigma_T/\sqrt{3} = 0,58\sigma_T$. Сравнивая этот результат с экспериментальным — $\tau_T = (0,55 \dots 0,6) \sigma_T$, можно заключить, что условие Мизеса согласуется с экспериментом несколько лучше, чем условие Треска, для которого $\tau_T = 0,5\sigma_T$. Однако, как следует из рис. 11.4, различие между этими двумя условиями невелико и в практических расчетах используется, как правило, условие, с которым задача решается проще.

Помимо двух рассмотренных выше, можно сформулировать и другие, более сложные условия пластичности, причем все возможные варианты должны удовлетворять некоторым общим требованиям. Прежде всего условие пластичности должно устанавливать момент перехода материала в пластическое состояние в общем случае напряженного состояния и содержать экспериментальные параметры, которые могут быть найдены из простых опытов. Далее условие пластичности должно давать объективную информацию, не зависящую от принятой системы координат, т. е. оно должно быть записано через инвариантные характеристики напряженного состояния. И, наконец, поверхность, определяемая условием пластичности, должна быть выпуклой (т. е. отрезок прямой, соединяющей две любые точки поверхности, должен лежать внутри этой поверхности), а начало координат пространства напряжений должно находиться внутри этой поверхности.

Таким образом, подставляя величины напряжений, найденные в результате решения задачи для упругого материала, в условие пластичности, можно установить значение внешней нагрузки, при котором начинается пластическое деформирование материала. При дальнейшем увеличении нагрузки закон Гука, очевидно, уже неприменим и необходимо использовать более общие физические соотношения теории пластичности.

11.1.6. Физические соотношения деформационной теории пластичности

В течение всего процесса нагружения конструкции от исходного состояния до разрушения в ее элементах развиваются упругие деформации и начиная с некоторого момента накапливаются пластические деформации. В связи с этим целесообразно сразу представить деформации как сумму упругих и пластических составляющих, т. е. принять, например

$$\epsilon_x = \epsilon_x^y + \epsilon_x^n \dots, \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^y + \gamma_{xy}^n \dots \quad (11.42)$$

В дальнейшем для сокращения будут записываться соотношения для ϵ_x и γ_{xy} , все остальные соотношения имеют аналогичный вид. Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука, т. е.

$$\epsilon_x^y = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z) \dots, \gamma_{xy}^y = \frac{\tau_{xy}}{G} \dots, \quad (11.43)$$

где E, μ, G — упругие постоянные — модуль упругости, коэффициент Пуассона и модуль сдвига.

Для того чтобы связать пластические деформации с напряжениями, воспользуемся проведенным выше анализом закона Гука. Равенство (11.33), в частности, устанавливает пропорциональность девиаторов напряжений и деформаций, причем для линейно-упругого тела коэффициент пропорциональности является постоянным и равным $2G$. Обобщая этот результат, примем, что девиатор пластических деформаций пропорционален девиатору напряжений, причем коэффициент пропорциональности уже не является постоянным, а зависит от уровня напряженного состояния, т. е.

$$D_\epsilon^n = \lambda D_\sigma, \quad (11.44)$$

где λ — функция пластичности. С учетом выражений для девиаторов (11.16) и (11.23) равенство (11.44) можно записать в развернутом виде

$$\epsilon_x^n - \epsilon_0^n = \lambda (\sigma_x - \sigma_0) \dots, \gamma_{xy}^n/2 = \lambda \tau_{xy} \dots \quad (11.45)$$

Объемную деформацию можно считать упругой, т. е. предположить, что для пластических деформаций $\epsilon_0^n = 0$. Кроме того, со-

гласно (11.14) $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$. Тогда из равенств (11.42), (11.43), (11.45) получим

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) + \frac{2\lambda}{3}\left(\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y - \frac{1}{2}\sigma_z\right) \dots, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} + 2\lambda\tau_{xy} \dots\end{aligned}\quad (11.46)$$

Для завершения вывода необходимо определить функцию пластичности λ . Введем основную гипотезу, называемую постулатом единой кривой. Из формул (11.34), (11.35), полученных в результате анализа закона Гука, следует, что для линейно-упругого тела существует линейная зависимость между интенсивностью напряжений и деформаций σ_i и ϵ_i , единая для всех видов напряженно-деформированного состояния. Обобщая этот результат на случай упругопластического деформирования предположим, что независимо от вида напряженного состояния существует единая для данного материала (и, очевидно, в общем случае нелинейная) зависимость между σ_i и ϵ_i , т. е. единая кривая деформирования σ_i (ϵ_i) или ϵ_i (σ_i), которая может быть отождествлена с диаграммой деформирования при одноосном растяжении σ (ϵ) или ϵ (σ). Последняя часть этой гипотезы нуждается в дополнительных комментариях. Как следует из проведенного выше анализа, для одноосного растяжения $\sigma_i = \sigma$, а $\epsilon_i = 2(1 + \mu_n)\epsilon/3$, т. е. $\epsilon_i = \epsilon$ при $\mu_n = 0,5$ и единая кривая σ_i (ϵ_i) совпадает с диаграммой σ (ϵ) только при $\mu_n = 0,5$. Однако, учитывая, что коэффициент Пуассона для металлов изменяется в процессе деформирования от 0,3 до 0,5, на практике единую кривую σ_i (ϵ_i), как правило, отождествляют с диаграммой σ (ϵ). При этом следует иметь в виду, что сама гипотеза о существовании единой кривой является приближенной, поэтому ее точное построение лишь усложняет рассматриваемую теорию, не внося существенного уточнения по существу.

Определим теперь функцию пластичности λ . Из первого равенства (11.46) для одноосного растяжения ($\epsilon_x = \epsilon$, $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$) получим

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{2\lambda}{3}\sigma.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{3}{2}\left(\frac{\epsilon}{\sigma} - \frac{1}{E}\right) = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{E_c(\sigma)} - \frac{1}{E}\right], \quad (11.47)$$

где $E_c(\sigma)$ — секущий модуль диаграммы σ (ϵ). Согласно постулату единой кривой для произвольного напряженного состояния λ определяется формулой (11.47), в которой σ следует заменить на σ_i , т. е.

$$\lambda = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{E_c(\sigma_i)} - \frac{1}{E}\right]. \quad (11.48)$$

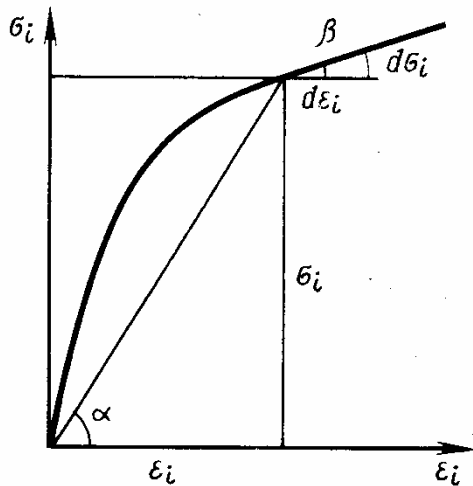


Рис. 11.5. Единая кривая деформирования упругопластического материала

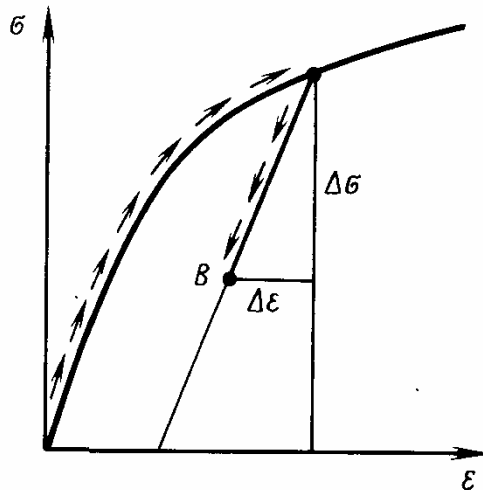


Рис. 11.6. Активное нагружение и разгрузка упругопластического материала

Здесь $E_c(\sigma_i) = \sigma_i/\epsilon_i$ — секущий модуль единой кривой деформирования материала (рис. 11.5).

Окончательно соотношения (11.46) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) + \omega\left(\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y - \frac{1}{2}\sigma_z\right), \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z) + \omega\left(\sigma_y - \frac{1}{2}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_z\right), \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y) + \omega\left(\sigma_z - \frac{1}{2}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y\right), \end{aligned} \quad (11.49)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \left(\frac{1}{G} + 3\omega\right)\tau_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \left(\frac{1}{G} + 3\omega\right)\tau_{xz}, \\ \gamma_{yz} &= \left(\frac{1}{G} + 3\omega\right)\tau_{yz}, \end{aligned} \quad (11.50)$$

где

$$\omega = \frac{1}{E_c(\sigma_i)} - \frac{1}{E}. \quad (11.51)$$

Равенства (11.49)—(11.51) определяют физические соотношения так называемой деформационной теории пластичности. Основная особенность этой теории заключается в том, что деформации связаны с напряжениями алгебраическими соотношениями, т. е. деформации, соответствующие заданной внешней нагрузке, однозначно определяются величиной напряжений при этой нагрузке. Если предположить, что соотношения (11.49), (11.50) справедливы как при активном нагружении, так и при разгрузке, они будут соответствовать нелинейно-упругому материалу. Упругопластический материал отличается от нелинейно-упругого тем, что кривые нагружения и разгрузки не совпадают — участок разгрузки DF (см. рис. 11.1) параллелен начальному упругому участку диаграммы $\sigma(\epsilon)$ OA . Если предположить, что при раз-

грузке до точки B (рис. 11.6) напряжение уменьшилось на $\Delta\sigma$, а деформация — на $\Delta\epsilon$, то связь между ними будет, очевидно, аналогичной закону Гука. В общем случае получим

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon_x &= \frac{1}{E} (\Delta\sigma_x - \mu \Delta\sigma_y - \mu \Delta\sigma_z), \quad \Delta\gamma_{xy} = \frac{\Delta\tau_{xy}}{G}, \\ \Delta\epsilon_y &= \frac{1}{E} (\Delta\sigma_y - \mu \Delta\sigma_x - \mu \Delta\sigma_z), \quad \Delta\gamma_{xz} = \frac{\Delta\tau_{xz}}{G}, \\ \Delta\epsilon_z &= \frac{1}{E} (\Delta\sigma_z - \mu \Delta\sigma_x - \mu \Delta\sigma_y), \quad \Delta\gamma_{yz} = \frac{\Delta\tau_{yz}}{G}.\end{aligned}\quad (11.52)$$

Остается установить характеристику, по изменению которой можно делать вывод о том, что имеет место в данной точке деформируемого тела — нагружение или разгрузка. В качестве такой характеристики можно принять интенсивность напряжений σ_i , т. е. считать, что при возрастании σ_i при изменении внешних нагрузок ($d\sigma_i > 0$) имеет место активное нагружение, а при уменьшении ($d\sigma_i < 0$) — разгрузка.

Таким образом, физические соотношения деформационной теории пластичности при $d\sigma_i > 0$ имеют вид (11.49)—(11.51), а при $d\sigma_i < 0$ определяются равенствами (11.52).

Сделаем одно замечание. Деформации, соответствующие рассматриваемому варианту теории пластичности, определяются напряжениями по заданному уровню нагрузки и не зависят от предшествующих изменений нагрузки, т. е. от предшествующего нагружения тела. Другими словами, в пространстве напряжений (например, нормальных — рис. 11.7) существенной является только конечная точка A , от траектории нагружения деформации не зависят. Однако имеющиеся экспериментальные результаты свидетельствуют о том, что это не всегда справедливо, т. е. деформационная теория пластичности не всегда согласуется с экспериментом. Ниже будет изложен более сложный вариант теории пластичности, свободный от этого недостатка, а пока заметим следующее. Среди траекторий нагружения, выходящих из начала координат и заканчивающихся в данной точке (например, в точке A , показанной на рис. 11.7), всегда имеется такая, которая полностью определяется своей конечной точкой. Этой траекторией является прямая OA , вдоль которой напряжения изменяются пропорционально одному параметру. Такой режим нагружения называется простым. Естественно предположить (и это предположение полностью подтверждается экспериментальными результатами), что для простого нагружения деформационная теория предсказывает процесс развития пласт-

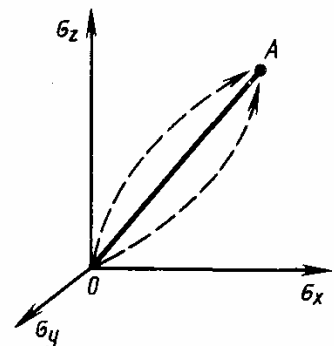


Рис. 11.7. Траектории нагружения в пространстве нормальных напряжений

тических деформаций с удовлетворительной точностью. Достаточные условия существования простого режима нагружения устанавливаются теоремой А. А. Ильюшина о простом нагружении. Согласно этой теореме нагружение будет простым если: 1) внешние силы возрастают пропорционально одному параметру; 2) материал несжимаемый; 3) единая кривая может быть аппроксимирована степенной зависимостью вида $\epsilon_i = A\sigma_i^n$. На практике все условия теоремы выполняются сравнительно редко, однако они не являются необходимыми. Опыт практической реализации деформационной теории пластичности показал, что она приводит к удовлетворительным результатам, если выполняется только первое условие теоремы, т. е. внешние силы возрастают пропорционально одному параметру. При этом, как правило, реализуется нагружение, близкое к простому. Таким образом, можно утверждать, что деформационная теория обладает удовлетворительной точностью при простом и близких к простому режимах нагружения.

11.1.7. Физические соотношения теории течения

Рассмотрим более общий вариант прикладной теории пластичности — теорию течения, учитывающую в отличие от деформационной теории историю нагружения. Для того чтобы деформации в некотором конечном состоянии, например, в точке А (см. рис. 11.7), зависели от вида траектории нагружения в пространстве напряжений, физические соотношения должны иметь дифференциальный характер и интегрироваться вдоль заданной траектории нагружения.

Теория течения строится на основе гипотез, аналогичных гипотезам деформационной теории пластичности, однако в отличие от последней предполагается, что напряжения определяют при заданном уровне внешних нагрузок не величину пластических деформаций, а интенсивность их изменения. Представим приращение деформаций как сумму приращений упругих и пластических составляющих, т. е.

$$d\epsilon_x = d\epsilon_x^y + d\epsilon_x^n \dots, d\gamma_{xy} = d\gamma_{xy}^y + d\gamma_{xy}^n. \quad (11.53)$$

Приращения упругих деформаций связаны с приращениями напряжений законом Гука, т. е.

$$d\epsilon_x^y = \frac{1}{E} (d\sigma_x - \mu d\sigma_y - \mu d\sigma_z) \dots, d\gamma_{xy}^y = \frac{d\tau_{xy}}{G}. \quad (11.54)$$

Аналогично (11.44), (11.45) предполагается, что компоненты девиатора приращений пластических деформаций пропорциональны соответствующим компонентам девиатора напряжений, т. е.

$$d\epsilon_x^n - d\epsilon_0^n = d\lambda (\sigma_x - \sigma_0) \dots, d\gamma_{xy}^n/2 = d\lambda \tau_{xy}, \quad (11.55)$$

где λ — функция пластичности, зависящая от уровня напряжений. Принимая в (11.55) $d\epsilon_0^n = 0$, $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ и учитывая (11.53) и (11.54), получим

$$d\epsilon_x = \frac{1}{E} (d\sigma_x - \mu d\sigma_y - \mu d\sigma_z) + \frac{2d\lambda}{3} \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z \right) \dots, \quad (11.56)$$

$$d\gamma_{xy} = \frac{d\tau_{xy}}{G} + 2d\lambda\tau_{xy} \dots$$

Так же, как и ранее, будем считать, что независимо от вида напряженного состояния существует единая для данного материала кривая деформирования $\sigma_i(\epsilon_i)$, которая приближенно совпадает с диаграммой деформирования при одноосном растяжении. Тогда, воспроизводя вывод формул (11.48), получим

$$d\lambda = \frac{3d\sigma_i}{2\sigma_i} \left[\frac{1}{E_n(\sigma_i)} - \frac{1}{E} \right]. \quad (11.57)$$

Здесь $E_n(\sigma_i) = d\sigma_i/d\epsilon_i$ — касательный модуль единой кривой деформирования материала (см. рис. 11.5). Окончательно из равенств (11.56), (11.57) получим

$$d\epsilon_x = \frac{1}{E} (d\sigma_x - \mu d\sigma_y - \mu d\sigma_z) + d\omega \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z \right),$$

$$d\epsilon_y = \frac{1}{E} (d\sigma_y - \mu d\sigma_x - \mu d\sigma_z) + d\omega \left(\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_z \right), \quad (11.58)$$

$$d\epsilon_z = \frac{1}{E} (d\sigma_z - \mu d\sigma_x - \mu d\sigma_y) + d\omega \left(\sigma_z - \frac{1}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y \right),$$

$$d\gamma_{xy} = \frac{d\tau_{xy}}{G} + 3d\omega\tau_{xy}, \quad d\gamma_{xz} = \frac{d\tau_{xz}}{G} + 3d\omega\tau_{xz},$$

$$d\gamma_{yz} = \frac{d\tau_{yz}}{G} + 3d\omega\tau_{yz},$$

где

$$d\omega = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i} \left[\frac{1}{E_n(\sigma_i)} - \frac{1}{E} \right]. \quad (11.59)$$

Равенства (11.58), (11.59) определяют физические соотношения теории течения при активном нагружении ($d\sigma_i > 0$). При разгрузке ($d\sigma_i < 0$) имеют место соотношения, аналогичные (11.52), т. е.

$$d\epsilon_x = \frac{1}{E} (d\sigma_x - \mu d\sigma_y - \mu d\sigma_z), \quad d\gamma_{xy} = \frac{d\tau_{xy}}{G},$$

$$d\epsilon_y = \frac{1}{E} (d\sigma_y - \mu d\sigma_x - \mu d\sigma_z), \quad d\gamma_{xz} = \frac{d\tau_{xz}}{G}, \quad (11.60)$$

$$d\epsilon_z = \frac{1}{E} (d\sigma_z - \mu d\sigma_x - \mu d\sigma_y), \quad d\gamma_{yz} = \frac{d\tau_{yz}}{G}.$$

В случае так называемого нейтрального нагружения, т. е. при $d\sigma_i = 0$ законы деформирования (11.58) и (11.60) совпадают.

В случае простого нагружения, т. е. когда все напряжения возрастают пропорционально одному параметру, интегрирование соотношений (11.58) приводит к равенствам (11.49), т. е. при простом нагружении теория течения вырождается в деформационную теорию пластичности.

На практике для анализа упругопластического деформирования конструкций наиболее часто используется более простая деформационная теория. Она приводит к удовлетворительным результатам, если внешние нагрузки возрастают пропорционально одному параметру, что, как правило, имеет место в реальных условиях.

11.1.8. Определение остаточных напряжений и деформаций

В заключение рассмотрим вопрос об определении остаточных напряжений и деформаций, сохраняющихся после разгрузки конструкции в силу необратимости пластических деформаций. Предположим, что при некотором значении параметра нагрузки p в теле имеют место напряжения $\sigma_x, \dots, \tau_{xy} \dots$ и деформации $\epsilon_x \dots, \gamma_{xy} \dots$

Представим разгрузку как приложение сил, обратных действующим, т. е. соответствующих параметру нагрузки — p . Учитывая, что разгрузка осуществляется по закону линейной зависимости, найдем формально напряжения и деформации, возникающие в упругом теле при таком нагружении, т. е. $\sigma_x^y(-p)$, $\tau_{xy}^y(-p) \dots, \epsilon_x^y(-p) \dots, \gamma_{xy}^y(-p) \dots$. В силу линейности закона разгрузки можно использовать принцип суперпозиции, т. е. получить остаточные напряжения и деформации, сложив исходные величины с образующимися в процессе разгрузки (предполагается, что вторичных пластических деформаций в результате разгрузки не образуется):

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= \sigma_x(p) + \sigma_x^y(-p) \dots, \tau_{xy}^0 = \tau_{xy}(p) + \tau_{xy}^y(-p) \dots, \\ \epsilon_x^0 &= \epsilon_x(p) + \epsilon_x^y(-p) \dots, \gamma_{xy}^0 = \gamma_{xy}(p) + \gamma_{xy}^y(-p). \end{aligned} \quad (11.61)$$

11.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК

При расчете конструкций, работающих за пределом упругости, единая кривая деформирования $\sigma_i(\epsilon_i)$, определяющая свойства материала, обычно аппроксимируется аналитическим выражением. Наиболее простая аппроксимация соответствует схеме идеально пластического тела, согласно которой после достижения предела текучести материал деформируется без упрочнения (рис. 11.8). Для материалов, обладающих малым упрочнением или развитой площадкой текучести, такая аппроксимация является вполне естественной, однако она часто используется

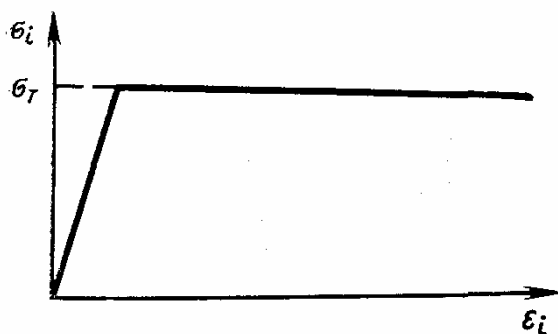


Рис. 11.8. Диаграмма деформирования идеально пластического материала

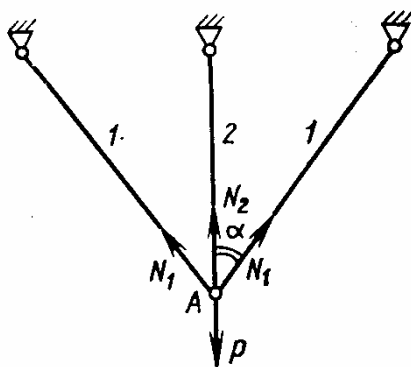


Рис. 11.9. Трехстержневая система из идеально пластического материала

и для материалов, обладающих ярко выраженным участком упрочнения. Причина широкого распространения такой аппроксимации связана с принципиальным упрощением, которое она вносит в решения задач теории пластичности — при достижении пластического состояния физические соотношения вырождаются в условие пластичности $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$ или $\sigma_i = \sigma_T$. Теория идеально пластического тела является в настоящее время одним из наиболее полно разработанных разделов теории пластичности. Не останавливаясь на изложении этой теории, рассмотрим ее приложение к определению предельных нагрузок.

Предварительно приведем два простых примера. В качестве первого примера рассмотрим стержневую систему, показанную на рис. 11.9. Предположим, что площадь поперечного сечения всех стержней одинакова и равна F и они изготовлены из одного материала, диаграмма деформирования которого показана на рис. 11.8. Согласно результатам, полученным в гл. 2, рассматриваемая система является один раз статически неопределимой и в пределах упругости материала усилия в стержнях определяются равенствами (1.61), т. е.

$$N_1 = \frac{P \cos^2 \alpha}{2 \cos^3 \alpha + 1}, \quad N_2 = \frac{P}{2 \cos^3 \alpha + 1}. \quad (11.62)$$

Поскольку $N_2 > N_1$, напряжение в стержне 2 раньше достигнет предела текучести. При этом $N_2 = \sigma_T F$, а соответствующая нагрузка определяется из второй формулы (11.62) $P_T = \sigma_T F (2 \cos^3 \alpha + 1)$. Согласно рис. 11.8 при $P > P_T$ усилие в стержне 2 сохраняется постоянным, а усилие в стержнях 1 может быть найдено из условия равновесия узла A (см. рис. 11.9), т. е.

$$N_1 = \frac{1}{2 \cos \alpha} (P - \sigma_T F). \quad (11.63)$$

Предельная нагрузка, которую воспринимает рассматриваемая стержневая система, реализуется, когда усилие N_1 достигает величины $\sigma_T F$, т. е.

$$P_{\max} = \sigma_T F (2 \cos \alpha + 1). \quad (11.64)$$

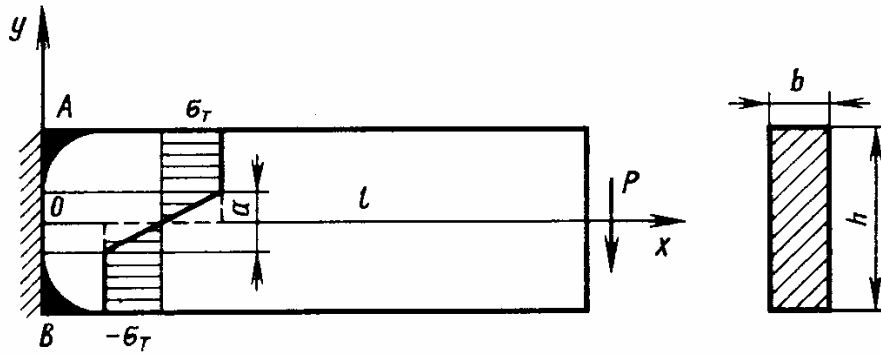


Рис. 11.10. Консольная балка из идеально пластического материала

Можно заметить, что для получения $P_{\max}$ не было необходимости рассматривать состояния системы, определяемые равенствами (11.62) и (11.63). Если задать предельное состояние, приняв $N_1 = N_2 = \sigma_T F$, то равенство (11.64) можно сразу получить из условия равновесия узла A (см. рис. 11.9).

В качестве второго примера рассмотрим задачу об изгибе консольной балки (рис. 11.10). Согласно гипотезе плоских сечений деформация ϵ_x связана с кривизной $v''(x)$ следующим образом $\epsilon_x = yv''$. Пока напряжения не превосходят предела текучести σ_T , они распределяются линейно по высоте балки, т. е.

$$\sigma_x = Eyv''. \quad (11.65)$$

Предел текучести впервые достигается в точках A и B, где действуют максимальные напряжения. При дальнейшем возрастании силы P в окрестности точек A и B развиваются пластические зоны, а в средней части балки сохраняется упругое ядро a . Распределение напряжений в сечении AB показано на рис. 11.10. Найдем изгибающий момент

$$M = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dy = \frac{\sigma_T b h^2}{4} \left(1 - \frac{a^2}{3h^2} \right). \quad (11.66)$$

Максимальный момент, который может быть реализован в сечении, определяется формулой (11.66) при $a = 0$, т. е. $M_{\text{пл}} = \sigma_T b h^2 / 4$. Соответствующее распределение напряжений показано на рис. 11.10 пунктиром — при этом пластические зоны соединяются в точке O. Таким образом

$$M = M_{\text{пл}} \left(1 - \frac{a^2}{3h^2} \right). \quad (11.67)$$

В пределах упругого ядра (т. е. при $|y| \leq a/2$) остается справедливой формула (11.65), причем при $y = a/2$ $\sigma_x = \sigma_T$, т. е. $\sigma_T = Ev''a/2$. Подставляя величину a из равенства (11.67), найдем кривизну балки

$$v'' = \frac{2\sigma_T}{Eh \sqrt{3 \left[1 - \frac{M(x)}{M_{\text{пл}}} \right]}}. \quad (11.68)$$

Здесь $M_x = P(l - x)$ — действующий момент. Из равенства (11.68) следует, что при $M(x) = M_{пл}$ кривизна обращается в бесконечность и в сечении образуется так называемый пластический шарнир. Для рассматриваемой балки такой шарнир образуется, очевидно, при $x = 0$ и $P = P_{\max} = M_{пл}/l$. Так же, как и в первом примере, для получения этого результата можно было сразу рассмотреть предельное состояние балки, поместив в сечение $x = 0$ пластический шарнир и приложив момент $M_{пл}$, препятствующий повороту балки (рис. 11.11). Из условия равновесия при этом сразу получим $P_{\max}l = M_{пл}$.

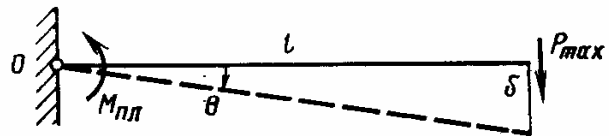


Рис. 11.11. Предельное состояние консольной балки

Обобщая полученные в рассмотренных примерах результаты, можно сформулировать следующий метод определения предельных нагрузок. Отвлекаясь от анализа развития упругопластических деформаций и пренебрегая малыми начальными упругими деформациями, будем считать, что до перехода в предельное состояние система является абсолютно жесткой. Соответствующая модель материала называется жесткопластической, единая кривая деформирования для нее показана на рис. 11.12. Представим далее разрушение системы как процесс неограниченного течения в отдельных связях и построим кинематическую модель предельного состояния, введя соответствующее число идеально пластических связей. Предельное состояние характеризуется тем, что при дальнейшем увеличении нагрузки система оказывается геометрически изменяемой и переходит в движение. Реакции в пластических связях, не зависящие от деформаций, направляются так, чтобы они препятствовали этому движению. Рассматривая равновесие системы в предельном состоянии, получаем предельную нагрузку.

В качестве иллюстрации рассмотрим еще раз консольную балку, показанную на рис. 11.11. Пунктиром показана схема разрушения — поворот жесткой консоли вокруг точки O , где действует пластический момент. Из уравнения моментов относительно точки O получаем $P_{\max} = M_{пл}/l$. Для балки прямоугольного сечения $M_{пл} = \sigma_T bh^2/4$ и $P_{\max} = \sigma_T bh^2/4l$, т. е. $P_{\max} = 1,5P_T$, где $P_T = \sigma_T bh^2/6l$ — сила, при которой наибольшие по абсолютной величине максимальные напряжения, действующие в точках A и B (см. рис. 11.10), достигают предела текучести.

Часто оказывается более удобным определять предельную нагрузку с помощью принципа возможных перемещений,

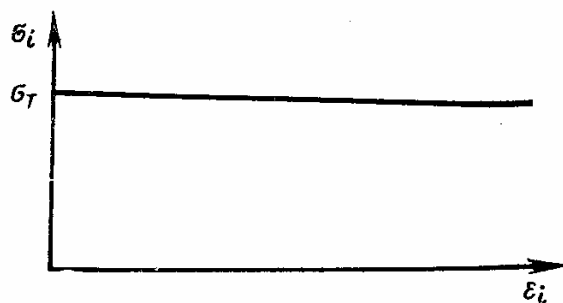


Рис. 11.12. Диаграмма деформирования жесткопластического тела

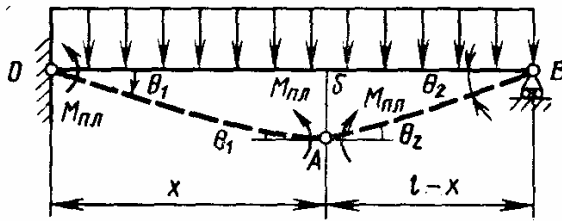


Рис. 11.13. Предельное состояние однопролетной балки

согласно которому сумма работ всех внешних и внутренних сил на малых возможных перемещениях в состоянии равновесия системы равна нулю. Для балки, показанной на рис. 11.11, имеем $P_{\max} \delta - M_{\text{пл}} \theta = 0$ (напомним, что $M_{\text{пл}}$ препятствует увеличению угла θ), от-

сюда с учетом того, что для малых перемещений $\delta = \theta l$, получим прежний результат $P_{\max} = M_{\text{пл}}/l$.

Однозначно определить предельное состояние системы далеко не всегда представляется возможным, однако, как правило, всегда удастся выделить несколько возможных форм и для каждой найти предельную нагрузку. Установить значение нагрузки, наиболее близкое к истинному (в классе сравниваемых состояний), позволяет следующая интуитивно очевидная (и вполне строго доказываемая) теорема: предельная нагрузка, соответствующая данной кинематически возможной (т. е. согласующейся с условиями закрепления) форме разрушения, больше или равна истинной предельной нагрузке. Таким образом, из найденного ряда предельных нагрузок следует выбрать наименьшую, она будет равна истинной, если среди сравниваемых предельных состояний имеется истинная форма разрушения системы.

Проиллюстрируем применение рассматриваемого метода, который называется кинематическим методом определения предельной нагрузки, на примере балки, показанной на рис. 11.13. В предельном состоянии балка содержит два пластических шарнира в точках O и A, причем координата последнего x заранее не известна. Применяя принцип возможных перемещений

$$q_{\max} \Delta - M_{\text{пл}} \theta_1 - M_{\text{пл}} (\theta_1 + \theta_2) = 0,$$

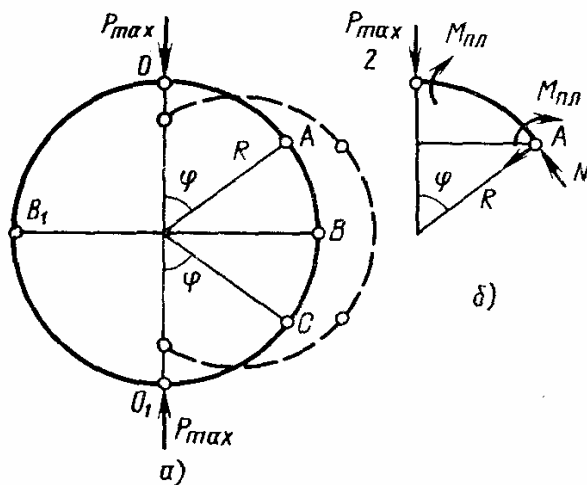


Рис. 11.14. Предельное состояние кругового шпангоута

где $\Delta = \delta l/2$ — площадь треугольника OAB, $\theta_1 = \delta/x$, $\theta_2 = \delta/(l-x)$, получим

$$q_{\max} = M_{\text{пл}} \frac{2(2l-x)}{lx(l-x)}. \quad (11.69)$$

Координату x найдем из условия минимума $q_{\max}$, т. е. $dq_{\max}/dx = 0$. В результате получим квадратное уравнение $x^2 - 4lx + 2l^2 = 0$, корни которого $x_1 = 0,59l$, $x_2 = 3,41l$. Очевидно, $x = x_1$ и согласно (11.69) $q_{\max} = 11,7 M_{\text{пл}}/l^2$.

Аналогичным образом кинематический метод может быть применен для определения предельных нагрузок рам и шпангоутов. Рассмотрим круговой шпангоут, показанный на рис. 11.14, а. Положение двух пластических шарниров в точках O и O_1 очевидно, положение двух других симметричных шарниров A и C найдем из условия минимума $P_{\max}$. Записывая сумму моментов относительно точки A (см. рис. 11.14, б), получим

$$\frac{P_{\max}}{2} R \sin \varphi - 2M_{\text{пл}} = 0.$$

Отсюда $P_{\max} = 4M_{\text{пл}}/R \sin \varphi$, т. е. $\varphi = \pi/2$ и $P_{\max} = 4M_{\text{пл}}/R$. Таким образом, в предельном состоянии шпангоут имеет четыре пластических шарнира — в точках O , O_1 и B , B_1 . Отметим, что полученный результат является не вполне точным, так как в сечениях B и B_1 , кроме момента, действует осевая сила $N = P_{\max}$. Соответствующее распределение напряжений показано на рис. 11.15. Приводя напряжения к силе и моменту относительно точки O , получим

$$N = \sigma_{\tau} b \left[\left(\frac{h}{2} + a \right) - \left(\frac{h}{2} - a \right) \right] = 2\sigma_{\tau} b a,$$

$$M = \sigma_{\tau} b \left[2 \left(\frac{h}{2} - a \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + a \right) \right] = \sigma_{\tau} b \left(\frac{h^2}{4} - a^2 \right).$$

Исключая из второго равенства величину a , будем иметь

$$M = \sigma_{\tau} b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{N^2}{4\sigma_{\tau}^2 b^2} \right) = M_{\text{пл}} \left(1 - \frac{N^2}{\sigma_{\tau}^2 h^2 b^2} \right). \quad (11.70)$$

Таким образом, в сечениях B и B_1 (см. рис. 11.14) действует момент, меньший, чем $M_{\text{пл}}$. Оценим точность полученного выше приближенного результата. Подставляя в равенство (11.70) $N = 0,5P_{\max} \simeq 2M_{\text{пл}}/R = \sigma_{\tau} b h^2/2R$, получим

$$M \simeq M_{\text{пл}} \left(1 - \frac{h^2}{4R^2} \right),$$

т. е. для достаточно тонкого кольца ($h/R \ll 1$) учет осевой силы незначительно уточняет результат.

Вводя пластическую осевую силу $N_{\text{пл}} = \sigma_{\tau} b h$ в равенство (11.70), можно записать условие предельного состояния для прямоугольного сечения, в котором действует момент M и сила N

$$\frac{M}{M_{\text{пл}}} + \left(\frac{N}{N_{\text{пл}}} \right)^2 = 1. \quad (11.71)$$

Рассмотрим применение кинематического метода к определению предельной нагрузки тонких пластин. Пусть пластина, показанная на рис. 11.16, нагружена сосредоточенной силой P и шарнирно оперта по контуру. Предположим, что в предельном состоянии срединная плоскость пластины переходит в поверхность пирамиды с вершиной в точке O и высотой δ , причем вдоль образующихся при этом ребер OA_i действует постоянный распре-

деленный пластический момент $m_{пл} = \sigma_T h^2/4$, где h — толщина пластины. Тогда согласно принципу возможных перемещений и рис. 11.16 получим

$$P_{\max}^0 \delta = \sum_i m_{пл} l_i \omega_i. \quad (11.72)$$

Из треугольника BCD имеем $\omega_i = \alpha_i + \beta_i$, $\alpha_i = \delta/(l_i \operatorname{tg} \varphi_i)$, $\beta_i = \delta/(l_i \operatorname{tg} \psi_i)$, т. е. окончательно для шарнирно опертой пластины

$$P_{\max}^0 = m_{пл} \sum_i (\operatorname{ctg} \varphi_i + \operatorname{ctg} \psi_i). \quad (11.73)$$

Если пластина защемлена по контуру, по сторонам a_k также действует момент $m_{пл}$, который совершает работу на угле поворота высоты b_k — $\gamma_k = \delta/b_k$. Добавляя соответствующее значение работы в равенство (11.72), получим

$$P_{\max}^3 = m_{пл} \left[\sum_i (\operatorname{ctg} \varphi_i + \operatorname{ctg} \psi_i) + \sum_k \frac{a_k}{b_k} \right]. \quad (11.74)$$

Здесь i — число ребер образующей пирамиды; k — число сторон ее основания.

Для пластины в форме правильного многоугольника с числом сторон, равным k (рис. 11.17), $\varphi_i = \psi_i = (\pi/2) - (\pi/k)$, $\operatorname{ctg} \varphi_i = \operatorname{tg} (\pi/k)$, $b_k = a_k \operatorname{tg} \varphi_i/2$ и равенства (11.73), (11.74) принимают вид

$$P_{\max}^0 = 2m_{пл} k \operatorname{tg} \frac{\pi}{k}, \quad P_{\max}^3 = 4m_{пл} k \operatorname{tg} \frac{\pi}{k}. \quad (11.75)$$

Из формул (11.75) в результате предельного перехода при $k \rightarrow \infty$ можно получить предельные нагрузки для шарнирно опертых и защемленных по контуру круглых пластин, нагруженных в центре сосредоточенной силой. Учитывая, что при $k \rightarrow \infty$ $\sin (\pi/k)/(\pi/k) \rightarrow 1$ и $\cos (\pi/k) \rightarrow 1$, из равенств (11.75) получим

$$P_{\max}^0 = 2\pi m_{пл}, \quad P_{\max}^3 = 4\pi m_{пл}, \quad (11.76)$$

где $m_{пл} = \sigma_T h^2/4$. Если круглая пластина нагружена равномерным давлением $p_{\max}$, для определения работы

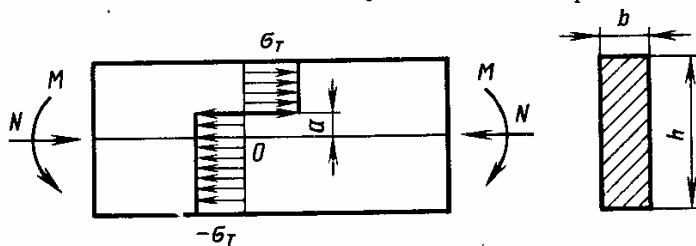


Рис. 11.15. Распределение напряжений при совместном действии осевой силы и изгибающего момента

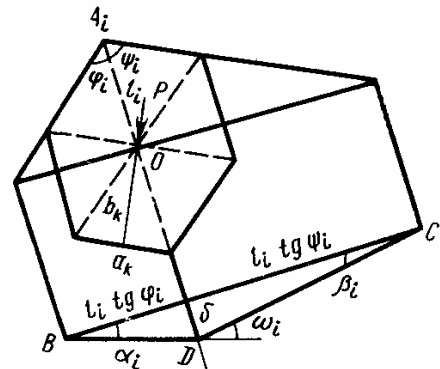


Рис. 11.16. Предельное состояние пластины

внешней нагрузки необходимо умножить $p_{\max}$ на объем конуса, образуемого пластиной в предельном состоянии. При этом в левых частях равенств (11.76) $p_{\max}$ необходимо заменить на $p_{\max} \pi R^2/3$ (R — радиус пластины). В результате для шарнирно опертой и защемленной пластин найдем

$$p_{\max}^0 = \frac{6m_{\text{пл}}}{R^2}, \quad p_{\max}^s = \frac{12m_{\text{пл}}}{R^2}. \quad (11.77)$$

Отметим, что изложенный выше кинематический метод определения предельных нагрузок пластин является приближенным. Точное решение задачи о несущей способности круглой пластины, основанное на условии пластичности Треска, оказывается существенно более сложным и приводит к следующим результатам: $p_{\max}^0 = 6m_{\text{пл}}/R^2$, $p_{\max}^s = 11,3 m_{\text{пл}}/R^2$, т. е. для шарнирно опертой пластины решение, полученное кинематическим методом, совпадает с точным, а для защемленной пластины найденная этим методом предельная нагрузка превышает точное значение на 6,2 %.

Для иллюстрации точного решения задач предельного равновесия идеально пластических систем рассмотрим определение предельного давления для толстостенной трубы и предельного числа оборотов вращающегося диска.

В бесконечно длинной трубе, нагруженной внутренним давлением (рис. 11.18), радиальные σ_r , кольцевые σ_θ и осевые σ_z напряжения являются главными, причем $\sigma_r \leq 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z = 0$, т. е. $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_2 = \sigma_z$, $\sigma_3 = \sigma_r$. Следовательно, условие пластичности Треска (11.38) можно записать в виде

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_T. \quad (11.78)$$

Предположим, что при $p = p_{\max}$ это условие выполняется во всех точках трубы. Запишем уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (11.79)$$

и граничные условия

$$\sigma_r(r=a) = -p_{\max}, \quad \sigma_r(r=b) = 0. \quad (11.80)$$

Подставляя условие пластичности (11.78) в уравнение равновесия (11.79), получим

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_T}{r}.$$

Отсюда $\sigma_r = \sigma_T \ln r + C$. Постоянную интегрирования найдем из первого условия (11.80), т. е. $C = -p_{\max} - \sigma_T \ln a$. Второе условие (11.80) позволяет определить предельное давление

$$p_{\max} = \sigma_T \ln \frac{b}{a}. \quad (11.81)$$

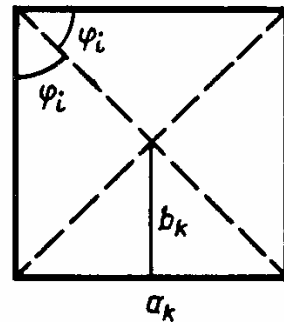


Рис. 11.17. Предельное состояние пластины в форме правильного четырехугольника.

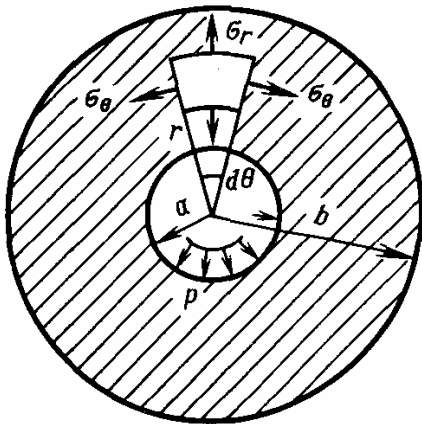


Рис. 11.18. Напряженное состояние трубы, нагруженной внутренним давлением

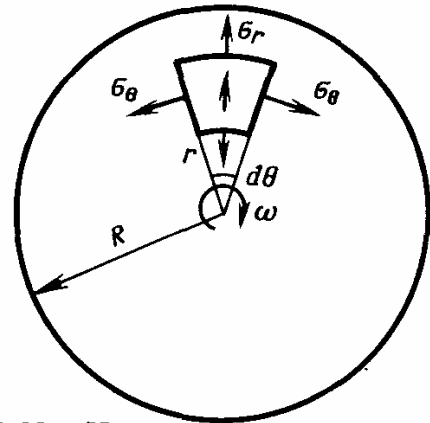


Рис. 11.19. Напряженное состояние вращающегося диска

Для тонкой трубы с радиусом $R = a$ и толщиной $h = b - a \times (h/R \ll 1)$ из (11.81) получим

$$p_{\max} = \sigma_T \ln \left(1 + \frac{h}{R} \right) \simeq \frac{\sigma_T h}{R}. \quad (11.82)$$

Для диска постоянной толщины, вращающегося с угловой скоростью ω (рис. 11.19), напряжения σ_r , σ_θ и σ_z также являются главными, причем $\sigma_z = 0$ и, как следует из решения линейной задачи, $\sigma_\theta \geq \sigma_r \geq 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_2 = \sigma_r$, $\sigma_3 = 0$ и условие пластичности Треска (11.40) имеет вид $\sigma_\theta = \sigma_T$. Обозначая плотность материала через ρ , запишем уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 r = 0.$$

Принимая, что при $\omega = \omega_{\max}$ условие пластичности $\sigma_\theta = \sigma_T$ выполняется во всех точках диска, в результате интегрирования получим

$$\sigma_r = \sigma_T - \frac{1}{3} \rho \omega_{\max}^2 r^2 + \frac{C}{r}.$$

Для сплошного диска при $r = 0$ должно выполняться условие $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_T$, т. е. $C = 0$. Используя граничное условие $\sigma_r (r = R) = 0$, найдем предельное число оборотов

$$\omega_{\max}^2 = \frac{3\sigma_T}{\rho R^2}. \quad (11.83)$$

Отметим, что простота решения рассмотренных двух задач связана с возможностью оценки соотношения между главными напряжениями и непосредственным использованием условия Треска, линейного по напряжениям. Условие пластичности Мизеса (11.39), которое не требует такой оценки, нелинейно, что существенно усложняет решение. Использование условия Мизеса для анализа

вращающегося диска приводит к следующему результату: $\omega_{\max}^2 = 2,875\sigma_T/\rho R^2$, который отличается от (11.83) на 4,2 %.

В заключение рассмотрим определение предельного давления для баллонов давления в форме тонких безмоментных оболочек вращения. Меридиональные σ_α и кольцевые σ_β напряжения определяются равенствами (4.68), т. е.

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{h} = \frac{pR_2}{2h}, \quad \sigma_\beta = \frac{N_\beta}{h} = \frac{pR_2}{2h} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right), \quad (11.84)$$

где h — толщина оболочки; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности. Для оболочек, у которых $\sigma_\alpha \geq 0$, $\sigma_\beta \geq 0$, т. е. исключается потеря устойчивости, предельное давление $p_{\max}$ может быть найдено с помощью условия пластичности Мизеса (11.41)

$$\max_{\alpha} (\sigma_\alpha^2 - \sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta^2) = \sigma_T^2.$$

В частности, для сферической оболочки при $R_1 = R_2 = R$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = pR/2h$ получим $p_{\max} = 2\sigma_T h/R$. Для цилиндрического баллона давления радиуса R $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R$, $\sigma_\alpha = pR/2h$, $\sigma_\beta = pR/h$, т. е. $p_{\max} = 1,15\sigma_T h/R$. Отметим, что полученное значение на 15 % выше предельного давления (11.82), найденного с помощью условия Треска.

11.3. ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

11.3.1. Постановка задачи и методы решения

Запишем полную систему уравнений теории пластичности. Уравнения равновесия (1.9) и геометрические соотношения (1.3) от свойств материала не зависят и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0, \end{aligned} \quad (11.85)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (11.86)$$

Наиболее распространенной в практических расчетах является деформационная теория пластичности, физические соотношения которой имеют форму (11.49), т. е.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z) + \omega \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x - \mu \sigma_z) + \omega \left(\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_z \right), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu \sigma_x - \mu \sigma_y) + \omega \left(\sigma_z - \frac{1}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y \right), \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{1}{G} + 3\omega \right) \tau_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \left(\frac{1}{G} + 3\omega \right) \tau_{xz}, \\ \gamma_{yz} &= \left(\frac{1}{G} + 3\omega \right) \tau_{yz},\end{aligned}\quad (11.87)$$

где

$$\omega = \frac{1}{E_s(\sigma_i)} - \frac{1}{E}.$$

15 уравнений (11.85)—(11.87) включают 15 неизвестных функций — 6 напряжений, 6 деформаций и 3 перемещения. Эта система, как и в случае задачи теории упругости, может быть сведена к меньшему числу уравнений согласно схеме решения задачи методом перемещений или напряжений, изложенной в разд. 1.1.4.

Существенным свойством системы уравнений теории пластичности является ее нелинейность — в физические соотношения (11.87) входит функция ω , зависящая от секущего модуля E_s , который, в свою очередь, весьма сложным образом зависит от интенсивности напряжений σ_i и согласно равенству (11.19) — от искомых напряжений. Для реализации аналитических или численных методов решения функцию $E_s(\sigma_i)$, как правило, представляют в явной форме путем аппроксимации единой кривой $\sigma_i(\varepsilon_i)$ некоторым аналитическим выражением. Распространенной

формой такой аппроксимации является степенная, при которой единая кривая описывается уравнением $\sigma_i = A \varepsilon_i^n$ (рис. 11.20, а). Здесь A и $n < 1$ — параметры, определяемые из условия наилучшего совпадения аппроксимирующей кривой с экспериментальной диаграммой деформирования материала. Преимуществом сте-

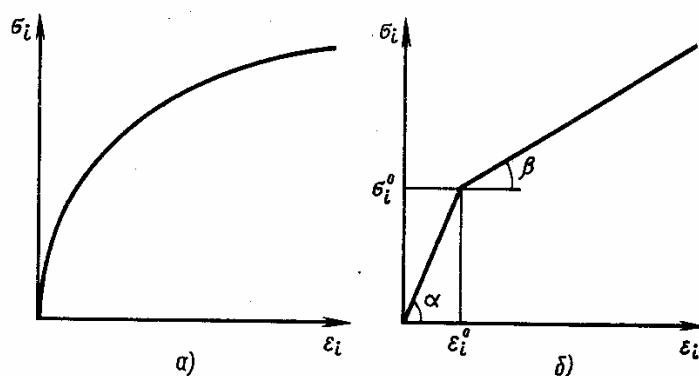


Рис. 11.20. Аппроксимация единой кривой степенным законом (а) и диаграммой с линейным упрочнением (б)

пенной аппроксимации является то, что она позволяет достаточно просто выразить ε_i через σ_i и найти секущий модуль $E_c = \sigma_i/\varepsilon_i = A\varepsilon_i^{n-1}$. Недостатком этого закона является то, что он не позволяет описать начальный участок, для которого $E_c = E$; при $n < 1$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$ $E_c \rightarrow \infty$. Как правило, степенную аппроксимацию используют для приближения участка диаграммы деформирования, в пределах которого ожидается изменение деформаций рассматриваемой конструкции. Другой часто применяемой формой аппроксимации является диаграмма с линейным упрочнением, показанная на рис. 11.20, б. При $\sigma_i < \sigma_i^0$, $\varepsilon_i < \varepsilon_i^0$ имеем $\sigma_i = E\sigma_i$, $E_c = E = \sigma_i^0/\varepsilon_i^0$, а при $\sigma_i \geq \sigma_i^0$, $\varepsilon_i \geq \varepsilon_i^0$ — $\sigma_i = \sigma_i^0 + E_1(\varepsilon_i - \varepsilon_i^0)$ и $E_c = \frac{\sigma_i^0}{\varepsilon_i} + E_1\left(1 - \frac{\varepsilon_i^0}{\varepsilon_i}\right)$. Недостатком такой аппроксимации (позволяющей обычно достаточно хорошо описать реальную диаграмму) является то, что единая кривая определяется двумя законами, причем, какой именно закон следует использовать в данной точке конструкции, заранее неизвестно. В численных расчетах часто используется еще более сложная аппроксимация в форме ломаной линии.

Как отмечалось в разд. 11.1.6, физические соотношения деформационной теории пластичности отличаются от соотношений нелинейной теории упругости только наличием особого закона разгрузки (11.52). Если рассматривается только активное нагружение (без разгрузки), то это различие исчезает, и поскольку для нелинейно-упругого тела справедлив закон сохранения механической энергии, то формально его можно считать справедливым и для рассматриваемой модели упругопластического тела. Следовательно, в деформационной теории пластичности можно использовать вариационные принципы Лагранжа и Кастильяно, изложенные в разд. 1.3, 1.4. Эти принципы формулируются соответственно в форме равенств (1.27) и (1.48), т. е. $\delta\mathcal{E} = 0$ и $\delta\bar{\mathcal{E}} = 0$. Полная энергия $\mathcal{E} = U - A$ и дополнительная полная энергия $\bar{\mathcal{E}} = \bar{U} - A$ выражаются через потенциальную и дополнительную энергию, определяемую равенствами (1.19) и (1.41), т. е.

$$U = \iiint W \, dx \, dy \, dz, \quad \bar{U} = \iiint \bar{W} \, dx \, dy \, dz$$

и работу внешних поверхностных и объемных сил, определяемую равенством (1.25), т. е.

$$A = \iint_S (X_\nu u + Y_\nu v + Z_\nu w) \, ds + \iiint (Xu + Yv + Zw) \, dx \, dy \, dz.$$

Отличие упругопластического тела от упругого проявляется в форме записи потенциалов W и $\bar{W}$, которые согласно теории упругости имели вид (1.22) и (1.43). Как уже отмечалось в разд. 11.1.4, энергия деформации может быть разделена на две составляющие — соответствующую изменению формы тела и вы-

ражающуюся через интенсивность напряжений и деформаций σ_i (11.19) и ε_i (11.26) и соответствующую изменению объема и выражающуюся через среднее напряжение σ_0 (11.14) и объемную деформацию θ (11.22). Имея в виду это обстоятельство, а также учитывая наличие единой кривой $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ или $\varepsilon_i = \varphi(\sigma_i)$ и закона объемной упругости (11.31) $\sigma_0 = K\theta$, приведем окончательный результат:

$$W = \int_0^{\varepsilon_i} f(\varepsilon_i) d\varepsilon_i + \frac{K}{2} \theta^2, \quad \bar{W} = \int_0^{\sigma_i} \varphi(\sigma_i) d\sigma_i + \frac{\sigma_0^2}{2K}.$$

Применительно к задачам теории пластичности в принципе могут быть использованы и используются почти все методы, описанные в гл. 1, т. е. методы Ритца—Тимошенко (разд. 1.6.1), Бубнова—Галеркина (разд. 1.6.2), Власова—Канторовича (разд. 1.6.3), метод конечных разностей (разд. 1.6.5), метод коллокации (разд. 1.6.9). Существенным отличием расчета упругопластических конструкций, значительно его усложняющим, является то, что алгебраические или дифференциальные разрешающие уравнения этих методов оказываются нелинейными. Поэтому в теории пластичности перечисленные методы, позволяющие упростить определение законов изменения искомых функций по координатам, обычно применяются в сочетании с рассматриваемыми ниже специальными методами, позволяющими свести решение нелинейных уравнений к последовательности решений линейных задач.

11.3.2. Метод упругих решений

Метод упругих решений [17], как следует из его названия, основан на замене задачи теории пластичности совокупностью задач теории упругости. Рассмотрим физические соотношения (11.87) и построим следующий итерационный процесс. Пусть задана совокупность внешних нагрузок и требуется определить соответствующее ей напряженно-деформированное состояние конструкции. Примем в первом приближении в равенствах (11.87) $\omega = 0$. Тогда они совпадут с законом Гука и в совокупности с уравнениями (11.85) и (11.86) позволят найти все напряжения и деформации, соответствующие методу упругих решений в первом приближении. По этим напряжениям и деформациям можно с помощью формул (11.19), (11.26) найти их интенсивность, а с помощью единой кривой $\sigma_i(\varepsilon_i)$ определить секущий модуль и функцию ω . Считая теперь, что члены, содержащие ω в равенствах (11.87), известны и определяются первым приближением, можно построить второе приближение, по нему аналогичным образом третье и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока результаты, полученные в двух смежных приближениях, не окажутся достаточно близкими. При этом известные величины, ко-

торыми соотношения (11.87) отличаются от закона Гука в разрешающих уравнениях, можно объединить с величиной внешней нагрузки. Таким образом, метод упругих решений по существу позволяет заменить расчет упругопластической системы последовательностью расчетов упругой системы, нагруженной некоторыми условными силами, определяемыми и уточняемыми в процессе расчета.

Для иллюстрации метода рассмотрим растягиваемый стержень, диаграмма деформирования которого приведена на рис. 11.21. Пусть

задано напряжение σ_0 и требуется найти соответствующую деформацию ϵ_0 . Естественно, что эта задача решается элементарно — поскольку $\sigma = E_c \epsilon$, то $\epsilon_0 = \sigma_0 / E_c^0$, где $E_c^0 = E_c(\sigma_0) = \tan \alpha$.

Для реализации метода упругих решений запишем закон деформирования $\sigma = E\epsilon - \bar{\omega}\epsilon$ в виде

$$\sigma = E\epsilon - \bar{\omega}\epsilon, \quad (11.88)$$

где $\bar{\omega} = E - E_c(\epsilon)$. Пусть $\sigma = \sigma_0$. Примем в первом приближении $\bar{\omega} = 0$, тогда $\epsilon_1 = \sigma_0 / E$, $E_{c1} = \sigma_1 / \epsilon_1$ (рис. 11.22) и $\bar{\omega}_1 = E - (\sigma_1 / \epsilon_1)$. Из (11.88) во втором приближении получим $\sigma_0 = E\epsilon_2 - \bar{\omega}_1\epsilon_1$. Отсюда с учетом записанных выше равенств

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \frac{\sigma_0}{E} + \left(E - \frac{\sigma_1}{\epsilon_1}\right) \frac{\epsilon_1}{E} = \\ &= \frac{\sigma_0}{E} + \left(\epsilon_1 - \frac{\sigma_1}{E}\right). \end{aligned}$$

Из рис. 11.22 можно заключить, что это равенство имеет следующую геометрическую интерпретацию: $0\epsilon_2 = a\epsilon_2 + + (0\epsilon_1 - a\epsilon_1)$. Получаемые в результате значения деформаций ϵ_2 , ϵ_3 и т. д. показаны на рис. 11.22.

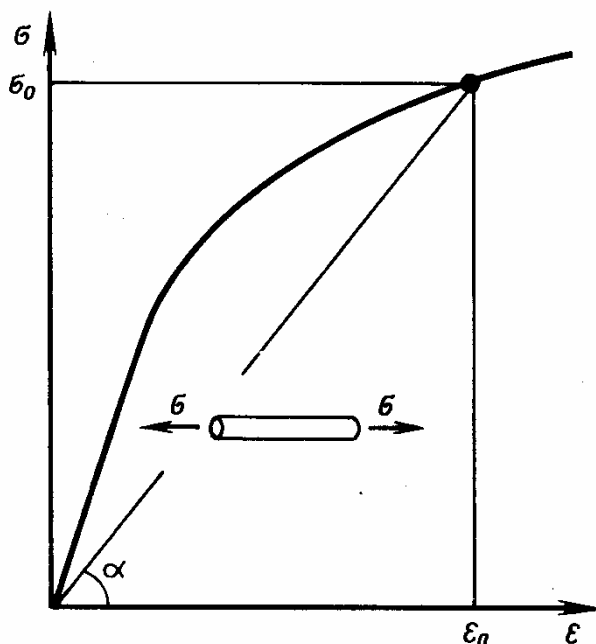


Рис. 11.21. Диаграмма деформирования растягиваемого стержня

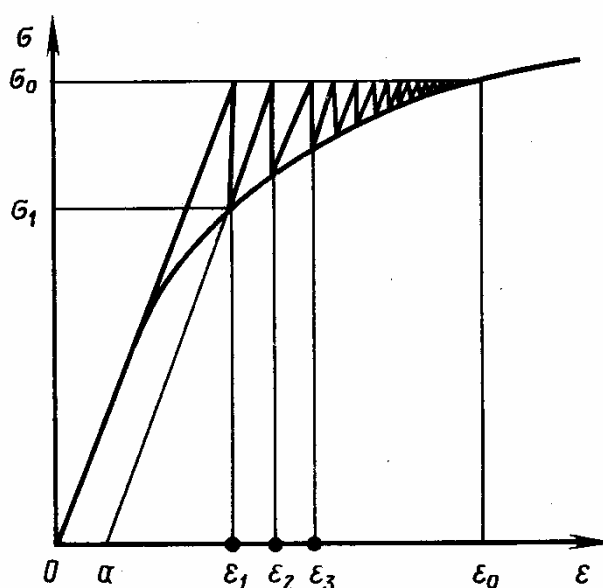


Рис. 11.22. Геометрическая интерпретация метода упругих решений

При сильно развитых пластических деформациях требуемое число приближений может быть достаточно велико. Ускорить сходимость процесса в этом случае можно, если уже в первом приближении принять, что $\bar{\omega} \neq 0$, например положить $\bar{\omega} = E/2$, а в общем случае принять $E_{c1} = E/2$.

11.3.3. Метод переменных параметров упругости

Метод переменных параметров упругости [9] предусматривает условную запись физических соотношений деформационной теории пластичности (11.87) в форме, аналогичной закону Гука

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E^*} (\sigma_x - \mu^* \sigma_y - \mu^* \sigma_z), & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G^*}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E^*} (\sigma_y - \mu^* \sigma_x - \mu^* \sigma_z), & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G^*}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E^*} (\sigma_z - \mu^* \sigma_x - \mu^* \sigma_y), & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G^*},\end{aligned}\quad (11.89)$$

и включающей некоторые приведенные модули и коэффициент Пуассона

$$E^* = E_c(\sigma_i), \quad \frac{1}{G^*} = \frac{3}{E_c} + \frac{2\mu - 1}{E}, \quad \mu^* = \frac{1}{2} + \frac{E_c}{E} \left(\mu - \frac{1}{2} \right). \quad (11.90)$$

Можно проверить, что $G^* = E^*/2 (1 + \mu^*)$, т. е. соотношения (11.89) соответствуют закону Гука для изотропного материала. Особенно простую форму параметры (11.90) принимают в случае несжимаемого материала. Принимая $\mu = 0,5$, получим $E^* = E_c$, $G^* = E_c/3$, $\mu^* = 0,5$. Добавляя к равенствам (11.89) статические и геометрические соотношения (11.85) и (11.86), получим полную систему уравнений, по виду аналогичных уравнениям теории упругости и отличающихся от них тем, что секущий модуль E_c , через который выражаются параметры (11.90), заранее неизвестен. Для его определения используется итерационный процесс, аналогичный описанному в разд. 11.3.2. В первом приближении принимается $E_c = E$ и решается задача с линейной зависимостью. По найденным значениям напряжений и деформаций определяется их интенсивность σ_i и ε_i и по единой кривой находится секущий модуль E_c , который и подставляется в равенства (11.90). Далее строится второе приближение, по его результатам определяется E_c для третьего приближения и т. д. Процесс заканчивается, когда результаты, полученные в двух смежных приближениях, оказываются достаточно близкими. Отметим, что в общем случае напряженного состояния модуль E_c на каждом этапе в различных точках конструкции будет разным, соответственно переменными

оказываются и параметры E^* , G^* , μ^* , что и определило название метода.

Проиллюстрируем метод на примере стержня, диаграмма деформирования которого показана на рис. 11.21. В соответствии с методом переменных параметров упругости запишем закон деформирования в форме, аналогичной (11.89), т. е. $\sigma = E^* \epsilon$, где $E^* = E_c(\epsilon)$. Положив $\sigma = \sigma_0$ и $E_c = E$, в первом приближении получим $\epsilon_1 = \sigma_0/E$, $E_{c1} = \sigma_1/\epsilon_1$ (рис. 11.23), во втором приближении $\epsilon_2 = \sigma_0/E_{c1}$ и т. д. Процесс приближения к искомой деформации ϵ_0 иллюстрируется на рис. 11.23.

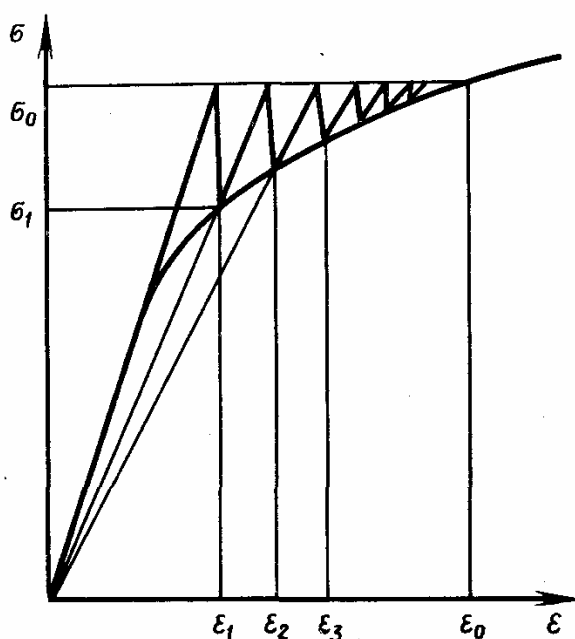


Рис. 11.23. Геометрическая интерпретация метода переменных параметров упругости

Сопоставляя рис. 11.22 и 11.23, можно заключить, что метод переменных параметров упругости сходится быстрее, чем метод упругих решений. Если рассмотреть соотношения (11.87), то в i -м приближении метода упругих решений слагаемое, включающее ω , полностью определяется по $(i - 1)$ -му приближению, а согласно методу переменных параметров упругости $(i - 1)$ -м приближением определяется по существу только ω , а напряжения соответствуют i -му приближению, что, естественно, повышает точность решения. С другой стороны, метод упругих решений, на каждом этапе которого решается задача для конструкции с постоянными параметрами упругости, реализуется проще метода, согласно которому эти параметры являются переменными, т. е. зависят от координат. Поэтому метод переменных параметров упругости оказывается особенно эффективным в сочетании с методом конечных элементов, который позволяет устранить этот недостаток. Если напряженное состояние элемента является однородным, т. е. не зависит от расположения точки в границах элемента, то и параметры упругости в пределах элемента сохраняются постоянными и изменяются только при переходе от одного элемента к другому. Таким образом, на каждом этапе итерационного процесса метода переменных параметров упругости реализуется обычный метод конечных элементов для системы, состоящей из элементов с различными свойствами.

11.3.4. Метод редуционных коэффициентов

В гл. 5 была построена балочная теория тонкостенных подкрепленных конструкций типа крыла и корпуса летательного аппарата и был введен редуционный коэффициент ϕ , позволя-

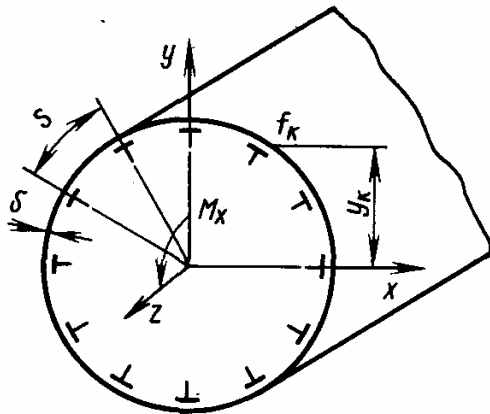


Рис. 11.24. Сечение подкрепленной оболочки

формирования которого представлена на рис. 11.25. Пусть обшивка приведена к стрингерам, т. е. сечение состоит из системы сосредоточенных элементов с площадью сечения $F_k = f_k + s \delta$ (см. рис. 11.24). При действии изгибающего момента M_x нормальные напряжения в сечении определяются формулой (5.21), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\sigma_k = \varphi_k \frac{M_x}{I_x} y_k, \quad (11.91)$$

где k — номер элемента,

$$I_x = \sum_i y_i^2 \varphi_i F_i \quad (11.92)$$

— момент инерции сечения и согласно равенству (5.9)

$$\varphi_k = \sigma_k / \sigma_{kp} \quad (11.93)$$

— редуционный коэффициент, представляющий собой отношение напряжения в реальном элементе σ_k к напряжению σ_{kp} в эквивалентном элементе, деформация которого равна деформации реального элемента, а площадь сечения — $\varphi_k F_k$. Напряжения в фиктивном элементе, выполненном из некоторого условного материала, определяются равенствами (11.91) и (11.93)

$$\sigma_{kp} = \frac{\sigma_k}{\varphi_k} = \frac{M_x}{I_x} y_k. \quad (11.94)$$

В качестве условного материала примем идеально упругий материал с диаграммой деформирования OA (см. рис. 11.25). Редуционный коэффициент φ_k будем определять, как и ранее, методом последовательных приближений. В первом приближении положим $\varphi_k^1 = 1$ и по формулам (11.92), (11.94) найдем σ_{kp}^1 во всех элементах (см. рис. 11.25). Ввиду того, что деформации фиктивного и реального элемента одинаковы, по схеме, показанной на рис. 11.25, определим напряжения σ_k^1 в реальном элементе в первом приближении, а по формуле (11.93) найдем редуционный коэффициент второго приближения — $\varphi_k^2 = \sigma_k^1 / \sigma_{kp}^1$. Вычислив

состоянию, соответствующему предшествующему этапу нагружения. Например, для стержня, показанного на рис. 11.21, имеем (рис. 11.26): на участках 1—5, соответствующих $0 \leq \sigma \leq \sigma_b$, $E_c^{1-5} = E$; на участке 6, т. е. при $\sigma_5 \leq \sigma \leq \sigma_b$ $E_c^6 = \sigma_b/\epsilon_b$; на участке 7 — $E_c^7 = \sigma_b/\epsilon_b$ и т. д. При этом точная кривая деформирования OB изображается кривой OA . Как следует из рис. 11.26, метод имеет тенденцию к накоплению ошибки и требует очень частого разбиения интервала изменения нагрузки. При редком разбиении получаемый результат может значительно отличаться от точного, что и иллюстрирует рис. 11.26. Шаг разбиения может быть увеличен, если на каждом этапе предусмотреть уточнение секущего модуля методом последовательных приближений, описанным в разд. 1.3.3. Сочетание метода последовательных нагружений с методом переменных параметров упругости, реализуемым на каждом этапе нагружения, позволяет, с одной стороны, увеличить интервал разбиения нагрузки, а с другой стороны — ограничиться на каждом этапе сравнительно небольшим числом приближений.

11.3.6. Упругопластическая деформация баков и баллонов давления

Рассмотрим безмоментную оболочку вращения (см. разд. 4.4.2), нагруженную равномерным внутренним давлением p и моделирующую корпус бака или баллона давления (рис. 11.27). Особенностью такой оболочки, существенно упрощающей анализ ее упругопластического деформирования, является статическим определяемый характер меридионального и кольцевого усилий, которые определяются равенствами (4.68), т. е.

$$N_\alpha = \frac{pR_2}{2}, \quad N_\beta = \frac{pR_2}{2} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right). \quad (11.95)$$

Соответствующие напряжения σ_α и σ_β связаны с усилиями (11.95) и толщиной оболочки h следующим образом:

$$N_\alpha = \sigma_\alpha h, \quad N_\beta = \sigma_\beta h. \quad (11.96)$$

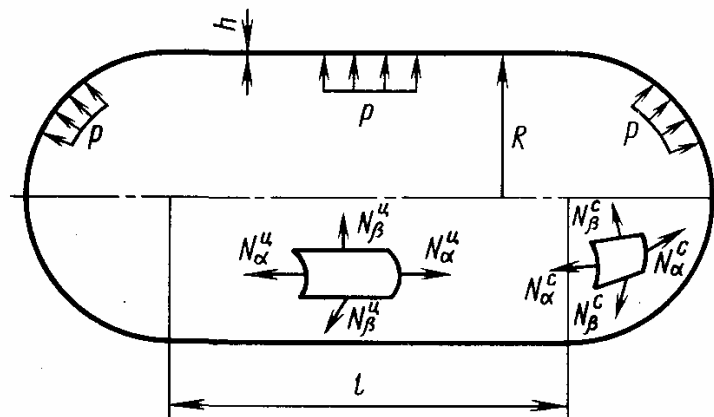


Рис. 11.27. Цилиндрический баллон давления с полусферическими днищами

Таким образом, независимо от свойств материала усилия при заданном давлении определяются по формулам (11.95). Давление, при котором образуются пластические деформации, может быть найдено с помощью условия

пластичности Мизеса (11.41) $|\sigma_i| = \sigma_T$, где интенсивность напряжений с учетом (11.96) имеет вид

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_\alpha^2 - \sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta^2} = \frac{1}{h} \sqrt{N_\alpha^2 - N_\alpha N_\beta + N_\beta^2}. \quad (11.97)$$

Физические соотношения деформационной теории пластичности (11.87), заменяющие в данном случае закон Гука (4.69) и позволяющие определить меридиональную ϵ_α и кольцевую ϵ_β деформацию, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{1}{E} (\sigma_\alpha - \mu \sigma_\beta) + \omega \left(\sigma_\alpha - \frac{1}{2} \sigma_\beta \right), \\ \epsilon_\beta &= \frac{1}{E} (\sigma_\beta - \mu \sigma_\alpha) + \omega \left(\sigma_\beta - \frac{1}{2} \sigma_\alpha \right), \end{aligned} \quad (11.98)$$

где $\omega = \frac{1}{E_c(\sigma_i)} - \frac{1}{E}$, $E_c = \sigma_i / \epsilon_i$.

После разгрузки ($p = 0$) усилия, как следует из равенств (11.95), исчезают, а остаточные деформации, как было показано в разд. 11.1.8, могут быть найдены по формулам (11.61). Учитывая, что упругие деформации, соответствующие давлению ($-p$), имеют вид

$$\epsilon_\alpha^y(-p) = -\frac{1}{E} (\sigma_\alpha - \mu \sigma_\beta), \quad \epsilon_\beta^y(-p) = -\frac{1}{E} (\sigma_\beta - \mu \sigma_\alpha),$$

согласно равенствам (11.61) и (11.14) будем иметь

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha^o &= \epsilon_\alpha(p) + \epsilon_\alpha^y(-p) = \omega \left(\sigma_\alpha - \frac{1}{2} \sigma_\beta \right), \\ \epsilon_\beta^o &= \epsilon_\beta(p) + \epsilon_\beta^y(-p) = \omega \left(\sigma_\beta - \frac{1}{2} \sigma_\alpha \right). \end{aligned} \quad (11.99)$$

Для цилиндрической части бака или баллона давления (см. рис. 11.27) при $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R$ из формул (11.95)—(11.98) получим

$$\begin{aligned} N_\alpha^u &= \sigma_\alpha^u h = \frac{pR}{2}, \quad N_\beta^u = \sigma_\beta h = pR, \quad \sigma_i^u = \frac{\sqrt{3} pR}{2h}, \\ \epsilon_\alpha^u &= \frac{pR(1-2\mu)}{2Eh}, \quad \epsilon_\beta^u = \frac{pR}{2h} \left(\frac{2-\mu}{E} + \frac{3\omega_\Pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (11.100)$$

В результате опрессовки до давления $p = \bar{p}$ после разгрузки будем иметь следующие остаточные деформации (11.99):

$$\epsilon_\alpha^o = 0, \quad \epsilon_\beta^o = \frac{3\bar{p}R}{4h} \omega_\Pi.$$

Таким образом, после разгрузки образующая не удлинилась, а длина направляющей окружности стала $2\pi R (1 + \epsilon_\beta^o)$ и соответ-

ственно радиус $R(1 + \varepsilon_\beta^0)$. Внутренний объем оболочки увеличился на

$$\Delta V_\pi = \pi R^2 l [(1 + \varepsilon_\beta^0)^2 - 1] \approx 2V_\pi \varepsilon_\beta^0 = V_\pi \omega_\pi \frac{3pR}{2h}. \quad (11.101)$$

Здесь учтено, что $\varepsilon_\beta^0 \ll 1$.

Для сферического баллона при $R_1 = R_2 = R$ из равенств (11.95)—(11.98) и (11.99) имеем

$$N_\alpha^c = \sigma_\alpha^c h = N_\beta^c = \sigma_\beta^c h = \frac{pR}{2}, \quad \sigma_i = \frac{pR}{2h},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \frac{pR}{2h} \left(\frac{1-\mu}{E} + \frac{\omega_c}{2} \right), \quad (11.102)$$

$$\varepsilon_o = \varepsilon_\alpha^o = \varepsilon_\beta^o = \frac{pR\omega_c}{4h}.$$

После разгрузки радиус увеличился на $R\varepsilon_o$, а внутренний объем на

$$\Delta V_o = \frac{4}{3} \pi R^3 [(1 + \varepsilon_o)^3 - 1] \approx 3V_o \varepsilon_o = V_o \omega_c \frac{3pR}{4h}. \quad (11.103)$$

Здесь учтено, что $\varepsilon_o \ll 1$.

Если пренебречь деформацией в зоне краевого эффекта (см. разд. 4.4.3), то изменение объема баллона, показанного на рис. 11.27, согласно равенствам (11.101), (11.103) будет

$$\Delta V = \Delta V_\pi + \Delta V_o = \frac{\pi R^3 p}{2h} (3l\omega_\pi + 2R\omega_c).$$

Если при опрессовке материал не вышел за предел упругости, то $E_c = E$, $\omega = 0$ и $\Delta V = 0$.

Рассмотрим теперь одну перспективную конструкцию, расчет которой позволяет более полно проиллюстрировать применение теорий и методов, изложенных в предшествующих разделах. Как следует из равенств (11.100), (11.102), кольцевые напряжения в цилиндрической части баллона, показанного на рис. 11.27, вдвое превышают осевые напряжения в цилиндрической части и напряжения в днищах. При проектировании баллона его толщину обычно выбирают из условия прочности по максимальным — кольцевым напряжениям. Значительный выигрыш в массе баллона можно получить, если сделать его вдвое тоньше — в соответствии с осевыми напряжениями и напряжениями в днищах, а недостаток прочности цилиндрической части в кольцевом направлении компенсировать кольцевым армированием, т. е. намоткой на цилиндрическую часть металлической проволоки, стеклянных, углеродных или органических нитей, обладающих высокой удельной прочностью (рис. 11.28). Как правило, такие нити являются

линейно-упругими, а металлический слой обладает пластическими свойствами (рис. 11.29).

Запишем исходные уравнения для цилиндрической части баллона. Из равенств (11.95) при $R_1 \rightarrow \infty$ и $R_2 = R$ имеем

$$N_\alpha = pR/2, \quad N_\beta = pR. \quad (11.104)$$

Очевидно, усилие N_α воспринимается только металлическим слоем, а усилие N_β как металлическим, так и армированным слоем (см. рис. 11.28), т. е. формулы (11.96) в рассматриваемом случае принимают вид

$$N_\alpha = \sigma_\alpha h, \quad N_\beta = \sigma_\beta h + s\delta. \quad (11.105)$$

Деформации металлического слоя выражаются через напряжения σ_α и σ_β равенствами (11.98), а для армированного слоя справедлив закон Гука, связывающий напряжение s с деформацией e

$$s = E_0 e, \quad (11.106)$$

где E_0 — модуль упругости армированного слоя при растяжении в направлении армирования (прямая 2 на рис. 11.29).

Будем решать задачу методом напряжений (см. разд. 1.1.4). Для этого к статическим соотношениям (11.104), (11.105) необходимо добавить условие совместной деформации слоев. Если считать, что толщина слоев h и δ пренебрежимо мала по сравнению с радиусом оболочки R , то это условие принимает следующую очевидную форму: $\epsilon_\beta = e$, т. е. кольцевые деформации металлического и армированного слоев должны быть одинаковыми. Исключая из этого условия ϵ_β и e с помощью соотношений (11.98) и (11.106), получим

$$\begin{aligned} \frac{s}{E_0} &= \frac{1}{E} (\sigma_\beta - \mu \sigma_\alpha) + \\ &+ \left[\frac{1}{E_c(\sigma_i)} - \frac{1}{E} \right] \left(\sigma_\beta - \frac{1}{2} \sigma_\alpha \right). \end{aligned} \quad (11.107)$$

Из уравнений (11.104), (11.105) имеем

$$\sigma_\alpha = \frac{pR}{2h}, \quad \sigma_\beta = \frac{pR}{h} - s \frac{\delta}{h}. \quad (11.108)$$

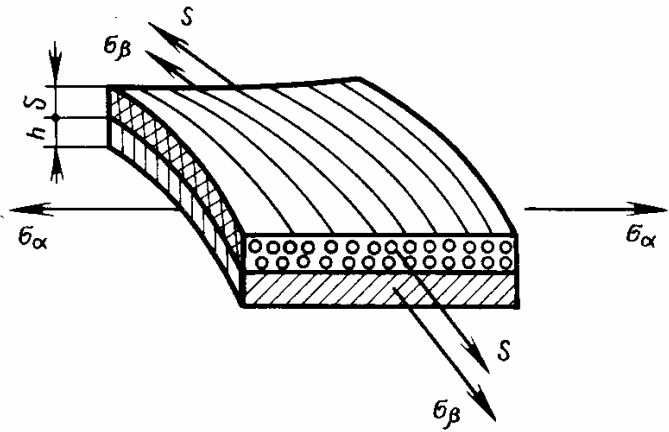


Рис. 11.28. Элемент баллона давления, армированного в кольцевом направлении

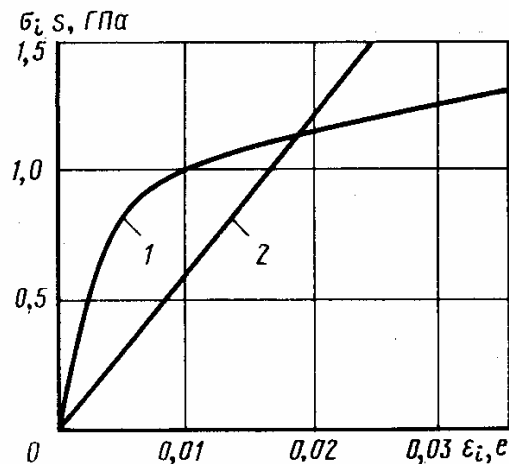


Рис. 11.29. Диаграммы деформирования металлического слоя $\sigma(e)$ (1 — сталь) и армированного слоя $s(e)$ (2 — стеклопластик)

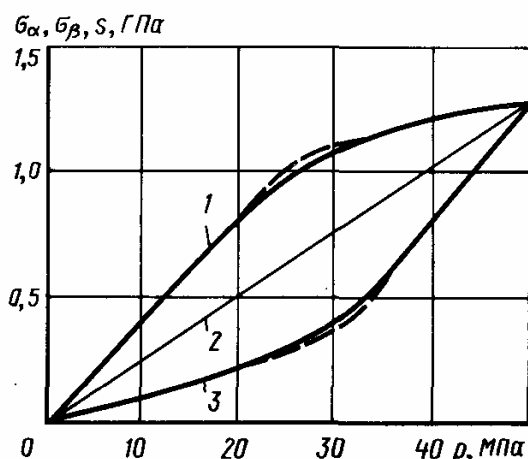


Рис. 11.30. Изменение кольцевых σ_ϕ (1) и осевых σ_α (2) напряжений в металлическом слое и кольцевых напряжений s (3) в армированном слое при увеличении давления: — решение по деформационной теории; - - - решение по теории течения

Подставим (11.108) в (11.107) и из полученного соотношения выразим

$$s = \frac{pR}{4h} \frac{\frac{3E}{E_c(\sigma_i)} + 1 - 2\mu}{\frac{E}{E_0} + \frac{E\delta}{E_c(\sigma_i)h}}. \quad (11.109)$$

Интенсивность напряжений согласно равенствам (11.97) и (11.108) имеет вид

$$\sigma_i^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{pR}{h} \right)^2 + \frac{3pR}{2h^2} \delta s + \left(\frac{\delta s}{h} \right)^2. \quad (11.110)$$

На рис. 11.30 сплошными линиями показаны зависимости напряжений в металлическом и армированном слоях от давления для баллона с параметрами $R = 0,1$ м; $h = 1,9 \cdot 10^{-3}$ м, $\delta = 1,7 \cdot 10^{-3}$ м, $\mu = 0,3$. Решение осуществлялось методом последовательных нагружений (см. разд. 11.3.5). Интервал изменения давления разбивался на 50 участков ($\Delta p = 1$ МПа). На начальном участке в равенстве (11.109) принималось $E_c = E$, находилось напряжение s и по формулам (11.108) определялись напряжения σ_α и σ_ϕ . На каждом этапе по формуле (11.110) вычислялась интенсивность напряжений и по диаграмме деформирования (см. рис. 11.29) определялся секущий модуль для следующего этапа нагружения. Для повышения точности секущий модуль на каждом этапе уточнялся методом последовательных приближений — после определения E_c это значение подставлялось в (11.109), s — в (11.110), а по найденному значению интенсивности σ_i и рис. 11.29 определялось новое значение E_c . Для получения стабильного результата в рассматриваемом случае требуется не более трех приближений.

Из рис. 11.30 следует, что нагружение металлического слоя не является простым, так как напряжение σ_α (прямая 2) изменяется пропорционально давлению, а изменение σ_ϕ (кривая 1) происходит по более сложному закону. Как отмечалось в разд. 11.1.6, 11.1.7, в этом случае более точный результат должна давать теория течения, физические соотношения которой определяются равенствами (11.58) и в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned} d\epsilon_\alpha &= \frac{1}{E} (d\sigma_\alpha - \mu d\sigma_\phi) + d\omega \left(\sigma_\alpha - \frac{1}{2} \sigma_\phi \right), \\ d\epsilon_\phi &= \frac{1}{E} (d\sigma_\phi - \mu d\sigma_\alpha) + d\omega \left(\sigma_\phi - \frac{1}{2} \sigma_\alpha \right), \end{aligned} \quad (11.111)$$

$$\text{где } d\omega = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i} \left[\frac{1}{E_\kappa(\sigma_i)} - \frac{1}{E} \right], \quad E_\kappa = \frac{d\sigma_i}{d\epsilon_i}.$$

Условие совместности деформации металлического и армированного слоев в этом случае записывается в дифференциальной форме $d\varepsilon_\beta = de$, где $d\varepsilon_\beta$ определяется вторым равенством (11.111) и согласно (11.106) $de = ds/E_0$. В результате вместо соотношения (11.107) будем иметь

$$\frac{ds}{E_0} = \frac{1}{E} (d\sigma_\beta - \mu d\sigma_\alpha) + \frac{d\sigma_t}{\sigma_t} \left[\frac{1}{E_R(\sigma_t)} - \frac{1}{E} \right] \left(\sigma_\beta - \frac{1}{2} \sigma_\alpha \right). \quad (11.112)$$

Из равенств (11.108), (11.110) найдем

$$\begin{aligned} d\sigma_\alpha &= \frac{R}{2h} dp, \quad d\sigma_\beta = \frac{R}{h} dp + \frac{\delta}{h} ds, \\ 2\sigma_t d\sigma_t &= \frac{3pR^2}{2h^2} dp + \frac{3R\delta s}{2h^2} dp + \frac{3pR\delta}{2h^2} ds + \frac{2s\delta^2}{h^2} ds. \end{aligned} \quad (11.113)$$

Подставляя $d\sigma_\alpha$, $d\sigma_\beta$ и $d\sigma_t$ из (11.113) в (11.112), окончательно получим

$$\frac{ds}{dp} = \frac{\sigma_t^2 (2 - \mu) + \frac{3}{2} \left(\frac{pR}{h} - \frac{\delta}{h} s \right) \left(\frac{3pR}{4h} - \frac{\delta}{h} s \right) \left[\frac{E}{E_R(\sigma_t)} - 1 \right]}{\frac{\sigma_t^2}{E_0 h} (Eh + E_0 \delta) + \frac{\delta}{h} \left(\frac{3pR}{4h} - \frac{\delta}{h} s \right)^2 \left[\frac{E}{E_R(\sigma_t)} - 1 \right]}. \quad (11.114)$$

Входящая в уравнение (11.114) интенсивность напряжений определяется соотношением (11.110), а касательный модуль $E_R = d\sigma_t/d\varepsilon_t$ находится по единой кривой, представленной на рис. 11.29. Уравнение (11.114) интегрируется численно при начальном условии $s(p=0) = 0$. С физической стороны такое интегрирование соответствует процессу последовательного нагружения баллона. Результаты интегрирования показаны на рис. 11.30 пунктирными линиями (там, где они отличаются от решения по деформационной теории).

Из рис. 11.30 следует, что теория течения и деформационная теория пластичности в данном случае приводят к близким результатам. Этого следовало ожидать, поскольку в рассматриваемом баллоне реализуется нагружение, близкое к простому (см. разд. 11.1.6, 11.1.7).

В заключение отметим, что в рассматриваемой конструкции металлический слой является равнопрочным (из рис. 11.30 видно, что при $p = 50$ МПа $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_t$). У рассматриваемого в качестве примера баллона (сталь — $h = 1,9 \cdot 10^{-3}$ м, стеклопластик — $\delta = 1,7 \cdot 10^{-3}$ м) масса единицы поверхности на 30 % меньше, чем у чисто металлического баллона.

11.4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

11.4.1. Устойчивость стержней

Формула, определяющая критические напряжения стержня, сжатого за пределом упругости, является хорошей иллюстрацией развития процесса познания. В 1759 г. Л. Эйлером была опубликована формула для идеального упругого стержня [см. разд. 9.2.1 и равенство (9.14)]

$$\sigma_{кр}^э = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EI}{l^2 F} = \frac{\pi^2 E r^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (11.115)$$

Здесь F — площадь сечения стержня; $r = \sqrt{I/F}$ — радиус инерции сечения; $\lambda = l/r$ — параметр, характеризующий гибкость стержня. Напомним, что формула (11.115) была получена в результате решения уравнения (9.12), т. е.

$$EI v^{IV} + P v'' = 0, \quad (11.116)$$

основанного на законе плоских сечений (1.32), согласно которому изгибающий момент связан с кривизной оси стержня равенством (1.38), т. е.

$$M = -EI v''. \quad (11.117)$$

Здесь $v(x)$ — прогиб, вызванный изгибным возмущением. Согласно статическому критерию устойчивости (см. разд. 9.12) $P_{кр}$ является наименьшим значением силы, при которой уравнение (11.116) кроме решения $v(x) \equiv 0$, соответствующего исходной прямолинейной форме равновесия стержня, имеет ненулевое решение, соответствующее искривленной форме равновесия. Естественно, что формула Эйлера, полученная в предположении об упругом поведении материала, справедлива до тех пор, пока критические напряжения не достигают предела текучести σ_T . Полагая в (11.115) $\sigma_{кр}^э = \sigma_T$, получим

$$\lambda_T = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_T}}. \quad (11.118)$$

Таким образом, формула Эйлера справедлива при $\lambda > \lambda_T$. При $\lambda < \lambda_T$ расчет по этой формуле приводит к результатам, значительно превышающим экспериментальные (рис. 11.31). Это обстоятельство не находило строгого объяснения почти столетие после вывода формулы Эйлера. Только в 1845 г. бельгийский исследователь Е. Ламарль установил ограничение (11.118), связанное с неупругим поведением стержня. В последующие годы был предложен ряд эмпирических зависимостей $\sigma_{кр}(\lambda)$ при $\lambda \ll \lambda_T$, а в 1889 г. Ф. Энгессером в Германии и А. Консидером во Франции были получены первые теоретические результаты. Рассмотрим рис. 11.32 и 11.33, а. В соответствии со статическим критерием устойчивости (см. разд. 9.1.2) необходимо исследовать

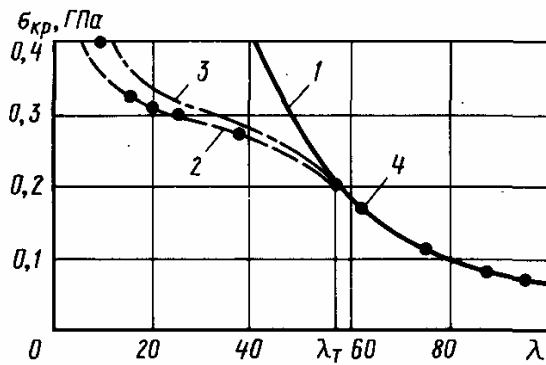


Рис. 11.31. Зависимость критических напряжений от параметра гибкости для круглых стержней диаметром 7×10^{-3} м, изготовленных из алюминиевого сплава:

1 — по формуле Эйлера (11.115); 2 — по теории касательного модуля; 3 — по теории приведенного модуля; 4 — экспериментальные результаты

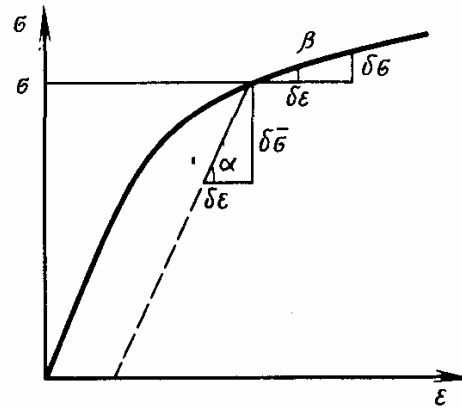


Рис. 11.32. Диаграмма деформирования сжатого стержня

полнительные напряжения $\delta\sigma = E_K \delta\epsilon$, где E_K — касательный модуль (см. рис. 11.32). В результате в сечении возникает изгибающий момент

$$M = \int_F \delta\sigma y dF = -E_K v'' \int_F y^2 dF = -E_K I v''. \quad (11.119)$$

Сопоставляя равенства (11.119) и (11.117), можно заключить, что для получения результата в уравнении (11.116), а следовательно, и в формуле (11.115) необходимо заменить E на E_K , т. е.

$$\sigma_{кр}^K = \frac{\pi^2 E_K I}{l^2 F} = \frac{\pi^2 E_K}{\lambda^2}. \quad (11.120)$$

Формула (11.120), определяющая критические напряжения на основании изложенной выше теории касательного модуля, как

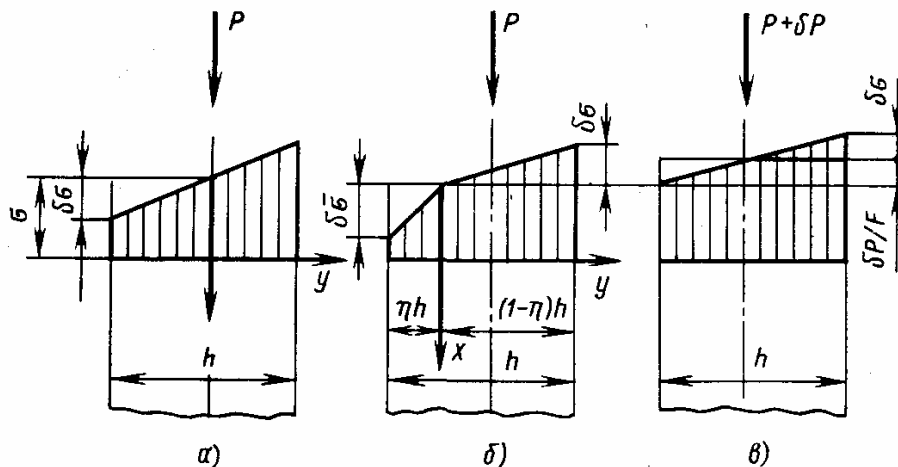


Рис. 11.33. Распределения напряжений по высоте сечения, соответствующие теории касательного модуля (а), теории приведенного модуля (б) и концепции продолжающегося нагружения (в)

будет показана далее, является основным результатом теории устойчивости упругопластического стержня и требует некоторого пояснения. В связи с тем, что в эту формулу входит касательный модуль E_k , который зависит от искомого напряжения $\sigma_{кр}^k$, расчет производится следующим образом. Задается $\sigma_{кр}^k$, по диаграмме деформирования определяется соответствующий модуль E_k и по формуле (11.120) находится λ . Таким образом, строится зависимость $\lambda(\sigma_{кр}^k)$ (пунктирная кривая на рис. 11.31) и по ней для заданного λ определяется $\sigma_{кр}^k$.

Формула (11.120) была опубликована в 1889 г., а в 1895 г. Ф. С. Ясинский указал на то, что при ее выводе не учтена разгрузка. Действительно, согласно статическому критерию устойчивости, изгибные возмущения создаются при постоянной сжимающей силе P . При этом часть сечения, лежащая с одной стороны от нейтральной оси, будет догружаться дополнительными сжимающими напряжениями, а часть, лежащая по другую сторону от нейтральной оси, будет догружаться растягивающими напряжениями, т. е. по существу в этой части сечения имеет место разгрузка, которая идет по прямой, параллельной начальному упругому участку (см. рис. 11.1).

В том же 1895 г. Энгессер учел разгрузку и заложил основы теории приведенного модуля, которая была завершена в работах Т. Кармана. Рассмотрим рис. 11.32 и 11.33, б. Пусть, как и ранее, у равномерно сжатого стержня появился прогиб $v(x)$ и изгибная деформация $\delta\epsilon = -yv''$. Тогда в области $0 \leq y \leq h(1 - \eta)$ (см. рис. 11.33, б), где имеет место догрузка, $\delta\sigma = E_k\delta\epsilon = -E_k yv''$, а в области $-\eta h \leq y \leq 0$, где имеет место разгрузка, $\delta\bar{\sigma} = E\delta\epsilon = -E yv''$ (E — модуль упругости, см. рис. 11.32). Для конкретности рассмотрим прямоугольное сечение с высотой h и шириной b . Найдем изгибающий момент (см. рис. 11.33, б)

$$\begin{aligned} M &= b \left[\int_{-\eta h}^0 \delta\bar{\sigma} y dy + \int_0^{(1-\eta)h} \delta\sigma y dy \right] = \\ &= -bv'' \left[E \int_{-\eta h}^0 y^2 dy + E_k \int_0^{(1-\eta)h} y^2 dy \right] = \\ &= -\frac{1}{3} b h^3 v'' [E\eta^3 + E_k(1 - \eta)^3]. \end{aligned} \quad (11.121)$$

Параметр η , характеризующий положение нейтральной оси, найдем из следующего условия. Поскольку изгибное возмущение накладывается при постоянной силе P , равнодействующая напряжений $\delta\bar{\sigma}$ и $\delta\sigma$ должна обращаться в нуль, т. е.

$$b \int_{-\eta h}^0 \delta\bar{\sigma} dy + b \int_0^{(1-\eta)h} \delta\sigma dy = 0$$

или

$$-\frac{1}{2}bv''h^2[-E\eta^2 + E_{\kappa}(1-\eta)^2] = 0.$$

Отсюда $\eta = \sqrt{E_{\kappa}}/(\sqrt{E} + \sqrt{E_{\kappa}})$ и равенство (11.121) принимает вид

$$M = -E_{\pi}Iv'', \quad E_{\pi} = \frac{4EE_{\kappa}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_{\kappa}})^2}. \quad (11.122)$$

Для получения критического напряжения, соответствующего теории приведенного модуля, как и ранее, достаточно заменить в формуле (11.115) E на приведенный модуль E_{π} , т. е.

$$\sigma_{\text{кр}}^{\pi} = \frac{\pi^2 E_{\pi} I}{F l^2} = \frac{\pi^2 E_{\pi}}{\lambda^2}. \quad (11.123)$$

Формула (11.123) по существу значительно сложнее формулы (11.120), так как приведенный модуль, входящий в (11.123), зависит от формы сечения. Для прямоугольного сечения этот модуль определяется равенством (11.122). Отметим, что $E_{\pi} \geq E_{\kappa}$ и $\sigma_{\text{кр}}^{\pi} \geq \sigma_{\text{кр}}^{\kappa}$, причем знак равенства реализуется только в случае, если не учитывается разгрузка.

Несмотря на то, что формула (11.123) представляется более строгой, чем формула (11.120), экспериментальные результаты стабильно подтверждают теорию касательного модуля лучше, чем теорию приведенного модуля (см. рис. 11.31). Объяснение этому было предложено в 1947 г. Ф. Шэнли, который сформулировал концепцию продолжающегося нагружения. Предположим, что при образовании изгибного возмущения сила P не остается постоянной, а может возрастать (что обычно и имеет место на практике). Тогда разгрузка, вызванная изгибом, может компенсироваться дополнительными сжимающими напряжениями, равными $\delta P/F$ (см. рис. 11.33, в). Изгибающий момент, соответствующий распределению напряжений, показанному на рис. 11.33, в, очевидно, определяется формулой (11.119), из которой вытекает выражение (11.120). Следует отметить, что теория Ф. Шэнли подтверждает только результат, полученный Энгессером, но не гипотезу об отсутствии разгрузки, на которой он основан. Ф. Шэнли показал, что недостатком теории приведенного модуля является то, что при выводе выражения для $\sigma_{\text{кр}}^{\pi}$ неявно предполагается, что стержень может находиться только в двух положениях — исходном прямолинейном и искривленном, при котором зона разгрузки распространяется на всю его длину. При этом не учитываются возможные промежуточные состояния стержня. Более поздние исследования показали, что при $\sigma > \sigma_{\text{кр}}^{\kappa}$ возможны искривленные состояния стержня, характеризуемые поверхностной зоной разгрузки, расположенной в его средней части. При увеличении силы P эта зона распространяется как по направлению к оси стержня, так и по направлению к его концам, и при

$\sigma = \sigma_{кр}^п$ занимает всю его длину. Строго говоря, нагрузка $P_k = \sigma_{кр}^к F$ не является критической с позиций статического критерия устойчивости — она определяет нижнюю границу спектра нагрузок, которым соответствуют возможные искривленные формы равновесия стержня.

Концепция Ф. Шэнли, согласно которой можно не учитывать разгрузку, значительно упрощает решение и широко используется при анализе устойчивости конструкций за пределом упругости. Более полные результаты содержатся в книгах [14, 17].

11.4.2. Устойчивость прямоугольных пластин

Рассмотрим шарнирно опертую по краям прямоугольную пластину, сжатую в одном направлении (см. рис. 9.7). Задача устойчивости такой пластины в упругой постановке была решена в разд. 9.3.2. В результате анализа уравнения устойчивости (9.42), т. е.

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (11.124)$$

была получена формула (9.47)

$$\sigma_{кр} = 3,6E \left(\frac{h}{b} \right)^2. \quad (11.125)$$

Очевидно, что эта формула справедлива при $\sigma < \sigma_T$, т. е. при $(h/b)^2 < \sigma_T/3,6E$.

Для вывода уравнения устойчивости пластины за пределом упругости воспользуемся методом, изложенным в разд. 9.3.1, т. е. запишем уравнение равновесия (3.61), заменив в нем нагрузку q условной поперечной нагрузкой $\bar{q}$, определяемой равенством (9.3.4). Полагая в (9.37) $N_y^0 = N_{xy}^0 = 0$ и заменяя в уравнении изгиба пластины q на $\bar{q}$ (см. разд. 3.3.1), получим

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (11.126)$$

Запишем теперь физические соотношения, связывающие моменты с прогибом и обобщающие равенства (3.58) на случай упругопластического деформирования. Пусть дан прогиб $w(x, y)$ (см. рис. 9.7). Тогда в соответствии с равенствами (3.53) и рис. 3.9 в пластине появятся дополнительные перемещения

$$\delta u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \delta v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

и согласно соотношениям (3.4) — дополнительные деформации

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \delta \varepsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \delta \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (11.127)$$

Физические соотношения деформационной теории пластичности запишем в форме (11.89), соответствующей методу переменных параметров упругости. Для простоты будем считать материал несжимаемым ($\mu = 0,5$). Тогда в соотношениях (11.89) следует положить $E^* = E_c$, $G^* = E_c/3$, $\mu^* = 0,5$ и в соответствии с гипотезами теории пластин (см. разд. 3.1.1) принять $\sigma_z = 0$, т. е.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_c} \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y \right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_c} \left(\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x \right), \quad \gamma_{xy} = \frac{3\tau_{xy}}{E_c}.$$

Отсюда

$$\sigma_x = \frac{4E_c}{3} \left(\varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y \right), \quad \sigma_y = \frac{4E_c}{3} \left(\varepsilon_y + \frac{1}{2} \varepsilon_x \right), \quad \tau_{xy} = \frac{E_c}{3} \gamma_{xy}. \quad (11.128)$$

Учитывая, что секущий модуль зависит от интенсивности деформаций ε_i , найдем величину приращения напряжений, вызванные возмущением

$$\begin{aligned} \delta\sigma_x &= \frac{4E_c}{3} \left(\delta\varepsilon_x + \frac{1}{2} \delta\varepsilon_y \right) + \frac{4}{3} \frac{dE_c}{d\varepsilon_i} \delta\varepsilon_i \left(\varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y \right), \\ \delta\sigma_y &= \frac{4E_c}{3} \left(\delta\varepsilon_y + \frac{1}{2} \delta\varepsilon_x \right) + \frac{4}{3} \frac{dE_c}{d\varepsilon_i} \delta\varepsilon_i \left(\varepsilon_y + \frac{1}{2} \varepsilon_x \right), \\ \delta\tau_{xy} &= \frac{E_c}{3} \delta\gamma_{xy} + \frac{1}{3} \frac{dE_c}{d\varepsilon_i} \delta\varepsilon_i \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (11.129)$$

Имея в виду, что $E_c = \sigma_i/\varepsilon_i$ и $E_K = d\sigma_i/d\varepsilon_i$, получим

$$\frac{dE_c}{d\varepsilon_i} = \frac{d}{d\varepsilon_i} \left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \right) = \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i^2} = \frac{1}{\varepsilon_i} (E_K - E_c). \quad (11.130)$$

Окончательно, заменяя во вторых слагаемых равенств (11.129) слагаемые в круглых скобках величинами напряжений с помощью (11.128) и учитывая формулы (11.130) и $\sigma_i = E_c \varepsilon_i$, получим

$$\begin{aligned} \delta\sigma_x &= \frac{4E_c}{3} \left(\delta\varepsilon_x + \frac{1}{2} \delta\varepsilon_y \right) - (E_c - E_K) \frac{\sigma_x}{\sigma_i} \delta\varepsilon_i, \\ \delta\sigma_y &= \frac{4E_c}{3} \left(\delta\varepsilon_y + \frac{1}{2} \delta\varepsilon_x \right) - (E_c - E_K) \frac{\sigma_y}{\sigma_i} \delta\varepsilon_i, \\ \delta\tau_{xy} &= \frac{E_c}{3} \delta\gamma_{xy} - (E_c - E_K) \frac{\tau_{xy}}{\sigma_i} \delta\varepsilon_i. \end{aligned} \quad (11.131)$$

Для случая одноосного сжатия (см. рис. 9.7) следует положить $\sigma_x = N_x^0/h$ (h — толщина пластины), $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Кроме того, из равенства (11.19) при этом имеем $\sigma_i = \sigma_x$, а из соотношения (11.26) для несжимаемого материала $\varepsilon_i = \varepsilon_x$. Учитывая эти упро-

щения и подставляя в (11.131) величины приращений деформаций согласно (11.127), получим

$$\begin{aligned}\delta\sigma_x &= -z \left[\frac{4}{3} E_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (E_c - E_n) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\ \delta\sigma_y &= -z \frac{4}{3} E_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \sigma\tau_{xy} &= -z \frac{2}{3} E_c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (11.132)$$

Дополнительные напряжения (11.132) линейно изменяются по толщине пластины и статически эквивалентны изгибающим и крутящему моментам (3.13), т. е.

$$\begin{aligned}M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_x z dz = -D' \left[\varphi_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{3}{4} (\varphi_c - \varphi_n) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_y z dz = -D' \varphi_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta\tau_{xy} z dz = -\frac{D'}{2} \varphi_c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (11.133)$$

Здесь $D' = Eh^3/9$ — цилиндрическая жесткость пластины из несжимаемого материала ($\mu = 0,5$); $\varphi_c = E_c/E$; $\varphi_n = E_n/E$. При $\varphi_c = \varphi_n = 1$ равенства (11.133) переходят в полученные ранее соотношения упругости (3.58), если принять в них $\mu = 0,5$. Отметим, что физические соотношения (11.133) получены без учета возможной разгрузки, т. е. в соответствии с концепцией продолжающегося нагружения Φ . Шэнли (см. разд. 11.4.1). Параметры φ_c и φ_n определяются по диаграмме докритического одноосного сжатия σ_x (ϵ_x) и от координат не зависят.

Для получения уравнения устойчивости необходимо подставить значения моментов (11.133) в уравнение равновесия (11.126), т. е.

$$D' \left[\left(\frac{\varphi_c}{4} + \frac{3\varphi_n}{4} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\varphi_c \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \varphi_c \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (11.134)$$

При $\varphi_c = \varphi_n = 1$ это уравнение переходит в (11.124).

Как и в случае упругой пластины, решение уравнения (11.134), удовлетворяющее условиям шарнирного опирания по сторонам пластины $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$, будем искать в форме ряда (9.44), т. е.

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (11.135)$$

Подставляя ряд (11.135) в уравнение (11.134) и повторяя вывод формулы (9.45), получим следующую аналогичную ей формулу:

$$N_{кр} = k_{\tau} \frac{\pi^2 D'}{b^3},$$

где

$$k_{\tau} = \frac{1}{4} (\varphi_c + 3\varphi_n) \left(\frac{mb}{a} \right)^2 + 2\varphi_c n^2 + \varphi_c \left(\frac{n^2 a}{mb} \right)^2.$$

Очевидно, что, как и в случае упругой пластины, минимальное значение $N_{кр}$ реализуется при $n = 1$. Обозначив $mb/a = \lambda$, будем иметь

$$k_{\tau} = \frac{1}{4} (\varphi_c + 3\varphi_n) \lambda + 2\varphi_c + \frac{\varphi_c}{\lambda}.$$

Как уже отмечалось в разд. 9.3.2, для удлиненных пластин параметр λ можно приближенно считать изменяющимся непрерывно. Тогда из условия минимума $\partial k_{\tau} / \partial \lambda = 0$ получим $\lambda^4 = 4\varphi_c / (\varphi_c + 3\varphi_n)$ и $k_{\tau} = \sqrt{\varphi_c (\varphi_c + 3\varphi_n)} + 2\varphi_c$. Таким образом, получим следующую формулу, обобщающую равенство (9.47) на случай упругопластического материала,

$$\sigma_{кр} = k_{\tau} \frac{\pi^2 D'}{b^3 h} = 1,1 [\sqrt{E_c (E_c + 3E_n)} + 2E_c] \left(\frac{h}{b} \right)^2. \quad (11.136)$$

Критическое напряжение определяется следующим образом. задается значение $\sigma_{кр}$, по диаграмме деформирования находятся соответствующие значения секущего и касательного модуля E_c и E_n и по формуле (11.136) определяется отношение h/b . Таким образом строится зависимость h/b от $\sigma_{кр}$, по которой при заданном значении h/b и находится критическое напряжение.

ГЛАВА 12

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ОРТОТРОПНЫХ, СЛОИСТЫХ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

12.1. ЭЛЕМЕНТЫ ИЗ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

12.1.1. Соотношения упругости для композиционного материала

Современные летательные аппараты в основном изготавливаются из металлических сплавов — алюминиевых, титановых, сталей и др. Несмотря на различие механических характеристик, эти материалы обладают одним общим свойством — они являются изотропными. В то же время среди природных и искусственных материалов встречаются такие, которые обладают различными свойствами в зависимости от направления в среде материала. К ним относятся, в частности, широко применявшиеся в 30-е и 40-е годы в авиастроении ткань, фанера и дельта-древесина. Такие материалы называются анизотропными. В последние годы интерес к применению анизотропных материалов в конструкциях летательных аппаратов значительно возрос, что связано с появлением нового класса композиционных материалов, обладающих исключительно высокими механическими характеристиками. Композиционные материалы образованы из двух составляющих — тонких волокон, обеспечивающих высокую прочность и жесткость материала, и связующего, обеспечивающего монолитность материала и совместную работу волокон. В настоящее время в композиционных материалах применяются стеклянные, органические, углеродные и борные волокна с диаметром от $1 \cdot 10^{-5}$ до $2 \cdot 10^{-4}$ м, модулем упругости от 90 до 400 ГПа, пределом прочности от 2 до 3,5 ГПа и плотностью от 1450 до 2500 кг/м³. Напомним, что алюминиевый сплав при плотности 2700 кг/м³ обладает модулем упругости 71 ГПа и пределом прочности порядка 0,6 ГПа, а конструкционная сталь имеет соответственно 7850 кг/м³, 210 ГПа и предел прочности порядка 1,5 ГПа. В качестве связующих материалов применяются полимерные смолы и металлические (в основном алюминиевые) сплавы. Из волокон и жидкого связующего, как правило, образуется лента, которая посредством высокопроизводительных и автоматизированных технологических процессов укладывается слоями в различных направлениях. После отверждения связующего получается анизотропный слоистый композиционный материал, удельная прочность которого (отношение предела прочности и плотности), как правило, в несколько раз больше соответствующей характеристики металлических сплавов. Из таких материалов в настоящее время изготавливаются баки,

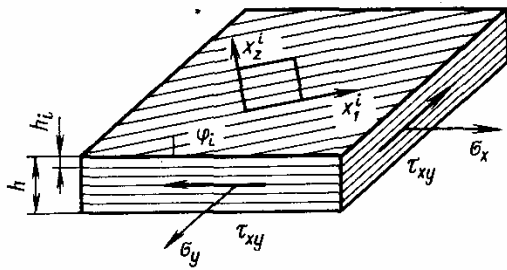


Рис. 12.1. Элемент слоистого композиционного материала

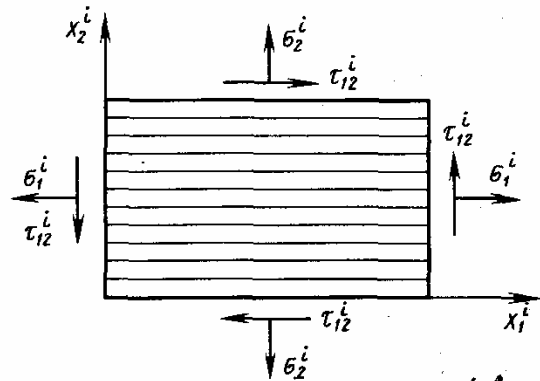


Рис. 12.2. Слой в координатах (x_1^i, x_2^i)

баллоны давления, корпуса двигателей, панели обшивки крыла и оперения, носовые обтекатели, лопасти винтов и многие другие элементы летательного аппарата.

Расчет композиционных элементов осуществляется на основе изложенных выше теорий и методов строительной механики с помощью соотношений, учитывающих специфические особенности армированных материалов. Ввиду того, что уравнения равновесия и геометрические соотношения от свойств материала не зависят, эти особенности должны учитываться физическими соотношениями, связывающими напряжения и деформации.

Для вывода этих соотношений рассмотрим элемент слоистого материала, находящийся в условиях плоского напряженного состояния и показанный на рис. 12.1. Предположим, что материал образован из k слоев с толщинами h_i ($i = 1, 2, 3, \dots, k$), причем в каждом слое можно выделить некоторое определяющее направление (например, направление укладки волокон), которое составляет с осью x угол φ_i . Необходимо определить модули упругости такого материала.

Предварительно рассмотрим слой в координатах (x_1^i, x_2^i) — см. рис. 12.1, 12.2). Такой слой является ортогонально-анизотропным или сокращенно — ортотропным, поскольку он обладает двумя взаимно ортогональными осями симметрии (ортотропии) x_1^i и x_2^i . Характерной особенностью ортотропного материала является то, что нормальные напряжения, действующие вдоль осей ортотропии, не вызывают деформации сдвига, а касательные напряжения — удлинений. При этом обобщенный закон Гука имеет вид

$$\epsilon_1^i = \frac{\sigma_1^i}{E_1^i} - \mu_{12}^i \frac{\sigma_2^i}{E_2^i}, \quad \epsilon_2^i = \frac{\sigma_2^i}{E_2^i} - \mu_{21}^i \frac{\sigma_1^i}{E_1^i}, \quad \gamma_{12}^i = \frac{\tau_{12}^i}{G_{12}^i}. \quad (12.1)$$

Здесь E_1^i, E_2^i, G_{12}^i — модули упругости в направлении осей x_1^i, x_2^i и модуль сдвига слоя с номером i ; μ_{12}^i и μ_{21}^i — коэффициенты Пуассона, характеризующие сокращение материала соответственно

вдоль осей x_1^i и x_2^i при растяжении вдоль осей x_2^i и x_1^i . Имеет место следующее условие симметрии:

$$\frac{\mu_{12}^i}{E_2^i} = \frac{\mu_{21}^i}{E_1^i}. \quad (12.2)$$

Это условие имеет простой физический смысл: чем жестче материал в данном направлении, тем меньше он сокращается при растяжении в ортогональном направлении. Разрешая соотношения (12.1) относительно напряжений с учетом (12.2), получим

$$\begin{aligned} \sigma_1^i &= \bar{E}_1^i (e_1^i + \mu_{12}^i e_2^i), & \sigma_2^i &= \bar{E}_2^i (e_2^i + \mu_{21}^i e_1^i), \\ \tau_{12}^i &= G_{12}^i \gamma_{12}^i, & \bar{E}_{1,2}^i &= E_{1,2}^i / (1 - \mu_{12}^i \mu_{21}^i). \end{aligned} \quad (12.3)$$

В соотношения (12.1) или (12.3) входят четыре независимых упругих постоянных — E_1^i , E_2^i , G_{12}^i и, например, μ_{12}^i [μ_{21}^i тогда определяется из равенства (12.2)].

Получим теперь статические соотношения для слоя, связывающие величины напряжений в осях (x_1^i, x_2^i) и (x, y) — рис. 12.3, а). Из условий равновесия элементов, показанных на рис. 12.3, б, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= \sigma_1^i \cos^2 \varphi_i + \sigma_2^i \sin^2 \varphi_i - \tau_{12}^i \sin 2\varphi_i, \\ \sigma_y^i &= \sigma_1^i \sin^2 \varphi_i + \sigma_2^i \cos^2 \varphi_i + \tau_{12}^i \sin 2\varphi_i, \\ \tau_{xy}^i &= (\sigma_1^i - \sigma_2^i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i + \tau_{12}^i \cos 2\varphi_i. \end{aligned} \quad (12.4)$$

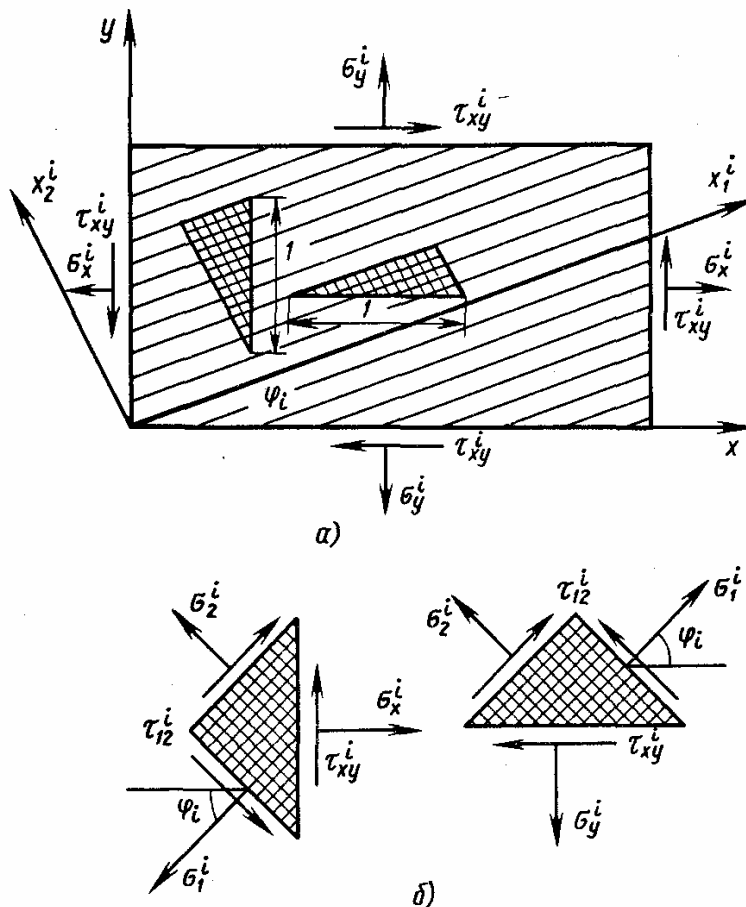
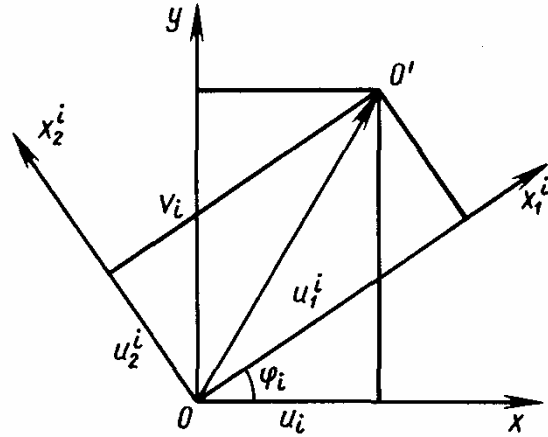


Рис. 12.3. Слой в координатах (x, y) (а) и выделенные из него элементы (б)

Обратные соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_1^i &= \sigma_x^i \cos^2 \varphi_i + \sigma_y^i \sin^2 \varphi_i + \\ &\quad + \tau_{xy}^i \sin 2\varphi_i, \\ \sigma_2^i &= \sigma_x^i \sin^2 \varphi_i + \sigma_y^i \cos^2 \varphi_i - \\ &\quad - \tau_{xy}^i \sin 2\varphi_i, \quad (12.5) \\ \tau_{12}^i &= (\sigma_y^i - \sigma_x^i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i + \\ &\quad + \tau_{xy}^i \cos 2\varphi_i.\end{aligned}$$



Отметим, что равенства (12.4) и (12.5) являются частной формой записи формул (1.10) первой главы, определяющих преобразование компонент тензора напряжений при повороте осей координат.

Рис. 12.4. Перемещения точки в координатах (x_1^i, x_2^i) и (x, y)

Выведем формулы, позволяющие выразить относительные деформации, заданные в координатной системе x_1^i, x_2^i , через деформации, заданные в системе координат x, y . Относительные деформации слоя с номером i выражаются через перемещение u_i вдоль оси x и перемещение v_i вдоль оси y формулами (1.3), т. е.

$$\epsilon_x^i = \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad \epsilon_y^i = \frac{\partial v_i}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^i = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x}. \quad (12.6)$$

Свяжем $\epsilon_x^i, \epsilon_y^i, \gamma_{xy}^i$ с деформациями i -го слоя в координатах x_1^i, x_2^i , т. е. с $\epsilon_1^i, \epsilon_2^i, \gamma_{12}^i$. Аналогично (12.6) имеем

$$\epsilon_1^i = \frac{\partial u_1^i}{\partial x_1^i}, \quad \epsilon_2^i = \frac{\partial u_2^i}{\partial x_2^i}, \quad \gamma_{12}^i = \frac{\partial u_1^i}{\partial x_2^i} + \frac{\partial u_2^i}{\partial x_1^i}. \quad (12.7)$$

Пусть точка O переместилась в положение O' (рис. 12.4). Тогда координаты точки O' в осях x, y и x_1^i, x_2^i связаны следующим образом:

$$x = x_1^i \cos \varphi_i - x_2^i \sin \varphi_i, \quad y = x_1^i \sin \varphi_i + x_2^i \cos \varphi_i. \quad (12.8)$$

Аналогичными равенствами связаны проекции перемещения точки O на оси x, y и x_1^i, x_2^i :

$$\begin{aligned}u_i &= u_1^i \cos \varphi_i - u_2^i \sin \varphi_i, & u_1^i &= u_i \cos \varphi_i + v_i \sin \varphi_i, \\ v_i &= u_1^i \sin \varphi_i + u_2^i \cos \varphi_i, & u_2^i &= v_i \cos \varphi_i - u_i \sin \varphi_i.\end{aligned} \quad (12.9)$$

Заменим в соотношениях (12.7) u_1^i и u_2^i через u_i и v_i с помощью (12.9) и перейдем от переменных x_1^i, x_2^i к переменным x, y . На

основании правил дифференцирования сложных функций и равенства (12.8), например, для ϵ_1^i с учетом (12.6) имеем

$$\begin{aligned}\epsilon_1^i &= \frac{\partial u_i}{\partial x_1^i} \cos \varphi_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_1^i} \sin \varphi_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1^i} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_1^i} \right) \cos \varphi_i + \\ &+ \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1^i} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_1^i} \right) \sin \varphi_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} \cos^2 \varphi_i + \frac{\partial v_i}{\partial y} \sin^2 \varphi_i + \\ &+ \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \sin \varphi_i \cos \varphi_i = \epsilon_x^i \cos^2 \varphi_i + \epsilon_y^i \sin^2 \varphi_i + \gamma_{xy}^i \sin \varphi_i \cos \varphi_i.\end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получим геометрические соотношения

$$\begin{aligned}\epsilon_1^i &= \epsilon_x^i \cos^2 \varphi_i + \epsilon_y^i \sin^2 \varphi_i + \gamma_{xy}^i \sin \varphi_i \cos \varphi_i, \\ \epsilon_2^i &= \epsilon_x^i \sin^2 \varphi_i + \epsilon_y^i \cos^2 \varphi_i - \gamma_{xy}^i \sin \varphi_i \cos \varphi_i, \\ \gamma_{12}^i &= (\epsilon_y^i - \epsilon_x^i) \sin 2\varphi_i + \gamma_{xy}^i \cos 2\varphi_i.\end{aligned}\quad (12.10)$$

Отметим, что равенства (12.10) являются частной формой записи формул (1.4) первой главы, определяющих изменение компонент тензора деформаций при повороте осей координат.

Вернемся теперь к слоистому материалу, показанному на рис. 12.1. Пусть по его сторонам действуют средние напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , отнесенные к суммарной толщине пакета h . Эти напряжения можно представить в виде суммы соответствующих напряжений, приходящихся на каждый слой, т. е.

$$\sigma_x h = \sum_{i=1}^k h_i \sigma_x^i, \quad \sigma_y h = \sum_{i=1}^k h_i \sigma_y^i, \quad \tau_{xy} h = \sum_{i=1}^k h_i \tau_{xy}^i.$$

Вводя относительную толщину слоя $\bar{h}_i = h_i/h$, получим

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^k \bar{h}_i \sigma_x^i, \quad \sigma_y = \sum_{i=1}^k \bar{h}_i \sigma_y^i, \quad \tau_{xy} = \sum_{i=1}^k \bar{h}_i \tau_{xy}^i. \quad (12.11)$$

Подставим равенства (12.4) в (12.11)

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sum_{i=1}^k \bar{h}_i (\sigma_1^i \cos^2 \varphi_i + \sigma_2^i \sin^2 \varphi_i - \tau_{12}^i \sin 2\varphi_i), \\ \sigma_y &= \sum_{i=1}^k \bar{h}_i (\sigma_1^i \sin^2 \varphi_i + \sigma_2^i \cos^2 \varphi_i + \tau_{12}^i \sin 2\varphi_i), \\ \tau_{xy} &= \sum_{i=1}^k \bar{h}_i [(\sigma_1^i - \sigma_2^i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i + \tau_{12}^i \cos 2\varphi_i].\end{aligned}\quad (12.12)$$

Получили соотношения, связывающие средние напряжения слоистого материала с напряжениями в слоях и параметрами структуры.

Заменяем теперь в соотношениях (12.12) компоненты напряжения $\sigma_1^i, \sigma_2^i, \tau_{12}^i$ через составляющие деформации $\epsilon_1^i, \epsilon_2^i, \gamma_{12}^i$ с помощью закона Гука (12.3), а компоненты деформации $\epsilon_1^i, \epsilon_2^i, \gamma_{12}^i$ — через составляющие деформации $\epsilon_x^i, \epsilon_y^i, \gamma_{xy}^i$ согласно равенствам (12.10). Предварительно введем условия совместной деформации слоев. Полагая, что слои работают без взаимного проскальзывания и отрыва, примем, что $\epsilon_x^i = \epsilon_x, \epsilon_y^i = \epsilon_y, \gamma_{xy}^i = \gamma_{xy}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, k$). Окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_x &= B_{11}\epsilon_x + B_{12}\epsilon_y + B_{13}\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= B_{12}\epsilon_x + B_{22}\epsilon_y + B_{23}\gamma_{xy}, \\ \tau_{xy} &= B_{31}\epsilon_x + B_{32}\epsilon_y + B_{33}\gamma_{xy}.\end{aligned}\quad (12.13)$$

Здесь

$$B_{mn} = \sum_{i=1}^k h_i B_{mn}^i \quad (m, n = 1, 2, 3); \quad (12.14)$$

$$\begin{aligned}B_{11}^i &= \bar{E}_1^i \cos^4 \varphi_i + 2\bar{E}_1^i \mu_{12}^i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i \sin^4 \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i; \\ B_{12}^i &= B_{21}^i = (\bar{E}_1^i + \bar{E}_2^i) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_1^i \mu_{12}^i \times \\ &\quad \times (\sin^4 \varphi_i + \cos^4 \varphi_i) - G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i; \\ B_{22}^i &= \bar{E}_1^i \sin^4 \varphi_i + 2\bar{E}_1^i \mu_{12}^i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i \cos^4 \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i; \\ B_{13}^i &= B_{31}^i = \sin \varphi_i \cos \varphi_i [\bar{E}_1^i (1 - \mu_{12}^i) \cos^2 \varphi_i - \\ &\quad - \bar{E}_2^i (1 - \mu_{21}^i) \sin^2 \varphi_i - 2G_{12}^i \cos 2\varphi_i], \\ B_{23}^i &= B_{32}^i = \sin \varphi_i \cos \varphi_i [\bar{E}_1^i (1 - \mu_{12}^i) \sin^2 \varphi_i - \\ &\quad - \bar{E}_2^i (1 - \mu_{21}^i) \cos^2 \varphi_i + 2G_{12}^i \cos 2\varphi_i], \\ B_{23}^i &= (\bar{E}_1^i + \bar{E}_2^i - 2\bar{E}_{12}^i) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12}^i \cos^2 2\varphi_i.\end{aligned}\quad (12.15)$$

В общем случае слоистый материал не является ортотропным: из равенств (12.13) следует, что деформация сдвига γ_{xy} вызывает нормальные напряжения, а удлинения ϵ_x и ϵ_y вызывают касательные напряжения. На практике материалы с такой общей структурой используются редко. Для технических приложений наибольший интерес представляет симметричная схема укладки слоев, при которой каждому слою, армированному под углом $+\varphi_i$, соответствует такой же слой с углом армирования $-\varphi_i$ (рис. 12.5). В этом случае в суммах (12.4) коэффициенты $B_{13}^i = B_{31}^i$ и $B_{23}^i = B_{32}^i$, соответствующие слоям с относительной толщиной h_i и углами $\pm\varphi_i$, взаимно уничтожаются. В результате для симметричной структуры $B_{13} = B_{31} = B_{23} = B_{32} = 0$ и равенства (12.13) принимают вид

$$\sigma_x = B_{11}\epsilon_x + B_{12}\epsilon_y, \quad \sigma_y = B_{21}\epsilon_x + B_{22}\epsilon_y, \quad \tau_{xy} = B_{33}\gamma_{xy}.$$

Выразим деформации и запишем полученные соотношения в форме, аналогичной закону Гука (12.1)

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{xy} \frac{\sigma_y}{E_y}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{yx} \frac{\sigma_x}{E_x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad (12.16)$$

$$\text{или } \sigma_x = \bar{E}_x (\varepsilon_x + \mu_{xy} \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \bar{E}_y (\varepsilon_y + \mu_{yx} \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G_{xy} \gamma_{xy}, \quad (12.17)$$

$$\text{где } E_x = B_{11} - \frac{B_{12}^2}{B_{22}}, \quad E_y = B_{22} - \frac{B_{12}^2}{B_{11}},$$

$$G_{xy} = B_{33}, \quad \mu_{xy} = \frac{B_{12}}{B_{11}}, \quad \mu_{yx} = \frac{B_{12}}{B_{22}}, \quad (12.18)$$

$$\bar{E}_x = \frac{E_x}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}} = B_{11}, \quad \bar{E}_y = \frac{E_y}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}} = B_{22}.$$

Из равенств (12.16) следует, что рассматриваемый материал является ортотропным. Величины E_x , E_y , G_{xy} , μ_{xy} , μ_{yx} являются эффективными модулями упругости и коэффициентами Пуассона слоистого композиционного материала. Для их определения необходимо знать структуру пакета, т. е. число слоев k , толщины h_i , углы армирования φ_i и упругие свойства материала всех слоев E_1^i , E_2^i , G_{12}^i , μ_{12}^i , μ_{21}^i . Далее по формулам (12.14), (12.15) находятся коэффициенты жесткости B_{11} , B_{12} , B_{22} , B_{33} и по формулам (12.18) определяются упругие постоянные. Если в слоистом пакете имеются изотропные слои (например, металлические), для них следует принять $E_1^i = E_2^i = E_i$, $\mu_{12}^i = \mu_{21}^i = \mu_i$, $G_{12}^i = G_i = E_i/2(1 + \mu_i)$. При этом из равенств (12.15) получим $B_{11}^i = B_{22}^i = E_i/(1 - \mu_i^2)$, $B_{12}^i = \mu_i E_i/(1 - \mu_i^2)$, $B_{33} = E_i/2(1 + \mu_i)$.

В качестве примера найдем эффективные упругие постоянные пакета, образованного из материала с упругими постоянными E_1 , E_2 , G_{12} , μ_{12} , μ_{21} и состоящего из двух слоев (рис. 12.6) — продольного с параметрами $\bar{h}_1 = \bar{h}_0$, $\varphi_1 = 0$ и поперечного с пара-

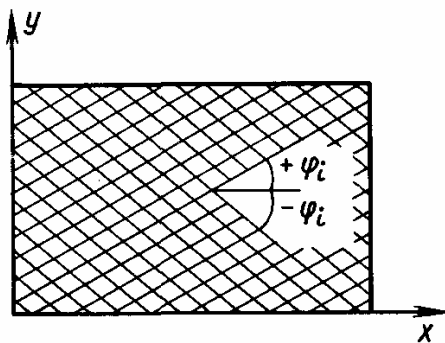


Рис. 12.5. Симметричная схема расположения слоев

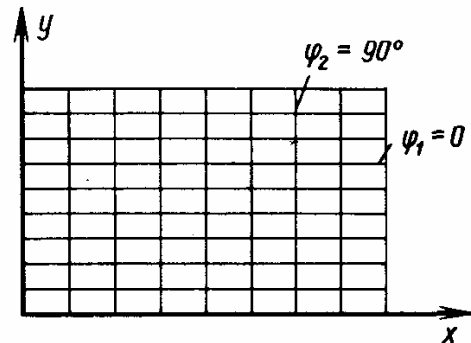


Рис. 12.6. Ортогонально армированный материал

метрами $\bar{h}_2 = \bar{h}_{90}$, $\varphi = 90^\circ$ ($\bar{h}_0 + \bar{h}_{90} = 1$). Определим обобщенные жесткости B_{mn}

$$B_{11} = \bar{h}_0 \bar{E}_1 + \bar{h}_{90} \bar{E}_2,$$

$$B_{12} = \bar{h}_0 \mu_{12} \bar{E}_1 + \bar{h}_{90} \mu_{12} \bar{E}_2 = \mu_{12} \bar{E}_1 = \mu_{21} \bar{E}_2,$$

$$B_{22} = \bar{h}_0 \bar{E}_2 + \bar{h}_{90} \bar{E}_1, \quad B_{33} = \bar{h}_0 G_{12} + \bar{h}_{90} G_{12} = G_{12}.$$

Подставляя B_{ij} в равенства (12.18), получим

$$E_x = \bar{E}_1 \bar{h}_0 + \bar{E}_2 \bar{h}_{90} - \frac{\bar{E}_1^2 \mu_{12}^2}{\bar{E}_2 \bar{h}_0 + \bar{E}_1 \bar{h}_{90}},$$

$$E_y = \bar{E}_2 \bar{h}_0 + \bar{E}_1 \bar{h}_{90} - \frac{\bar{E}_2^2 \mu_{21}^2}{\bar{E}_1 \bar{h}_0 + \bar{E}_2 \bar{h}_{90}}, \quad G_{xy} = G_{12},$$

$$\mu_{xy} = \frac{\mu_{12} \bar{E}_1}{\bar{E}_1 \bar{h}_0 + \bar{E}_2 \bar{h}_{90}}, \quad \mu_{yx} = \frac{\mu_{21} \bar{E}_2}{\bar{E}_2 \bar{h}_0 + \bar{E}_1 \bar{h}_{90}}.$$

Отметим, что суммарная жесткость пакета при растяжении оказывается меньше суммы жесткостей слоев. Это обстоятельство связано с эффектом Пуассона. За счет этого эффекта первый слой при растяжении в продольном направлении сжимается в поперечном направлении. Связанный с ним второй слой при этом удлиняется в продольном направлении и дополнительно растягивает первый слой, что и приводит к снижению жесткости.

Более полные сведения о свойствах композиционных структур содержатся в книге [24].

12.1.2. Стержни из композиционного материала*

Высокопрочные и высокомодульные композиционные материалы успешно применяются для изготовления слоистых стержней и усиления металлических профилей, работающих на растяжение, сжатие и изгиб. Согласно закону плоских сечений, используемому при расчете стержней, сечение стержня при изгибе остается плоским и перпендикулярным нейтральной оси, находящейся на расстоянии e от нижней кромки (рис. 12.7). Продольные перемещения распределяются по высоте стержня по линейному закону аналогичному (1.32), т. е.

$$u = u_0 - \eta v'.$$

Здесь $u_0(x)$ — осевое перемещение точек нейтральной оси; $v(x)$ — прогиб. Относительная деформация в продольном направлении определяется равенством

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = u_0' - \eta v'',$$

* Здесь и далее стержни из композиционного материала для упрощения будем называть композиционными стержнями.

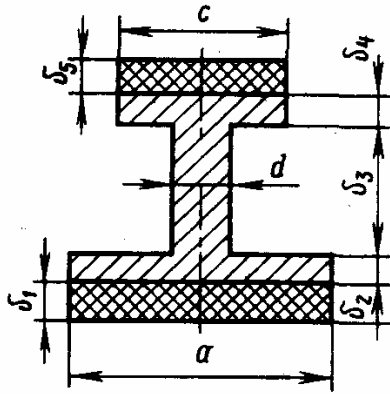


Рис. 12.8. Сечение металлического стержня, усиленного накладками из композиционного материала

Таким образом, соотношения (12.20) и (12.21) принимают вид

$$M = -Dv'', \quad N = Bu'_0, \quad (12.26)$$

где с учетом (12.25)

$$D = I_2 = \int_0^h E_x b (y - e)^2 dy = C_2 - 2eC_1 + e^2 I_0 = C_2 - \frac{C_1^2}{I_0}, \quad (12.27)$$

$$B = I_0, \quad C_2 = \int_0^h E_x b y^2 dy.$$

Из равенств (12.19) и (12.26) получим следующее распределение напряжений:

$$\sigma_x = E_x \left[\frac{N}{B} + \frac{M}{D} (y - e) \right].$$

Здесь B и D — жесткости стержня при растяжении-сжатии и изгибе, которые так же, как и координата нейтральной оси e , выражаются через характеристики сечения I_0 , C_1 , C_2 .

В полученных соотношениях предполагалось, что ширина стержня и модуль упругости E_x произвольно изменяются по высоте, т. е. $b = b(y)$, $E_x = E_x(y)$. Рассмотрим некоторые частные случаи. Предположим, что $b = \text{const}$ и $E_x = \text{const}$. Тогда из равенств (12.22), (12.24), (12.25) и (12.27) имеем

$$B = I_0 = bhE_x, \quad C_1 = \frac{1}{2}bh^2E_x, \quad C_2 = \frac{1}{3}bh^3E_x,$$

$$e = \frac{h}{2}, \quad D = E_x \frac{bh^3}{12},$$

т. е. в однородном стержне нейтральная ось располагается на середине высоты. Аналогичный результат ($e = 0,5h$) получается и в случае, когда сечение симметрично относительно средней линии $y = 0,5h$.

Рассмотрим общий случай слоистого стержня (см. рис. 12.7). Имеем

$$\begin{aligned} B = I_0 &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} E_x^i b_i dy = \sum_{i=1}^n E_x^i b_i \int_{y_{i-1}}^{y_i} dy = \sum_{i=1}^n E_x^i b_i (y_i - y_{i-1}), \\ C_1 &= \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} E_x^i b_i y dy = \sum_{i=1}^n E_x^i b_i \int_{y_{i-1}}^{y_i} y dy = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_x^i b_i (y_i^2 - y_{i-1}^2), \end{aligned} \quad (12.28)$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} E_x^i b_i y^2 dy = \sum_{i=1}^n E_x^i b_i \int_{y_{i-1}}^{y_i} y^2 dy = \\ = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n E_x^i b_i (y_i^3 - y_{i-1}^3).$$

Здесь n — число слоев; E_x^i , b_i — модуль упругости и ширина i -го слоя; y_i — расстояние от нижней кромки сечения до верхней кромки i -го слоя, причем $y_0 = 0$, а $y_n = h$ (см. рис. 12.7); e и D определяются равенствами (12.25), (12.27). В качестве примера рассмотрим металлический стержень из материала с модулем упругости E_m , усиленный снизу и сверху накладками из композиционных материалов с модулями упругости $E_{к1}$ и $E_{к2}$ (рис. 12.8). В формулах для I_0 , C_1 , C_2 следует принять $y_0 = 0$; $y_1 = \delta_1$, $b_1 = a$, $E_x^1 = E_{к1}$; $y_2 = \delta_1 + \delta_2$, $b_2 = a$, $E_x^2 = E_m$; $y_3 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$, $b_3 = d$, $E_x^3 = E_m$; $y_4 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$, $b_4 = c$, $E_x^4 = E_m$; $y_5 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5$, $b_5 = c$, $E_x^5 = E_{к2}$. Уравнение изгиба композиционной балки поперечной нагрузкой имеет вид, аналогичный (1.37), т. е.

$$(Dv'')'' = q.$$

Здесь D — изгибная жесткость слоистой балки, определяемая равенством (12.27). Уравнение устойчивости стержня, сжатого осевой силой P , записывается в форме, аналогичной (9.12), т. е.

$$Dv^{IV} + Pv'' = 0.$$

В частности, критическая сила для шарнирно опертого по концам стержня с длиной l определяется равенством, аналогичным (9.14)

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 D}{l^2}.$$

Таким образом, слоистые стержни рассчитываются так же, как и однородные, только предварительно следует найти коэффициенты (12.28).

12.1.3. Панели из композиционного материала

Плоские панели, образованные из совокупности ориентированных различным образом композиционных слоев, обладают высокой удельной прочностью и жесткостью и используются в качестве элементов обшивки летательных аппаратов различного назначения.

Рассмотрим плоское напряженное состояние (см. разд. 3.2.1 и рис. 3.4). Усилия $N_x = \sigma_x h$, $N_y = \sigma_y h$, $N_{xy} = \tau_{xy} h$ связаны уравнениями равновесия (3.28), т. е.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (12.29)$$

Геометрические соотношения по-прежнему имеют форму (3.31), т. е.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (12.30)$$

а физические соотношения (3.30) должны быть изменены в соответствии с равенствами (12.17)

$$N_x = \bar{E}_x h (\varepsilon_x + \mu_{xy} \varepsilon_y), \quad N_y = \bar{E}_y h (\varepsilon_y + \mu_{yx} \varepsilon_x), \quad (12.31)$$

$$N_{xy} = G_{xy} \gamma_{xy}.$$

Подставляя выражения для деформаций (12.30) в соотношения (12.31), а полученные выражения для усилий — в уравнения равновесия (12.29), можно записать два уравнения относительно двух функций перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Решая эти уравнения, можно найти функции u и v и далее по формулам (12.30) — величины деформаций пакета ε_x , ε_y , γ_{xy} . По средним значениям деформаций определяются согласно соотношениям (12.10) величины деформаций ε_1^i , ε_2^i , γ_{12}^i для каждого слоя, а по закону Гука (12.3) находятся значения напряжений в осях ортотропии слоев.

Рассмотрим изгиб композиционных панелей поперечной нагрузкой $q(x, y)$ (см. разд. 3.3 и рис. 3.8). Композиционные пластины имеют слоистую структуру (см. рис. 12.1), причем, как правило, число элементарных слоев достаточно велико (толщина слоя имеет порядок 10^{-4} м), а слои с различными углами (например, 0 , 90° и $\pm 45^\circ$) равномерно распределены по толщине. Такую пластину можно приближенно считать однородной по толщине и обладающей средними упругими постоянными E_x , E_y , G_{xy} , μ_{xy} , μ_{yx} , которые определяются равенствами (12.18). При этом срединная плоскость является нейтральной (аналогично нейтральной оси балки в разд. 12.2) и перемещения u и v вдоль осей x и y выражаются через прогиб пластины $w(x, y)$ формулами (3.53), т. е.

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (12.32)$$

Здесь — $h/2 \leq z \leq h/2$ — расстояние от срединной плоскости точки, перемещения которой определяются равенствами (12.32). Относительные деформации согласно (12.32) имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (12.33)$$

Напряжения в пластине определяются законом Гука (12.17) откуда с учетом равенств (12.33) получим

$$\sigma_x = -z\bar{E}_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$\sigma_y = -z\bar{E}_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$\tau_{xy} = -2zG_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Таким образом, напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} линейно распределены по толщине пластины, т. е. сводятся к изгибающим и крутящим моментам

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (12.34)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где $D_x = \frac{\bar{E}_x h^3}{12}$, $D_y = \frac{\bar{E}_y h^3}{12}$, $D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12}$

— изгибные и крутильная жесткости пластины. Равенства (12.34) обобщают соотношения (3.58) на случай ортотропной пластины. Уравнение равновесия, которое не зависит от свойств материала, имеет известную форму (3.61), т. е.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражения (12.34), получим основное уравнение теории изгиба ортотропных пластин

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(\mu_{xy} D_x + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y). \quad (12.35)$$

Для расчета композиционной панели, изгибаемой поперечной нагрузкой q , необходимо найти из уравнения (12.35) функцию прогиба пластины $w(x, y)$, удовлетворяющую граничным условиям, затем по формулам (12.33) определить значения деформаций ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} и согласно равенствам (12.10), (12.3) — величины напряжений σ_1^i , σ_2^i , τ_{12}^i во всех слоях. При этом для i -го слоя сле-

дует принять $z = z_i$, где z_i — расстояние i -го слоя от срединной плоскости пластины.

Решение уравнения (12.35) находится так же, как и решение уравнения (3.62), описывающего прогиб изотропной пластины. В частности, для шарнирно опертой по всем сторонам пластины (см. рис. 3.10, б), представляя величину прогиба в форме ряда (3.79), окончательно получим

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y}{ab D_{mn}} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \times \\ \times \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y dx dy,$$

где $D_{mn} = D_x \lambda_m^4 + 2(\mu_{xy} D_x + 2D_{xy}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + D_y \lambda_n^4$,

$$\lambda_m = \pi m/a, \quad \lambda_n = \pi n/b. \quad (12.36)$$

Рассмотрим устойчивость композиционных панелей. Уравнение устойчивости, обобщающее (9.39), имеет следующий вид:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(\mu_{xy} D_x + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \\ + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Метод решения полностью аналогичен изложенному в разд. 9.3.2. В частности, для шарнирно опертой по всем сторонам пластины, сжатой в одном направлении усилиями N_x^0 (см. рис. 9.7), получим следующий результат, обобщающий (9.45):

$$N_{кр} = \frac{2\pi^2}{b^2} \sqrt{D_x D_y} \left(1 + \frac{\mu_{xy} D_x + 2D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} \right).$$

12.2. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА МНОГОСЛОЙНЫХ И ПОДКРЕПЛЕННЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

12.2.1. Соотношения упругости для слоистых оболочек

Уравнения общей теории оболочек, полученные в разд. 4.1.3, включали геометрические соотношения (4.10), (4.12), (4.13) и уравнения равновесия (4.17), (4.18), которые не зависят от свойств материала, а также соотношения упругости (4.16), которые должны быть записаны с учетом ортотропии и слоистого характера материала. Пусть стенка оболочки образована из n ортотропных слоев (рис. 12.9). В случае произвольного расположения слоев по толщине срединная поверхность (см. разд. 4.1.1 и рис. 4.1) утрачивает свои преимущества, поэтому будем отсчитывать нормальную координату y от внутренней

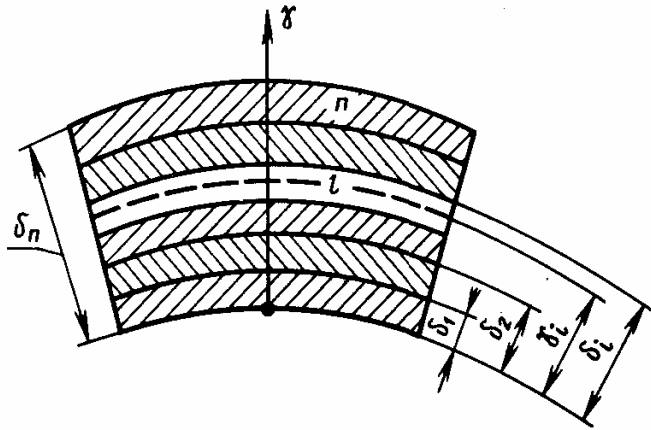


Рис. 12.9. Структура стенки слоистой оболочки

поверхности оболочки, которую назовем начальной поверхностью. Обозначим через δ_i (см. рис. 12.9) расстояние от начальной поверхности до наружной поверхности i -го слоя, причем $\delta_0 = 0$. Тогда для i -го слоя, в пределах которого свойства материала будем считать не изменяющимися, координата γ изменяется в пределах $\delta_{i-1} \leq \gamma_i \leq \delta_i$.

Будем считать слои ортотропными, т. е. симметрично армированными (см. рис. 12.5). Тогда физические соотношения для i -го слоя могут быть получены путем подстановки компонент деформаций $\epsilon_1^i, \epsilon_2^i, \gamma_{12}^i$ (12.10) в формулы закона Гука (12.3), а найденных напряжений $\sigma_1^i, \sigma_2^i, \tau_{12}^i$ — в соотношения (12.4). Меняя индексы x и y на α и β , окончательно получим

$$\sigma_\alpha^i = B_{11}^i \epsilon_\alpha^i + B_{12}^i \epsilon_\beta^i, \quad (12.37)$$

$$\sigma_\beta^i = B_{21}^i \epsilon_\alpha^i + B_{22}^i \epsilon_\beta^i,$$

$$\tau_{\alpha\beta}^i = B_{33}^i \gamma_{\alpha\beta}^i.$$

Коэффициенты B_{mn}^i определяются равенствами (12.15).

В соответствии с гипотезами Кирхгофа (см. разд. 4.1.3) деформации распределяются по толщине оболочки по линейному закону (4.11). В частности, для i -го слоя имеем

$$\epsilon_\alpha^i = \epsilon_\alpha^0 + \gamma_i \kappa_\alpha, \quad \epsilon_\beta^i = \epsilon_\beta^0 + \gamma_i \kappa_\beta, \quad \gamma_{\alpha\beta}^i = \gamma_{\alpha\beta}^0 + \gamma_i \kappa_{\alpha\beta}. \quad (12.38)$$

Здесь $\epsilon_\alpha^0, \epsilon_\beta^0, \gamma_{\alpha\beta}^0$ и $\kappa_\alpha, \kappa_\beta, \kappa_{\alpha\beta}$ — компоненты деформаций и изменения характеристик кривизны начальной поверхности, которые определяются равенствами (4.12), (4.13).

Подставляя (12.38) в соотношения (12.37), получим следующие равенства, аналогичные (4.14):

$$\sigma_\alpha^i = B_{11}^i \epsilon_\alpha^0 + B_{12}^i \epsilon_\beta^0 + \gamma_i (B_{11}^i \kappa_\alpha + B_{12}^i \kappa_\beta),$$

$$\sigma_\beta^i = B_{21}^i \epsilon_\alpha^0 + B_{22}^i \epsilon_\beta^0 + \gamma_i (B_{21}^i \kappa_\alpha + B_{22}^i \kappa_\beta), \quad (12.39)$$

$$\tau_{\alpha\beta}^i = B_{33}^i (\gamma_{\alpha\beta}^0 + \gamma_i \kappa_{\alpha\beta}).$$

Введем теперь усилия и моменты (см. рис. 4.3) по формулам, аналогичным (4.15), т. е.

$$\begin{aligned}
 N_\alpha &= \sum_{i=1}^n \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \sigma_\alpha^i d\gamma_i, & N_\beta &= \sum_{i=1}^n \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \sigma_\beta^i d\gamma_i, & N_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^n \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \tau_{\alpha\beta}^i d\gamma_i, \\
 M_\alpha &= \sum_{i=1}^n \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \sigma_\alpha^i \gamma_i d\gamma_i, & M_\beta &= \sum_{i=1}^n \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \sigma_\beta^i \gamma_i d\gamma_i, & \\
 M_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^n \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \tau_{\alpha\beta}^i \gamma_i d\gamma_i.
 \end{aligned} \tag{12.40}$$

Подставляя выражения для напряжений (12.39) в формулы (12.40) и осуществляя интегрирование, окончательно получим

$$\begin{aligned}
 N_\alpha &= C_{11}\epsilon_\alpha^0 + C_{12}\epsilon_\beta^0 + K_{11}\kappa_\alpha + K_{12}\kappa_\beta, \\
 N_\beta &= C_{21}\epsilon_\alpha^0 + C_{22}\epsilon_\beta^0 + K_{21}\kappa_\alpha + K_{22}\kappa_\beta, \\
 N_{\alpha\beta} &= C_{33}\gamma_{\alpha\beta}^0 + K_{33}\kappa_{\alpha\beta}, \\
 M_\alpha &= K_{11}\epsilon_\alpha^0 + K_{12}\epsilon_\beta^0 + D_{11}\kappa_\alpha + D_{12}\kappa_\beta, \\
 M_\beta &= K_{21}\epsilon_\alpha^0 + K_{22}\epsilon_\beta^0 + D_{21}\kappa_\alpha + D_{22}\kappa_\beta, \\
 M_{\alpha\beta} &= K_{33}\gamma_{\alpha\beta}^0 + D_{33}\kappa_{\alpha\beta}.
 \end{aligned} \tag{12.41}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 C_{lm} &= C_{ml} = \sum_{i=1}^n B_{ml}^i (\delta_i - \delta_{i-1}), \\
 K_{lm} &= K_{ml} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n B_{ml}^i (\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2),
 \end{aligned} \tag{12.42}$$

$$D_{lm} = D_{ml} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n B_{ml}^i (\delta_i^3 - \delta_{i-1}^3) \quad (lm = 11, 12, 22, 33).$$

Параметры жесткости C_{lm} называются мембранными, K_{lm} — смешанными, а D_{lm} — изгибными.

Заменяя соотношениями (12.41) соотношения упругости (4.16) для изотропной оболочки и добавляя геометрические и статические уравнения (4.10), (4.12), (4.13) и (4.17), (4.18), получим полную систему уравнений общей теории ортотропных слоистых оболочек. Решение осуществляется методами, изложенными в гл. 4. В частности, для получения уравнений безмоментной теории оболочек в (12.41) следует принять $K_{lm} = D_{lm} = 0$.

12.2.2. Соотношения упругости для подкрепленных оболочек

Оболочки и пластины, подкрепленные параллельными ребрами — стрингерами, являются типовыми элементами конструкции планера летательного аппарата. Подкрепляющий набор значительно увеличивает общую и местную жесткость панели, отсека корпуса или секции крыла, повышает сопротивляемость потере устойчивости. При некоторых упрощающих предположениях соотношения упругости для подкрепленных оболочек можно привести к форме (12.41), т. е. использовать для их расчета уравнения и методы решения, приведенные в предшествующих главах применительно к гладким пластинам и оболочкам. Примем следующие гипотезы.

1. Будем считать, что элементы набора являются одинаковыми и расположены настолько часто, что их можно заменить системой сплошных слоев, обладающих некоторыми приведенными свойствами.

2. Предположим, что для оболочки с распределенными таким образом ребрами справедливы гипотезы Кирхгофа о жестком нормальном элементе (см. разд. 3.1.1, 4.1.3).

3. Будем считать, что ребра воспринимают только продольные напряжения, т. е. жесткость оболочки на сдвиг определяется обшивкой.

Для конкретности рассмотрим оболочку, показанную на рис. 12.10 и образованную из обшивки и тавровых ребер. За начальную поверхность примем внутреннюю поверхность обшивки и введем три слоя — один реальный, представляющий собой обшивку, и два условных, показанных пунктиром. Пусть ребра параллельны оси α . Тогда в формулах (12.15) для коэффициентов жесткости B_{mn} следует принять: слой 1 — $E_1^1 = E_2^1 = E$, $\mu_{12}^1 = \mu$, $G_{12}^1 = E/2(1 + \mu)$ (E и μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона обшивки), т. е.

$$B_{11}^1 = B_{22}^1 = \frac{E}{1 - \mu^2}, \quad B_{12}^1 = \frac{\mu E}{1 - \mu^2}, \quad B_{33}^1 = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (12.43)$$

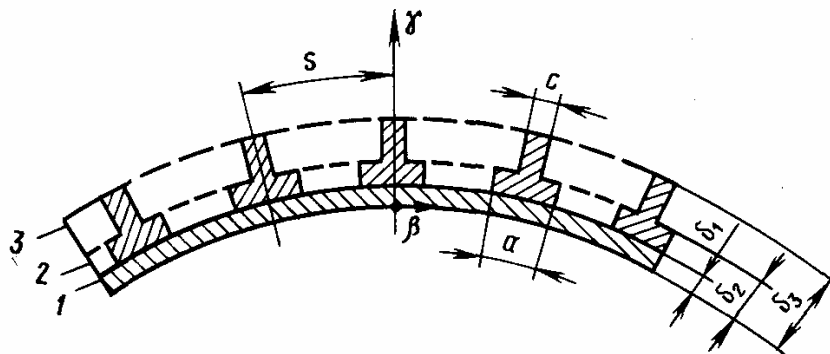


Рис. 12.10. Структура стенки подкрепленной оболочки

слой 2 — $\varphi_2 = 0$, $E_1^2 = E_p a/s$ (E_p — модуль упругости ребер, $E_2^2 = 0$, $\mu_{12}^2 = 0$, $G_{12}^2 = 0$, т. е.

$$B_{11}^2 = \frac{E_p a}{s}, \quad B_{22}^2 = 0, \quad B_{12}^2 = 0, \quad B_{33}^2 = 0; \quad (12.44)$$

слой 3 — $\varphi_3 = 0$, $E_1^3 = E_p c/s$, $E_2^3 = 0$, $\mu_{12}^3 = 0$, $G_{12}^3 = 0$, т. е.

$$B_{11}^3 = \frac{E_p c}{s}, \quad B_{22}^3 = 0, \quad B_{12}^3 = 0, \quad B_{33}^3 = 0. \quad (12.45)$$

Жесткости (12.42) с учетом (12.43)—(12.45) принимают вид

$$C_{11} = \frac{E\delta_1}{1-\mu^2} + \frac{E_p}{s} [a(\delta_2 - \delta_1) + c(\delta_3 - \delta_2)];$$

$$C_{12} = \frac{\mu E\delta_1}{1-\mu^2}, \quad C_{22} = \frac{E\delta_1}{1-\mu^2}, \quad C_{33} = \frac{E\delta_1}{2(1+\mu)};$$

$$K_{11} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E\delta_1^2}{1-\mu^2} + \frac{E_p}{s} [a(\delta_2^2 - \delta_1^2) + c(\delta_3^2 - \delta_2^2)] \right\};$$

$$K_{12} = \frac{\mu E\delta_1^2}{2(1-\mu^2)}, \quad K_{22} = \frac{E\delta_1^2}{2(1-\mu^2)}, \quad K_{33} = \frac{E\delta_1^2}{4(1+\mu)},$$

$$D_{11} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{E\delta_1^3}{1-\mu^2} + \frac{E_p}{s} [a(\delta_2^3 - \delta_1^3) + c(\delta_3^3 - \delta_2^3)] \right\};$$

$$D_{12} = \frac{\mu E\delta_1^3}{3(1-\mu^2)}, \quad D_{22} = \frac{E\delta_1^3}{3(1-\mu^2)}, \quad D_{33} = \frac{E\delta_1^3}{6(1+\mu)}.$$

Таким образом, физические соотношения записываются в форме (12.41), т. е. подкрепленная оболочка заменяется некоторой условной слоистой сплошной оболочкой. Отметим, что аналогичным образом, можно учесть поперечные ребра (для этого в равенствах (12.5) следует принять $\varphi = 90^\circ$), а также ребра, расположенные под произвольным углом к оси α . Положение начальной поверхности не является существенным — для сохранения формы равенств (12.42) важно только, чтобы все слои лежали по одну сторону от этой поверхности. В частности, если ребра расположены на внутренней поверхности обшивки, показанной на рис. 12.10, за начальную можно принять ее наружную поверхность. Величины расстояния δ_i при этом отсчитываются от этой поверхности и подставляются в равенства (12.42).

12.3. ТРЕХСЛОЙНЫЕ ПАНЕЛИ

В конструкциях летательных аппаратов широкое применение находят трехслойные панели, образованные из тонких несущих слоев и среднего слоя-заполнителя из сот или пенопласта. Расчет трехслойных конструкций проиллюстрируем на примере прямоугольной пластины, показанной на рис. 12.11. Примем

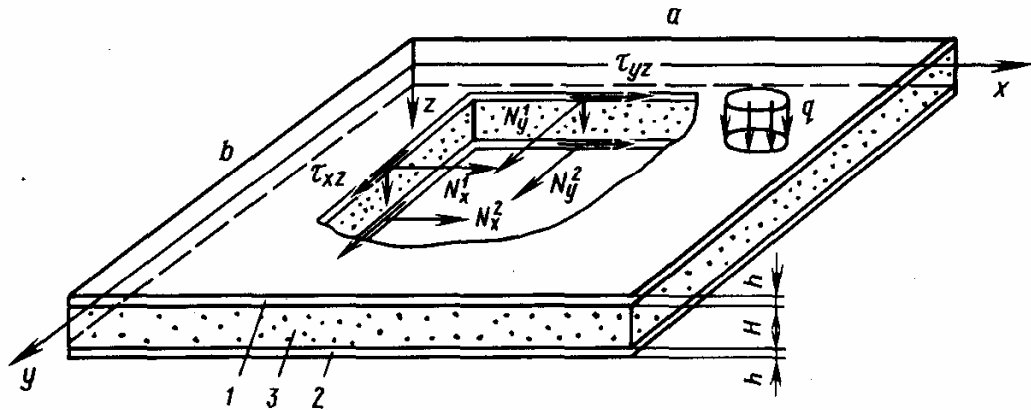


Рис. 12.11. Трехслойная панель:
1, 2 — несущие слои; 3 — наполнитель

следующие гипотезы. Несущие слои будем считать одинаковыми, изотропными и настолько тонкими, что их изгибную жесткость можно не учитывать. В слоях возникают усилия $N_x^1, N_y^1, N_{xy}^1, N_x^2, N_y^2, N_{xy}^2$ (см. рис. 12.11), обеспечивающие восприятие изгибающих и крутящего моментов. Заполнитель будем считать легким, т. е. предположим, что вкладом напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} в заполнителе можно пренебречь по сравнению с вкладом усилий несущих слоев. Таким образом, в заполнителе отличными от нуля остаются касательные напряжения τ_{xz}, τ_{yz} и нормальные напряжения σ_z , обеспечивающие совместную работу слоев и восприятие внешнего давления и перерезывающих сил.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние заполнителя. Полагая в уравнениях равновесия (3.1), (3.2) $X = Y = 0$ и отбрасывая для легкого заполнителя члены, содержащие σ_x, σ_y и τ_{xy} , получим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0.$$

Отсюда $\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y)$, $\tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)$, т. е. для легкого заполнителя касательные напряжения постоянны по толщине. Соотношения упругости для касательных напряжений (3.5), (3.7) имеют вид

$$\frac{\tau_{xz}}{G_0} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\tau_{yz}}{G_0} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (12.46)$$

Сделаем одно замечание. Классическая теория изгиба пластин, изложенная в гл. 3, основывалась на гипотезах Кирхгофа, предполагающих, что, во-первых, материал несжимаем вдоль оси z , т. е. $w = w(x, y)$, и что, во-вторых, деформации сдвига γ_{xz}, γ_{yz} отсутствуют, т. е. правые части равенств (12.46) равны нулю (см. разд. 3.1.2). Из равенств (12.46) следует, что при этом $G_0 \rightarrow \infty$, т. е. заполнитель должен быть абсолютно жестким при сдвиге. Однако жесткость легкого заполнителя весьма мала и

образующиеся в нем сдвиговые деформации оказывают значительное влияние на поведение трехслойной панели. Поэтому вторая гипотеза Кирхгофа не используется при построении теорий трехслойных пластин и оболочек. Что касается первого предположения — о несжимаемости пакета в поперечном направлении, то оно, как правило, не приводит к существенным погрешностям.

Учитывая, что τ_{xz} , τ_{yz} и w не зависят от переменной z , в результате интегрирования равенств (12.46) получим

$$u = u_0 + z \left(\frac{\tau_{xz}}{G_0} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad v = v_0 + z \left(\frac{\tau_{yz}}{G_0} - \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (12.47)$$

Здесь $u_0(x, y)$ и $v_0(x, y)$ — перемещения срединной плоскости в направлении осей x и y . В случае изгиба симметричной относительно срединной плоскости трехслойной пластины поперечной нагрузкой (см. рис. 12.11) эти перемещения так же, как и для однослойной пластины, обращаются в нуль (см. разд. 3.3.1) и равенства (12.47) принимают вид

$$u = z\theta_x, \quad v = z\theta_y, \quad (12.48)$$

где

$$\theta_x = \frac{\tau_{xz}}{G_0} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = \frac{\tau_{yz}}{G_0} - \frac{\partial w}{\partial y} \quad (12.49)$$

— углы поворота элемента, нормального к срединной плоскости. Равенства (12.48) обобщают соотношения (3.53) классической теории изгиба пластин и переходит в них при $G_0 \rightarrow \infty$.

Напряжения τ_{xz} и τ_{yz} статически эквивалентны перерезывающим силам (см. рис. 3.8)

$$Q_x = \tau_{xz}H, \quad Q_y = \tau_{yz}H. \quad (12.50)$$

Из равенств (12.49) и (12.50) имеем

$$Q_x = C \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad Q_y = C \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (12.51)$$

где

$$C = G_0H \quad (12.52)$$

— жесткость заполнителя (или трехслойной пластины) при поперечном сдвиге.

Рассмотрим теперь несущие слои. Перемещения верхнего 1 и нижнего 2 слоев определяются формулами (12.48), в которых надо соответственно принять $z = -H/2$ и $z = H/2$ (см. рис. 12.11), т. е. $u_{1,2} = \mp 0,5H\theta_x$, $v_{1,2} = \mp 0,5H\theta_y$. Отметим, что несущие слои считаются тонкими ($h \ll H$) и изменение их перемещений

и напряжений по толщине h не учитывается. Найдем деформации слоев

$$\varepsilon_x^{1,2} = \frac{\partial u_{1,2}}{\partial x} = \mp \frac{H}{2} \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{1,2} = \frac{\partial v_{1,2}}{\partial y} = \mp \frac{H}{2} \frac{\partial \theta_y}{\partial y};$$

$$\gamma_{xy}^{1,2} = \frac{\partial u_{1,2}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1,2}}{\partial x} = \mp \frac{H}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)$$

и возникающие в них усилия [см. формулы (3.14)]

$$N_x^{1,2} = \mp \frac{1}{2} BH \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right),$$

$$N_y^{1,2} = \mp \frac{1}{2} BH \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right), \quad (12.53)$$

$$N_{xy}^{1,2} = \mp \frac{BH}{4} (1 - \mu) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right).$$

Здесь $B = Eh / (1 - \mu^2)$ — жесткость слоя при растяжении и сжатии. Из равенств (12.53) следует, что нормальные усилия $N_x^{1,2}$ и $N_y^{1,2}$ образуют изгибающие моменты $M_x = 0,5H (N_x^2 - N_x^1)$, $M_y = 0,5H (N_y^2 - N_y^1)$ (учтено, что $h \ll H$), а касательные усилия $N_{xy}^{1,2}$ статически эквивалентны крутящему моменту $M_{xy} = 0,5H (N_{xy}^2 - N_{xy}^1)$ (см. рис. 3.8). С учетом равенств (12.53) получим

$$M_x = D \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right),$$

$$M_y = D \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right), \quad (12.54)$$

$$M_{xy} = \frac{D}{2} (1 - \mu) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right).$$

Здесь

$$D = 0,5BH^2 \quad (12.55)$$

— изгибная жесткость трехслойной панели. Формула (12.55) по существу и определяет преимущества трехслойной панели по сравнению с однослойной. Действительно, если удалить заполнитель и соединить два несущих слоя с толщиной h , получим $D = 2Bh^2/3$, что значительно меньше (12.55), поскольку $H \gg h$. Отметим, что фактический выигрыш оказывается меньше из-за отмеченной выше податливости заполнителя на сдвиг, однако, как правило, он получается вполне достаточным для того, чтобы оправдать конструктивные и технологические изменения, связанные с применением трехслойных панелей.

Итак, будем считать, что в сечении трехслойной стенки действуют перерезывающие силы (12.51) и моменты (12.54), анало-

гичные соответствующим силовым факторам однослойных пластин (см. рис. 3.8). Эти силы и моменты связаны уравнениями равновесия (3.58) и (3.56), т. е.

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad (12.56)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0.$$

Подставляя в уравнения (12.56) силы (12.51) и моменты (12.54) после некоторых преобразований будем иметь

$$L_{i1}(\theta_x) + L_{i2}(\theta_y) + L_{i3}(w) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (12.57)$$

$$L_{31}(\theta_x) + L_{32}(\theta_y) + L_{33}(w) + Kq = 0.$$

Здесь

$$L_{11}(\theta_x) = K \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} \right) - \theta_x;$$

$$L_{12}(\theta_x) = K \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y}, \quad L_{21}(\theta_y) = K \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y};$$

$$L_{22}(\theta_y) = K \left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) - \theta_y; \quad (12.58)$$

$$L_{13}(w) = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad L_{23}(w) = -\frac{\partial w}{\partial y};$$

$$L_{31}(\theta_x) = D \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad L_{32}(\theta_y) = D \frac{\partial \theta_y}{\partial y};$$

$$L_{33}(w) = D \nabla^2 w;$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad K = \frac{D}{C}.$$

Приведем уравнения (12.57) к одному уравнению относительно, некоторой разрешающей функции $F(x, y)$. С этой целью воспользуемся следующим общим приемом, справедливым для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Составим формально определитель из операторов (12.58) $\|L_{ij}\|$

и выразим искомые функции через функцию F с помощью миноров, являющихся алгебраическими дополнениями элементов третьей строки. С учетом (12.58) получим

$$\begin{aligned}
 \theta_x &= \left\| \begin{matrix} L_{12} & L_{13} \\ L_{22} & L_{23} \end{matrix} \right\| (F) = [L_{12}L_{23} - L_{13}L_{22}] (F) = \\
 &= K \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 F) - \frac{\partial F}{\partial x}, \\
 \theta_y &= - \left\| \begin{matrix} L_{11} & L_{13} \\ L_{21} & L_{23} \end{matrix} \right\| (F) = [L_{13}L_{21} - L_{23}L_{11}] (F) = \\
 &= K \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 F) - \frac{\partial F}{\partial y}, \\
 w &= \left\| \begin{matrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{matrix} \right\| (F) = [L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}] (F) = \\
 &= K^2 \frac{1-\mu}{2} \nabla^2 \nabla^2 F - K \frac{3-\mu}{2} \nabla^2 F + F.
 \end{aligned} \tag{12.59}$$

Непосредственной подстановкой равенств (12.59) в уравнения (12.58) можно убедиться в том, что первые два из них удовлетворяются тождественно, а третье после некоторых преобразований принимает вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 \left[1 - K \frac{1-\mu}{2} \nabla^2 \right] (F) = q. \tag{12.60}$$

Уравнение (12.60) имеет шестой порядок по переменным x и y , т. е. на краях пластины необходимо сформулировать по три граничных условия. В случае жесткого защемления необходимо положить на крае $\theta_x = \theta_y = w = 0$. Для свободного края $x = \text{const}$ $Q_x = M_x = M_{xy} = 0$, а для края $y = \text{const}$ $Q_y = M_y = M_{xy} = 0$. Для шарнирно опертого края $x = \text{const}$ $w = 0$, $M_x = 0$, $\theta_y = 0$ (или $M_{xy} = 0$) и для края $y = \text{const}$ $w = 0$, $M_y = 0$, $\theta_x = 0$ (или $M_{xy} = 0$).

Для абсолютно жесткого на сдвиг заполнителя $G_0 \rightarrow \infty$, т. е. $C \rightarrow \infty$ и $K = 0$. При этом из последнего равенства (12.59) имеем $F = w$, а из (12.60) получим уравнение $D \nabla^2 \nabla^2 w = q$; по форме совпадающее с уравнением (3.62) для однородной пластины.

Для свободно опертой пластины (граничные условия соответствуют записанному выше основному случаю шарнирного опирания) с длиной a и шириной b (см. рис. 12.11) функция F может быть задана в форме следующего ряда:

$$F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y, \tag{12.61}$$

где $\lambda_m = \pi m/a$, $\lambda_n = \pi n/b$. Из равенств (12.54), (12.59), (12.61) следует, что при этом на краях $x = 0$ и $x = a$ $w = M_x = \theta_y = 0$, а на краях $y = 0$ и $y = b$ $w = M_y = \theta_x = 0$. Подставляя ряд (12.61) в уравнение (12.60) и повторяя вывод решения (3.79), (3.82), окончательно получим

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y}{ab D_{mn}} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y dx dy,$$

где

$$D_{mn} = D (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2 \left[1 + K \frac{1-\mu}{2} (\lambda_m^2 + \lambda_n^2) \right].$$

Прогиб w и углы поворота могут быть найдены по формулам (12.59), а напряжения в заполнителе и усилия в несущих слоях определяются с помощью равенств (12.50), (12.51) и (12.53).

Уравнение устойчивости трехслойной пластины, сжатой в продольном направлении усилиями N_x^0 (см. рис. 9.7), можно получить, если заменить в уравнении (12.60) нагрузку q условной нагрузкой $\bar{q} = -N_x^0 (\partial^2 w / \partial x^2)$ согласно равенству (9.37). В результате с учетом (12.59) будем иметь

$$D \nabla^2 \nabla^2 \left[1 - K \frac{1-\mu}{2} \nabla^2 \right] (F) + N_x^0 \left[K^2 \frac{1-\mu}{2} \nabla^2 \nabla^2 - \right. \\ \left. - K \frac{3-\mu}{2} \nabla^2 + 1 \right] \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = 0.$$

При $K = 0$ и $F = w$ это уравнение совпадает с (9.42). Для свободно опертой пластины в форме (12.61), применяя формулу (9.45), получим

$$N_x^0 = \frac{D (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2 \left[1 + K \frac{1-\mu}{2} (\lambda_m^2 + \lambda_n^2) \right]}{\lambda_m^2 \left[1 + K \frac{3-\mu}{2} (\lambda_m^2 + \lambda_n^2) + K^2 \frac{1-\mu}{2} (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2 \right]}. \quad (12.62)$$

Параметр

$$K = \frac{D}{C} = \frac{EhH}{2(1-\mu^2)G_0}$$

имеет размерность m^2 . Введем безразмерный параметр

$$\bar{K} = K \lambda_n^2 = \frac{\pi n}{2(1-\mu^2)} \frac{E}{G_0} \frac{hH}{b^2}$$

и запишем равенство (12.62) в виде, аналогичном (9.45):

$$N_{кр} = k \frac{\pi^2 D}{b^2},$$

где

$$k = \min_{m, n} \frac{n^2 (1 + c^2)^2 \left[1 + \bar{K} \frac{1 - \mu}{2} (1 + c^2) \right]}{c^2 \left[1 + \bar{K} \frac{3 - \mu}{2} (1 + c^2) + \bar{K}^2 \frac{1 - \mu}{2} (1 + c^2)^2 \right]}, \quad c = mb/na.$$

Минимальное значение параметра k можно найти, например, подставляя различные значения чисел $m, n = 1, 2, 3 \dots$

Более полные сведения о теории и методах расчета трехслойных элементов представлены в работе [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдонин А. С., Фигуровский В. И. Расчет на прочность летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1985. 439 с.
2. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 311 с.
3. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
4. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Гостехиздат. 1958. 628 с.
5. Балабух Л. И., Алфутов Н. А., Усюкин В. И. Строительная механика ракет. М.: Высшая школа. 1984. 391 с.
6. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 768 с.
7. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 489 с.
8. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
9. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М.: Оборонгиз, 1961. 368 с.
10. Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмэн Р. Л. Аэроупругость. М.: Иностранная литература, 1958. 799 с.
11. Бояршинов С. В. Основы строительной механики машин. М.: Машиностроение, 1973. 456 с.
12. Власов В. З. Избранные труды. Том 1. М.: АН СССР, 1962. 528 с.
13. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 568 с.
14. Вольмир А. С. Устойчивость деформированных систем, М.: Наука, 1967. 984 с.
15. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.
16. Демидов С. П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 432 с.
17. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: ГИТТЛ, 1948. 376 с.

18. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.
19. Колесников К. С., Сухов В. Н. Упругий летательный аппарат как объект автоматического управления. М.: Машиностроение, 1974. 268 с.
20. Кузьмин П. А. Малые колебания и устойчивость движения. М.: Наука, 1973. 208 с.
21. Кун П. Расчет на прочность оболочек в самолетостроении. М.: Оборонгиз, 1961. 306 с.
22. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Государственное издательство судостроительной промышленности, 1962. 431 с.
23. Образцов И. Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных конструкций. М.: Машиностроение, 1966. 392 с.
24. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
25. Одинокое Ю. Г. Расчет самолета на прочность. М.: Машиностроение, 1973. 392 с.
26. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. М.: Машиностроение: 1968. 831 с.
27. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики/ Под ред. Г. К. Клейна. М.: Высшая школа. 1973. 360 с.
28. Смирнов А. И. Аэроупругая устойчивость летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1980. 232 с.
29. Стригунов В. М. Расчет на прочность фюзеляжей и герметических кабин самолетов. М.: Машиностроение, 1974. 287 с.
30. Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем/Под ред. А. П. Филина. Л.: Судостроение, 1961. 876 с.
31. Феофанов А. Ф. Строительная механика авиационных конструкций. М.: Машиностроение, 1964. 284 с.
32. Фигуровский В. И. Расчет на прочность беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 359 с.
33. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Том II. М.: Наука, 1978. 616 с.
34. Хазанов Х. С., Савельев Л. М. Метод конечных элементов в приложении к задачам строительной механики и теории упругости. Куйбышев: КуАИ, 1975. 128 с.

- Анализ подконструкций 315
 — системный 311
 Аналог функционала дискретный 47
 Аппроксимирующая функция 124

 Балка с тонкой стенкой 356
 — стенка 356
 Бимомент 265
 — приведенный 268
 Бредта формула 210
 Бубнова—Галеркина метод 37, 387, 411, 421

 Власова—Канторовича метод 39, 244
 Воздействия температурные 88
 Вывод уравнений теории тонких пластин 101

 Гипотеза Кармана 354
 — недеформируемого контура 262
 — стационарности 436
 Гипотезы балочной теории оболочек 189
 — Гирхгофа 100, 140
 — тонкостенного стержня 260
 Гука закон 10, 140, 457—459, 462, 463, 466, 489, 501

 Давление аэродинамическое 434
 — внешнее критическое 372
 Даламбера—Лагранжа принцип 375
 Девiator деформаций 456, 458, 462
 — напряжений 454, 458, 462, 460
 Девиация 265
 Декомпозиция 311, 313
 Депланация (искривление) 265
 — сечения 232, 233
 Деформация антисимметричная 172
 — оболочки осесимметричная 145, 154
 — подольного удлинения 262
 — сдвига 455, 457, 458
 — средняя 456
 Деформации 455, 457
 — оболочки 140
 — и напряжения остаточные 449, 468, 487

 Дивергенция 444
 Дискретизация конструкции 281

 Жесткость изгибная 141, 515
 — оболочки мембранная 363, 515
 — пластины на растяжение-сжатие 102
 — смешанная 515
 — цилиндрическая 363

 Задача Кирша 109
 Закон Гука 10, 140, 457—459, 462, 463, 466, 489, 501

 Изгиб круглых пластин 133
 — — — осесимметричный 135
 Изменения кривизн 140
 Инвариантность 449, 450, 452—457, 461
 Интенсивность деформаций 456, 457, 458, 463, 482, 497
 — — сдвига 457, 458
 — касательных напряжений 455, 458
 — напряжений 454, 458, 463, 465, 478, 482, 487, 490, 491

 Кармана гипотеза 354
 Кастильяно вариационный принцип 24, 479
 — теорема 28
 Кирхгофа гипотезы 100
 Кирша задача 109
 Колебания аэроупругие 433
 — вынужденные 390, 392, 408
 — оболочек 419
 — пластин 418
 — свободные 389
 — систем с сосредоточенными массами 384
 — системы с конечным числом степеней свободы 377
 — — — одной степенью свободы 388
 — — — распределенными параметрами 381
 — стержней 402
 Конструкции авиационные 297

- Конструкция типа крыла 299
 — — фюзеляжа 302
 Концентрация напряжений 109
 Координаты обобщенные 377
 — — текущей точки сечения оболочки 196
 — нормальные 397, 409
 — центра изгиба в оболочках с замкнутым контуром поперечного сечения 223, 224
 Координаты центра изгиба в однозамкнутом сечении оболочки с малой конусностью 229
 Коэффициент демпфирования 398
 — динамичности 391, 394
 — концентрации напряжений 109
 — несимметрии сечения оболочки 196
 — Пуассона 457, 458, 462, 463, 504, 506, 507
 — редуционный по материалу 193
 — — устойчивости 355
 — устойчивости 346
 Коэффициенты аэродинамического демпфирования 441
 — — жесткости 441
 — обобщенной жесткости 378
 — — массы 378
 Кривая единая 463, 466, 467, 468, 471, 478—480, 491
 Кривизна пластины при изгибе 114
 Критерий устойчивости 327
 — — статический 327
 — — энергетический 330
 Кручение срединной поверхности 140
 — чистое тонкостенного стержня 263
 Крылова функции 187

 Лагранжа вариационный принцип 19, 144, 236, 242, 245, 279
 Дирихле теорема 330
 Лапласа оператор 371
 Леви метод 121
 Линии главных кривизн оболочки 137
 Лоренца—Тимошенко формула 367

 Материал анизотропный 500
 — изотропный 500
 — композиционный 500
 — несжимаемый 457, 458, 466, 497, 498
 — ортотропный 501, 505, 506
 — редуцированный 193
 Матрица единичная 84
 — жесткости (податливости) 83, 381, 288
 — инерции 381
 — усилий 84
 Маха число 437
 Метод Бубнова—Галеркина 37, 387, 411, 421
 — вариационно-разностный 46
 — Власова—Канторовича 39, 244
 — вырезания узлов 58
 — дифференциально-разностный 48
 — каллокаций 51
 — кинематический 472, 473, 475
 — конечно-разностный 42, 45
 — конечных элементов 90, 415, 423, 281, 483
 — Леви 121
 — локальных вариаций 49
 — матричный 78
 — моментных осей 59
 — — точек 59
 — Навье 119
 — отсеков 429
 — Папковича—Треффца 40
 — переменных параметров упругости 482, 483, 486, 497
 — перемещений 78
 — подконструкций 312
 — последовательных нагружений 485, 486, 490
 — прямых 48
 — редуционных коэффициентов 483—485
 — Ритца—Тимошенко (Релея—Ритца) 35, 387, 409, 421
 — сеток 45
 — сил 61
 — сосредоточенных масс 384
 — суперэлементов 426
 — упругих решений 480—482, 483
 Методы Ритца—Тимошенко, Бубнова—Галеркина и конечных разностей в задачах устойчивости 335, 337, 338
 Меридиан 150
 Модуль касательный 467, 491, 493, 494, 497, 499
 — объемной деформации 458
 — приведенный 495
 — сдвига 458, 462, 502
 — секущий 463, 464, 478—480, 482, 486, 490, 497, 499
 — упругости 458, 462, 489, 500, 501, 506
 Момент восстанавливающий 327
 — изгибающий 58, 63, 67, 192
 — изгибно-крутящий 267
 — инерции центробежный и осевой 195
 — — чистого кручения 264
 — крутящий 58, 63, 67
 — опрокидывающий 327
 — статический 195
 Моменты обобщенные статические отсеченной части контура редуцированного сечения 202

 Навье метод 119
 Нагружение активное 464, 465, 467, 479
 — нейтральное 467

- простое 465, 466, 468, 490, 491
- Нагрузка критическая 328
- условная поперечная 332
- Нагрузка эквивалентная температурная 291
- Напряжения главные 455, 451, 452, 460, 475, 476
- касательные максимальные 453, 456, 458, 459
- нормальные в сечении оболочки 191
- осевые критические 367
- средние 453, 458
- Неизменяемость геометрическая 54
- Неопределимость статическая 61
- Область устойчивости 352
- Оболочка 137
- вращения 150
- Оболочки подкрепленные 516, 517
- пологие 177
- слоистые 513, 515
- Оператор Лапласа 371
- Оценка верхняя критической нагрузки 337
- Ошибка округления 306
- Панели композиционные 510—513
- трехслойные 517—524
- Панель, подкрепленная стрингером 353
- Папковича теорема 353
- Параллель 150
- Пластина 99
- Площадки главные 450, 451, 452, 453
- Площадь секториальная 261
- сечения редуцированная 193
- Поверхность оболочки срединная 137
- устойчивости 352
- Погрешности вычислений 308
- МКЭ 305
- Подконструкции 311
- Потеря устойчивости локальная 373
- Поток касательных сил 191, 270
- — — в конической оболочке с открытым контуром 227
- — — в оболочке с многозамкнутым контуром поперечного сечения 212
- — — — с однозамкнутым контуром сечения 208
- — — в сечении оболочки с открытым контуром 205
- Пояс 290
- Предел текучести 448, 459, 461, 469, 470, 492
- Принцип вариационный смешанный 32
- Даламбера—Лагранжа 375
- Кастильяно 90, 479
- Лагранжа 19, 144, 236, 242, 245, 479
- наименьшей работы 62, 27, 250, 254
- независимости действия сил 61

- Противоречие уравнений равновесия закону Гука 105
- Пуассона коэффициент 457, 458, 462, 463, 501, 506
- уравнение 48
- Радиусы кривизны главные 138
- Разности вперед назад 44
- — — конечные несимметричные 43
- — — центральные 43
- Рамы 54
- кольцевые (шпангоуты) 67
- симметричные 65
- Редуцирование матрицы жесткости 317
- уравнений 386
- Резонанс 391
- Решение в перемещениях 285
- Рэлlea—Ритца (Ритца—Тимошенко) метод 387, 409, 421
- Рэлlea формула 399
- Ряд Тейлора 43
- Саутуэлle—Папковича формула 370
- Связи 55, 56
- лишние 55
- Сетка ортогональная 45
- расчетная 282
- Сила обобщенная перерезывающая 116
- перерезывающая 114
- продольная, поперечная 64 192
- Силы инерционные 382
- обобщенные 379
- Синтез подконструкций 316
- Система канонических уравнений метода сил 62
- Система канонических уравнений метода перемещений 74
- комбинированная 56
- основная 74
- статически определяемая 57, 61
- — — неопределимая 61
- стержневая 53
- Системы функций ортогональные 246, 252, 255
- Скорость сходимости 308
- Скос потока 434
- Состояние возмущенное 330
- докритическое 329
- закритическое 329
- начальное (докритическое) 330
- оболочки безмоментное 148, 151, 155, 173
- — докритическое 362
- однородное 108
- плоское напряженное 106
- Софи Жермен—Лагранжа уравнение 115
- Степень статической (кинематической) неопределимости 61
- Стержень 53

- жесткий с упругим шарниром 328
- на упругом основании 334
- тонкостенный 259
- Струхала число 436
- Схема конструктивно-силовая 311
- расчетная 374
- Сходимость МКЭ 306

- Тейлора ряд 43
- Тело жесткопластическое 471
- Тело идеально пластическое 468, 469, 470
- Тензор деформаций 455, 456
- напряжений 449, 453
- Теорема Кастильяно 60, 28
- Лагранжа—Дирихле 330
- Папковича 353
- Теория деформационная 462—466, 468, 478, 479, 482, 487, 491, 497
- полубезмоментная цилиндрических оболочек 183
- поршневая 438
- техническая цилиндрических оболочек 182
- течения 466—468, 490, 491
- тонких пластин 99
- Точка бифуркации (ветвления) 328
- законтурная 46
- Точки каллокации 51

- Углы атаки 435
- поворота нормали 140
- Угол закручивания распределенный (погонный) 213
- наклона гребней волн 358
- Узел конечного элемента (узловая точка) 283, 300, 303
- конструкции 282, 300, 303
- Уравнение устойчивости для цилиндрической оболочки 364
- Уравнения деформаций Коши 5
- для подконструкций 314
- изгиба балки в конечных разностях 45
- — круглой пластины 133
- канонические 74
- колебаний интегральные 383
- Ламе 11
- Пуассона 48
- равновесия 9
- равновесия оболочки 142
- — — в возмущенном состоянии 363
- совместности деформаций 6, 107, 180
- Софи Жермен—Лагранжа 115
- устойчивости линеаризованные 362, 364
- — прямоугольной пластины 340
- — — при двухосном сжатии 351
- — — — при сдвиге 347

- — — — при сжатии в одном направлении 343
- — — — при сжатии и сдвиге 352
- циркуляции потоков касательных сил 214
- Усилия в поясах и стойках 356, 360
- в стержнях 58
- критические 366
- Условия граничные для пластин при изгибе 115
- — — — естественные 128, 265
- минимума дискретного аналога функционала 47
- на поверхности 7
- неустойчивости 442
- ортогональности 126
- — собственных форм колебаний 396, 406
- пластичности Мизеса 460, 461, 476, 477, 487
- — Треска 459, 460, 475, 476, 477
- связи подконструкций 314
- сопряжения конечных элементов 286
- — оболочек 164
- стационарности полной энергии 330
- Устойчивость асимптотическая 443
- оболочек 361
- — при осевом сжатии 365
- пластин 496—499, 513, 523, 524
- сжатого стержня 337
- стержней 492—496, 510
- сферической оболочки 371

- Факторы силовые в прямоугольной и круглой пластинах при изгибе 114, 134
- Ферма 53
- неопределимая 55
- плоская 54
- пространственная 63
- статически определимая 55
- Флаттер 444
- Форма первая квадратичная поверхности 138
- Форма собственных колебаний 395, 404
- Формула Бредта 210
- Ленца—Тимошенко 367
- Рэлля 399
- Рэлля—Ринтца с Ринтца—Тимошенко 387, 409, 421
- Эйлера 313, 492
- Формулы конечно-разностные 43
- фиктивного прогиба в законтурной точке 46, 130, 131
- Функция влияния 383
- Функция напряжений (Эри) 107, 179
- разрешающая 185
- Функционал 265

— одномерный 49
Функции отсеченной части площади 270
Функции формы элемента 286

Шаг пробы 50
— сетки (разбиения) 48
Шарнир пластический 471, 472, 473
Ширина обшивки приведенная 355
Шпангоуты 66

Частота приведенная 436
Частоты колебаний собственные 389, 395, 404
Число Маха 437
— обусловленности матрицы 308
— полуволн критическое 366
— степеней свободы 55
— Струхала 436

Центр изгиба в тонкостенной конструкции с замкнутым контуром поперечного сечения 223

— — открытого профиля 206

Эйлера формула 333, 492
Эксперимент численный 304
Элементы конечные 289
— — несовместные 307
— — совместные 307
Элемент срединной плоскости двумерный 103
Элемент треугольный тонкостенный 291
— прямоугольный тонкостенный 295
Энергия балки с тонкой стенкой 360
— деформации потенциальная 15
— дополнительная потенциальная 60, 23
— оболочки 144
— полная 16
— полная потенциальная 264
— потенциальная 376
— потенциальная изгиба пластины 118
Эри функция 107
Эффект включения 257
— краевой 147, 158, 176

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Вариационные принципы и прикладные методы решения задач строительной механики	5
1.1. Основные соотношения теории упругости	5
1.1.1. Теория деформаций	5
1.1.2. Теория напряжений	6
1.1.3. Физические соотношения	10
1.1.4. Методы решения задач в перемещениях и в на- пряжениях	11
1.2. Потенциальная энергия деформации упругой системы	13
1.3. Вариационное решение задачи в перемещениях	17
1.3.1. Полная энергия упругой системы	17
1.3.2. Вариационный принцип Лагранжа	18
1.3.3. Пример — задача об изгибе балки	21
1.4. Вариационное решение задачи в напряжениях	23
1.4.1. Дополнительная потенциальная энергия	23
1.4.2. Вариационный принцип Кастильяно	24
1.4.3. Принцип наименьшей работы	27
1.4.4. Теорема Кастильяно	28
1.4.5. Примеры	29
1.5. Смешанный вариационный принцип	32
1.6. Прикладные методы решения задач строительной ме- ханики	34
1.6.1. Метод Ритца—Тимошенко	35
1.6.2. Метод Бубнова—Галеркина	37
1.6.3. Метод Власова—Канторовича	39
1.6.4. Метод Папковича—Треффца	40
1.6.5. Конечно-разностные методы	42
1.6.6. Вариационно-разностный метод	46
1.6.7. Дифференциально-разностный метод (метод пря- мых)	48
1.6.8. Метод локальных вариаций	49
1.6.9. Метод коллокаций	51
Глава 2. Расчет стержневых систем	53
2.1. Ферменные, рамные и комбинированные системы	53
2.1.1. Определения. Расчетные схемы	53
2.1.2. Геометрическая неизменяемость системы	54
2.2. Расчет статически определимых стержневых систем	57
2.2.1. Статически определимые системы	57
2.2.2. Метод вырезания узлов	58
2.2.3. Метод моментных точек (для плоских ферм) и моментных осей (для пространственных)	59
2.2.4. Определение перемещений узлов статически оп- ределимых ферм	60
2.3. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил	61
2.3.1. Определение усилий в стержнях	61
2.3.2. Определение перемещений узлов	63
2.3.3. Некоторые обобщения	63
2.3.4. Использование симметрии при расчете рам	65
2.3.5. Пример расчета комбинированной системы	66

2.4. Расчет шпангоутов	66
2.4.1. Определение усилий при нагружении в плоскости шпангоута	66
2.4.2. Определение перемещений шпангоута	70
2.4.3. О расчете шпангоутов, нагруженных перпендикулярно их плоскости	72
2.5. Расчет плоских рам методом перемещений	72
2.5.1. Определение числа неизвестных	72
2.5.2. Основная система и канонические уравнения	74
2.5.3. Определение коэффициентов канонических уравнений	75
2.5.4. Пример расчета рамы методом перемещений	76
2.6. Матричные методы расчета стержневых систем	78
2.6.1. Идеализированная расчетная схема	78
2.6.2. Метод сил в матричной форме	79
2.6.3. Учет температурных воздействий	88
2.6.4. Метод перемещений в матричной форме	90
2.6.5. Матрица жесткости стержневой системы	93
Глава 3. Расчет пластин	99
3.1. Основные гипотезы и уравнения	99
3.1.1. Расчетная схема пластины. Гипотезы Кирхгофа	99
3.1.2. Вывод уравнений теории тонких пластин	101
3.2. Плоское напряженное состояние пластин	106
3.2.1. Исходные соотношения	106
3.2.2. Однородное плоское напряженное состояние	108
3.2.3. Концентрация напряжений в пластине с отверстием	109
3.3. Изгиб прямоугольных пластин	113
3.3.1. Уравнения теории изгиба пластин и граничные условия	113
3.3.2. Методы расчета прямоугольных пластин	119
3.4. Изгиб круглых пластин	133
3.4.1. Исходные соотношения	133
3.4.2. Осесимметричный изгиб круглых пластин	135
Глава 4. Расчет оболочек	137
4.1. Уравнения общей теории оболочек	137
4.1.1. Основные определения	137
4.1.2. Исходные соотношения в криволинейных координатах	139
4.1.3. Основные соотношения общей теории оболочек	140
4.1.4. Граничные условия	143
4.1.5. Полная энергия оболочки	144
4.2. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки	145
4.2.1. Вывод разрешающего уравнения	145
4.2.2. Краевой эффект и безмоментное состояние	147
4.3. Безмоментная теория оболочек вращения	150
4.3.1. Геометрия оболочки вращения	150
4.3.2. Основные соотношения для безмоментной оболочки вращения	151
4.4. Осесимметричная деформация оболочки вращения	154
4.4.1. Осесимметричная деформация	154
4.4.2. Безмоментное напряженное состояние	155
4.4.3. Краевой эффект	158
4.4.4. Граничные условия и условия сопряжения	163
4.4.5. Примеры расчета	167

4.5. Антисимметричная деформация оболочки вращения	172
4.5.1. Безмоментное решение	173
4.5.2. Краевой эффект	176
4.6. Теория пологих оболочек	177
4.6.1. Основные гипотезы и исходные соотношения	177
4.6.2. Расчет пологих оболочек	179
4.6.3. Техническая теория цилиндрических оболочек	182
4.7. Полубезмоментная теория цилиндрических оболочек	183
4.7.1. Основные гипотезы и исходные соотношения	183
4.7.2. Круговая цилиндрическая оболочка	186
Глава 5. Расчет подкрепленных тонкостенных конструкций по балочной теории	189
5.1. Основные определения и гипотезы	189
5.2. Определение нормальных напряжений	192
5.2.1. Редуцирование сечения по материалу	192
5.2.2. Вывод формулы для нормальных напряжений	194
5.2.3. Примеры определения нормальных напряжений	197
5.3. Определение касательных напряжений	201
5.3.1. Вывод формулы для потока касательных сил	201
5.3.2. Определение ПКС в оболочках с открытым контуром поперечного сечения. Центр изгиба	203
5.3.3. Определение ПКС при изгибе и кручении оболочки с однозамкнутым контуром сечения	208
5.3.4. Определение ПКС при изгибе и кручении оболочки с многозамкнутым контуром поперечного сечения	211
5.3.5. Примеры определения ПКС в оболочках с многозамкнутым контуром поперечного сечения	215
5.4. Определение центра изгиба сечения тонкостенной конструкции	223
5.5. Особенности расчета подкрепленных конических оболочек	225
Глава 6. Расчет тонкостенных конструкций с учетом деформации сечения	232
6.1. Изгиб и кручение призматической оболочки типа кессона прямого крыла	232
6.1.1. Основные определения	232
6.1.2. Решение задачи в перемещениях	233
6.1.3. Решение задачи в напряжениях	250
6.2. Взаимодействие стрингеров и обшивки	257
6.3. Изгиб и кручение тонкостенных стержней и оболочек с открытым контуром сечения	259
6.3.1. Основные гипотезы. Деформации удлинения и кривизны кручения	260
6.3.2. Полная потенциальная энергия. Уравнения равновесия. Граничные условия	264
6.3.3. Определение нормальных напряжений и потока касательных сил	267
6.3.4. Частный случай изгиба и кручения стержня	272
6.3.5. Пример стесненного кручения стержня	272
Глава 7. Расчет тонкостенных пространственных конструкций методом конечных элементов	280
7.1. Характеристика метода конечных элементов	280
7.2. Конечно-элементная модель конструкции	280
7.3. Составление уравнений МКЭ в перемещениях	285
	533

7.4. Конечные элементы	289
7.5. Применение МКЭ к расчету типовых авиационных конструкций	297
7.5.1. Плоские подкрепленные конструкции	297
7.5.2. Конструкции типа крыла	299
7.5.3. Конструкции типа фюзеляжа	302
7.6. Оценка точности МКЭ	304
7.6.1. Источники погрешностей	305
7.6.2. Сходимость МКЭ	306
7.6.3. Погрешности вычислений	308
 Глава 8. Основы системного анализа сложных авиационных конструкций	 311
8.1. Конструктивно-силовая схема летательного аппарата как объект системного анализа	311
8.2. Основы метода подконструкций	312
8.2.1. Описание задачи	312
8.2.2. Декомпозиция системы	313
8.2.3. Уравнения для подконструкций	313
8.2.4. Условия связи подконструкций	314
8.2.5. Анализ подконструкций	315
8.2.6. Синтез (сочленение) подконструкций	316
8.3. Примеры расчета	320
8.3.1. Цилиндрические оболочки, соединенные в отдельных узлах	320
8.3.2. Система двух балок	322
8.3.3. Планер самолета с крылом малого удлинения	324
 Глава 9. Статическая устойчивость элементов летательных аппаратов	 327
9.1. Критерии устойчивости	327
9.1.1. Основные понятия	327
9.1.2. Статический критерий устойчивости	327
9.1.3. Энергетический критерий устойчивости	330
9.2. Прикладные методы расчета на устойчивость	332
9.2.1. Устойчивость стержней	332
9.2.2. Метод Ритца—Тимошенко	335
9.2.3. Метод Бубнова—Галеркина	337
9.2.4. Метод конечных разностей	338
9.3. Устойчивость прямоугольных пластин	340
9.3.1. Основные соотношения	340
9.3.2. Устойчивость прямоугольной пластины, сжатой в одном направлении	343
9.3.3. Устойчивость пластин при сдвиге	347
9.3.4. Устойчивость пластин при комбинированном нагружении	350
9.4. Несущая способность систем, состоящих из пластин, работающих на устойчивость, и стержней	353
9.4.1. Панель, подкрепленная стрингерами	353
9.4.2. Балка с тонкой стенкой	356
9.5. Устойчивость оболочек	361
9.5.1. Уравнения устойчивости и постановка задачи	361
9.5.2. Уравнения устойчивости для цилиндрической оболочки	364
9.5.3. Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии	365

9.5.4. Устойчивость цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении	369
9.5.5. Устойчивость сферической оболочки при внешнем давлении	371

Глава 10. Колебания конструкций летательных аппаратов 374

10.1. Уравнения движения и прикладные методы динамики упругих систем	374
10.1.1. Расчетная схема конструкции	374
10.1.2. Принцип Даламбера—Лагранжа	375
10.1.3. Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах	376
10.1.4. Уравнения малых колебаний системы с конечным числом степеней свободы	377
10.1.5. Дифференциальные уравнения колебаний упругих систем с непрерывно распределенными параметрами	381
10.1.6. Интегральные уравнения колебаний упругой системы	383
10.1.7. Уравнения колебаний систем с сосредоточенными массами	384
10.1.8. Редуцирование системы уравнений	386
10.1.9. Прикладные методы решения задач динамики упругих систем	386
10.2. Система с одной степенью свободы	388
10.2.1. Уравнение колебаний	388
10.2.2. Свободные колебания	389
10.2.3. Вынужденные гармонические колебания	390
10.2.4. Колебания при действии произвольной возмущающей силы	392
10.3. Система с конечным числом степеней свободы	394
10.3.1. Собственные колебания	394
10.3.2. Условия ортогональности	396
10.3.3. Уравнения в нормальных координатах	397
10.3.4. Учет демпфирования	398
10.3.5. Формула Рэлея	399
10.3.6. Пример	400
10.4. Колебания стержней	402
10.4.1. Уравнения поперечных колебаний	402
10.4.2. Собственные колебания	404
10.4.3. Вынужденные колебания	408
10.4.4. Метод Рэлея—Ритца	409
10.4.5. Метод Бубнова—Галеркина	411
10.4.6. Учет деформации сдвига и продольной силы в задачах о колебаниях балок	413
10.4.7. Метод конечных элементов	415
10.5. Колебания пластин и оболочек	418
10.5.1. Основные уравнения и некоторые точные решения	418
10.5.2. Методы Рэлея—Ритца и Бубнова—Галеркина	421
10.5.3. Метод конечных элементов (МКЭ)	423
10.6. Колебания нерегулярных тонкостенных конструкций	426
10.6.1. Метод суперэлементов	426
10.6.2. Метод отсеков	429
10.7. Аэроупругие колебания	433
10.7.1. Постановка задачи	433
10.7.2. Аэродинамическое давление	434
10.7.3. Упрощенные теории	436

10.7.4. Уравнения колебаний	439
10.7.5. Условия неустойчивости	442
10.7.6. Двухстепенная расчетная модель	444
Глава 11. Особенности расчета элементов летательных аппаратов при неупругом поведении материала	448
11.1. Основные соотношения прикладной теории пластичности	448
11.1.1. Пластические деформации	448
11.1.2. Обобщенные инвариантные характеристики напряженного состояния	449
11.1.3. Обобщенные инвариантные характеристики деформированного состояния	455
11.1.4. Анализ обобщенного закона Гука	457
11.1.5. Условия пластичности	459
11.1.6. Физические соотношения деформационной теории пластичности	462
11.1.7. Физические соотношения теории течения	466
11.1.8. Определение остаточных напряжений и деформаций	468
11.2. Определение предельных нагрузок	468
11.3. Прикладные методы решения задач теории пластичности	477
11.3.1. Постановка задачи и методы решения	477
11.3.2. Метод упругих решений	480
11.3.3. Метод переменных параметров упругости	482
11.3.4. Метод редуцированных коэффициентов	483
11.3.5. Метод последовательных нагружений	485
11.3.6. Упругопластическая деформация баков и баллонов давления	486
11.4. Устойчивость за пределом упругости	492
11.4.1. Устойчивость стержней	492
11.4.2. Устойчивость прямоугольных пластин	496
Глава 12. Особенности расчета элементов из ортотропных, слоистых и композиционных материалов	500
12.1. Элементы из слоистых композиционных материалов	500
12.1.1. Соотношения упругости для композиционного материала	500
12.1.2. Стержни из композиционного материала	507
12.1.3. Панели из композиционного материала	510
12.2. Особенности расчета многослойных и подкрепленных тонкостенных элементов	513
12.2.1. Соотношения упругости для слоистых оболочек	513
12.2.2. Соотношения упругости для подкрепленных оболочек	516
12.3. Трехслойные панели	517
Список литературы	524
Предметный указатель	526